وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
دانشگاه شهید مدنی آذربایجان
دانشکده علوم پایه
گروه ریاضی

پایان‌نامه
جهت اخذ مدرک کارشناسی ارشد
رشته ریاضی محض

تقلیل برای سرشت‌های گروه‌های جبری متناهی

استاد راهنما
دکتر قاسم صمدی آغداش

استاد مشاور
دکتر فرضعلی ایزدی

پژوهشگر
ماجد احمدی

مهر ماه ۱۳۹۱
تبریز- ایران

این صفحه عمدا خالی است

بسم الله الرحمن الرحيم

تقدیم به:

پدر و مادر مهربانم، شمع های فروزانی که شعله آنها چراغ راهم بود

پروردگارا...

هیچ کس به پایان و نهایت شکرگزاری تو نمی‌رسد، مگر این که احساس و نیکی تو شکری دیگر را بر او واجب نماید و هر چقدر در طاعت و فرمانبرداری تو کوشش کند، باز به خاطر فضل و احسان بی‌انتهای تو عاجز و ناتوان است .

خدایا، همیشه در لحظات سخت زندگیم با خود می‌گویم: شاید این همان آزمایشی باشد که تو در پشت این پرده‌ی تاریک می‌خواهی تصویر زیبایی از زندگی برایم بسازی، پس ای خدا مرا به اندازه‌ی توانم بیازما و صبوری بیاموز.

به من کمک کن تا قبول کنم، دانسته‌هایم در مقابل دانش لایتناهی تو ندانستنی بیش نیست و بدانم که دانایی تو بیشتر از آنی که من می‌دانم و آن همه را حتی به اندازه‌ی یک قطره جز به یاری تو، دانستن نمی‌توانم.

وقتی جز خدا هیچ ندارم... همه چیز دارم و
وقتی جز خدا همه چیز دارم... هیچ ندارم.

سپاس گزاری...

سپاس خداوندی را که به من آموخت در لحظه‌های شادی شکرگزار باشم و فراموش نکنم، تمام داشته‌ها و دانسته‌هایم از لطف بی‌منت اوست و آموخت که در لحظه‌های اندوهم صبور باشم که همه‌ی غم‌ها رفتنی است و سربلند کسی است که مطیع تقدیر و حکمت الهی باشد.

اینک به پاس لطف الهی که پایان‌نامه‌ی حاضر، آماده شده است برخود واجب می‌دانم از حمایت‌های بی‌دریغ، بذل توجه و مساعدت‌های استاد راهنمایم جناب آقای دکتر **قاسم صمدی آغداش** سپاس گزاری نمایم.

از جناب آقای دکتر **فرضعلی ایزدی**، که مشاوره و مطالعه این پایان‌نامه را به عهده گرفتند، کمال تشکر را دارم. و از آقای دکتر **یوسف زمانی** نیز سپاسگزارم که قبول زحمت فرموده و داوری این تحقیق را برعهده گرفتند.

و بوسه می‌زنم بر دستان مادر و پدر عزیزم که توانستم زیر سایه مهربانی و صبوری‌هایشان در راه کسب علم و دانش قدم بردارم. هم‌چنین تشکر می‌کنم از برادران و خواهران عزیزم، به پاس کمک‌های بی‌دریغ و دلگرمی‌های بی‌پایان‌شان، که بهترین پشتیبان من بودند.

ماجد احمدی

مهر ماه ۱۳۹۱

فهرست مطالب

چکیده

فرض کنید J یک جبر تک‌توان با بعد متناهی روی یک میدان متناهی $\mathbb{F}_q$ باشد، که در آن q توانی از یک عدد اول است. گروه

$$۱ + J = \{۱ + x : x \in J\}$$

با قانون ضرب

$$(۱ + x)(۱ + y) = ۱ + x + y + xy$$

یک $\mathbb{F}_q-$ گروه جبری نامیده می‌شود.
واضح است که

$$(۱ + x)^{-۱} = ۱ + \sum_{i=۱}^{\infty}(-x)^i$$

این بیان خوش تعریف است چون J تک‌توان است ([۸]).
یک مثال مهم گروه $U_n(q)$ از ماتریس‌های بالا مثلثی تک‌توان روی $\mathbb{F}_q$ می‌باشد. ما یک فرآیند برای آنالیز کردن سرشت‌های گروه $J + ۱$ فرمول‌بندی می‌کنیم و با استفاده از این فرآیند، تعداد سرشت‌های تحویل‌ناپذیر $U_n(q)$ از هر درجه برای $n \leq ۱۲$ را محاسبه می‌کنیم.
کلمات کلیدی: گروه‌های جبری،کاراکترهای تحویل‌ناپذیر،گروه یک مثلثی

مقدمه و مفاهیم اولیه

تعریف ۰.۱ *فرض کنید G یک گروه و F میدان دلخواهی باشد و $GL(n,F)$ گروه ماتریس‌های $n \times n$ معکوس‌پذیر با درایه‌های واقع در F باشد.*
نمایش G روی F هومومرفیسم

$$\rho : G \to GL(n,F)$$

است اگر و تنها اگر به ازای هر $g,h \in G$

$$(gh)\rho = (g\rho)(h\rho)$$
$$1\rho = I_n$$

تعریف ۰.۲ *اگر V یک فضای برداری روی F باشد. آنگاه V یک $FG-$مدول نامیده می‌شود اگر نگاشت*

$$V \times G \to V$$
$$vg = v(g\rho)$$

به ازای هر $u,v \in V, \lambda \in F, g,h \in G$ در شرایط ذیل صدق کند

۱) $vg \in V$،

۲) $v(gh) = (vg)h$،

۳) $v1 = v$،

۴) $(\lambda v)g = \lambda(vg)$،

۵) $(u+v)g = ug + vg$.

تعریف ۰.۳ *اگر G یک گروه و X یک مجموعه باشد عمل گروه (چپ) G روی X نگاشت*

$$\circ : G \times X \to X$$

می‌باشد بقسمی که برای هر $x \in X, g, h \in G$ در شرایط ذیل صدق کند

۱) $e \circ x = x$،

۲) $(g.h) \circ x = g \circ (h \circ x)$.

و این عمل را با نماد $(G|X)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۰.۴ *فرض کنید V و W، FG– مدول باشند. تابع $\Theta : V \to W$ یک FG– هومومرفیسم است اگر Θ یک تبدیل خطی باشد و*

$$(vg)\Theta = (v\Theta)g, \qquad \forall\, v \in V, g \in G$$

تعریف ۰.۵ *فرض کنید که V یک $\mathbb{C}G$– مدول با پایه β باشد. آنگاه سرشت V تابع*

$$\chi : G \to \mathbb{C}$$
$$\chi(g) = tr[g]_\beta = tr(g\rho) \qquad (g \in G)$$

می‌باشد. البته سرشت V به پایه β بستگی ندارد، اگر β و β' دوپایه برای V باشند و T یک ماتریس $n \times n$ معکوس‌پذیر باشد، پس

$$[g]_{\beta'} = T^{-1}[g]_\beta T$$

و از این رو

$$tr[g]_{\beta'} = tr[g]_\beta$$

گزاره ۰.۱ *برای تمامی سرشت‌های χ از G*

۱. *$\mathbb{C}G$– مدول‌های ایزومرف دارای سرشت‌های برابری هستند.*

۲. *اگر x و y عناصر مزدوج از گروه G باشند، پس*

$$\chi(x) = \chi(y)$$

گزاره ۰.۲ *فرض کنید χ سرشتی از $\mathbb{C}G$– مدول V باشد و فرض کنید که $g \in G$ دارای مرتبه m باشد. پس*

۱. *$\chi(1) = dim\ V$؛*

۲. *$\chi(g)$ ریشه‌های mام واحد می‌باشد؛*

۳. $\chi(g^{-1}) = \overline{\chi(g)}$؛

۴. $\chi(g)$ *حقیقی مقدار است اگر* g *و* g^{-1} *مزدوج باشند.*

فرض کنید تمامی جبرها متناهی بعد باشند. مدول مورد نظر ما مدول چپ متناهی بعد است. اگر Y زیرمجموعه جبر J باشد، آنگاه تعریف می‌کنیم:

$$C_J(Y) = \{x \in J : yx = xy \; \forall \; y \in Y\}$$

اگر u عنصری از یک $J-$مدول چپ باشد. آنگاه

$$Ann_J(u) = \{x \in J : xu = 0\}$$

اگر $x_1, ..., x_n$ عناصری از یک فضای برداری باشند، زیرفضای تولید شده توسط $x_1, ..., x_n$ را با $\langle x_1, .., x_n\rangle$ نشان می‌دهیم.

اگر N زیرگروه نرمال از گروه متناهی G باشد، و θ سرشتی از G/N باشد، آنگاه سرشت χ با ضابطه ذیل را ترفیع θ می‌نامیم

$$\forall \; g \in G : \chi(g) = \theta(gN).$$

و در این‌صورت می‌نویسیم:

$$\chi = Infl_N(\theta) \qquad \text{و} \qquad \theta = \tilde{\chi} \qquad \text{یا} \qquad \theta = Defl_N(\chi)$$

فرض کنید χ سرشتی از G باشد. قرار می‌دهیم:

$$Z(\chi) = \{g \in G : |\chi(g)| = \chi(1)\}.$$

وقتی‌که θ سرشت زیر گروه H باشد، آنگاه سرشت القایی G از θ را با θ^G و تحدید χ روی H را با χ_H نشان می‌دهیم.

ضرب داخلیسرشت‌های χ و χ' را به‌صورت

$$\langle \chi', \chi\rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g\in G} \chi'(g)\overline{\chi(g)}$$

تعریف می‌کنیم.

اگر N زیرگروه نرمال G و $\theta \in Irr(N)$، آنگاه قرار می‌دهیم:

$$Irr(G \mid \theta) = \{\chi \in Irr(G) : \langle \chi_N, \theta \rangle > ۰\}$$

اگر χ و ξ سرشت‌های G باشند، آنگاه گوییم ξ موسسی از χ است اگر $\chi - \xi$ یک سرشت باشد و از نماد $\chi \mid \xi$ استفاده می‌کنیم .

فرض کنید J یک جبر پوچ توان روی $\mathbb{F}_q$ باشد، و Z یک ایده‌آل ۱−بعدی از J باشد. قرار می‌دهیم:

$$Irr(۱ + J, Z) = \{\chi \in Irr(۱ + J) : ۱ + Z \nsubseteq ker\chi\}.$$

$\mathbb{F}_q[x]$ نماد جبر چندجمله‌ای‌های یک متغیره روی $\mathbb{F}_q$ می‌باشد و $(f) = f\mathbb{F}_q[x]$ ایده‌آل تولید شده توسط f در $\mathbb{F}_q[x]$ می‌باشد. اگر k, l صحیح باشند، آنگاه قرار می‌دهیم:

$$[k, l] = \{i \in \mathbb{Z} : k \leq i \leq l\}$$

اگر A و B مجموعه‌های متناهی باشند، مجموعه ماتریس‌ها روی $\mathbb{F}_q$ که سطرهایش با عناصر A و ستون‌هایش با عناصر B اندیس‌گذاری شده باشد را با $M_{A,B}(q)$ نشان می‌دهیم. اگر C مجموعه متناهی دیگری باشد، ضرب معمولی زیر را داریم:

$$M_{A,B}(q) \times M_{B,C}(q) \rightarrow M_{A,C}(q).$$

قضیه ۰.۱ *فرض کنید $۱ + J$ یک $\mathbb{F}_q$−گروه جبری باشد. آنگاه درجه هر سرشت تحویل‌ناپذیر مختلط از $۱ + J$ توانی از q است* ([۸])

نماد $N_{n,e}(q)$ برای تعداد سرشت‌های تحویل‌ناپذیر $U_n(q)$ از درجه q^e بکار می‌بریم.
اگر q توانی از ۲ باشد، سرشت‌های $\mathbb{F}_q$− گروه‌های جبری را می‌توان در سه نوع طبقه‌بندی کرد: سرشت‌های که روی $\mathbb{R}$ حقیقی‌پذیرند (سرشت‌های از نوع حقیقی)، سرشت‌های که مقدار حقیقی دارند ولی از نوع حقیقی نیستند و سرشت‌های که از مقدار حقیقی ندارند. ایزاک[۱] و کاراگوزیان[۲] [۱۰] روی سرشت‌های گروهای $U_n(۲)$ مطالعه کردند و نتایج جالب زیر را بدست آوردند.

قضیه ۰.۲ *اگر $n \leq ۱۲$، آنگاه هر نمایش $U_n(۲)$ روی $\mathbb{R}$ از نوع حقیقی است. اگر $n \geq ۱۳$، سرشت تحویل ناپذیری از $U_n(۲)$ وجود دارد که حقیقی مقدار نیست* ([۱۰])

قضیه ۰.۳ *دقیقا یک زوج مزدوج مختلط $\{\chi, \bar{\chi}\}$ از سرشت‌های تحویل‌ناپذیر $U_{۱۳}(۲)$ وجود دارند که مقدار حقیقی ندارند، و $\chi(۱) = ۲^{۱۶}$. دیگر سرشت‌های $U_{۱۳}(۲)$ از نوع حقیقی‌اند.* ([۱۱])

[۱] Isaacs
[۲] Karagueuzian

نماد $Irr(G)$ را برای مجموعه تمامی سرشت‌های تحویل‌ناپذیر مختلط از گروه متناهی G تعریف می‌کنیم.

تعریف ۰.۶ *فرض کنید $J + ۱$ یک گروه جبری باشد. کاراکتر $\chi \in Irr(۱ + J)$ **خوش‌القا** است اگر زیرجبر K از J و سرشت خطی ϕ از $K + ۱$ وجود داشته باشد بطوری‌که $\chi = \phi^{۱+J}$ و $۱ + K^۲ \subseteq ker\ \phi$.*

نکته. بنابر قضیه‌ای از هالاسی[3][۵] هر سرشت تحویل‌ناپذیر از گروه جبری $J + ۱$ از یک سرشت خطی از زیرگروه $K + ۱$ القا می‌شود که در آن K زیرجبری از J می‌باشد.

قضیه ۰.۴ *فرض کنید q توانی از یک عدد اول باشد. اگر $n \leq ۱۲$، آنگاه تمامی سرشت‌های تحویل‌ناپذیر $Irr(U_n(q))$ خوش‌القا هستند.*

قضیه ۰.۵ *اگر q زوج باشد، آنگاه سرشتی از $U_{۲۵}(q)$ وجود دارد که حقیقی مقدار است اما از نوع حقیقی نیست.*

[3] Halasi

فصل ۱

انقباض

فرض کنید J یک جبر تک‌توان با بعد متناهی و $\chi \in Irr(۱ + J)$ باشد. زوج (J, χ)را یک $AC-$زوج می‌نامیم. الگوریتم بیان شده در فصل ۳ به اعمال معینی بستگی دارد که انقباض نامیده می‌شود. انقباض زوج (J, χ) را با زوج دیگری مانند (J', χ') طبق قوانین خاصی جایگزین می‌کند.

تعریف ۱.۱ *دو $AC-$زوج (J, χ) ، $(J'.\chi')$ را یکریخت گویند اگر ایزومرفیسم جبری*

$$f : J \to J'$$

وجود داشته باشد به قسمی که به ازای هر $x \in J$ ،

$$\chi'(۱ + f(x)) = \chi(۱ + x)$$

تعریف ۱.۲ *$AC-$زوج (J, χ) را کوچک می‌نامیم اگر $\dim J \leq ۱$. $\dim J$ ، $\chi(۱)$ را به‌ترتیب بعد و درجه $AC-$زوج (J, χ) می‌خوانیم.*

تعریف ۱.۳ *فرض کنید J یک جبر پوچ توان با بعد متناهی روی $\mathbb{F}_q$ باشد. زوج (Z, Y) از زیر فضاهای ۱-بعدی J را مطلوب می‌نامیم اگر در شرایط ذیل صدق نماید:*

۱. $JZ = ZJ = ۰$ ،

۲. $JY \subseteq Z$ و $YJ \subseteq Z$،

۳. مرکزساز $C := C_J(Y)$ در شرط $YC = CY = ۰$ صدق کند

۴. $C \neq J$ (C در J دارای هم بعد ۱ است)

لم ۱.۱ *فرض کنید J یک جبر تک‌توان روی $\mathbb{F}_q$ و (Z, Y) یک زوج مطلوب از زیرفضاهای ۱-بعدی در J باشد. فرض کنید $C = C_J(Y)$ و $\chi \in Irr(۱ + J, Z)$. آنگاه C یک ایده‌آل از J و $\chi_{۱+C}$ دارای موسس تحویل‌ناپذیر یکتا θ است که $۱ + Y \subseteq ker\theta$. بعلاوه $Stab_{۱+J}(\theta) = ۱ + C$ و $\theta^{۱+J} = \chi$.*

برهان : چون $J^۲Y = YJ^۲ = ۰$، داریم $J^۲ \subseteq C$. از این رو C ایده‌آلی از J است. چون $Z + ۱$ در مرکز $J + ۱$ قرار دارد، لذا $Z \subseteq Z(\chi) + ۱$. بنابراین $\chi_{۱+Z} = m\lambda$ به ازای سرشت خطی غیر بدیهی λ از $Z + ۱$ و صحیح $m > ۰$. فرض کنید μ توسیع λ روی گروه آبلی $Z + Y + ۱$ باشد. ثابت می‌کنیم که $Stab_{۱+J}(\mu) = ۱ + C$. چون $Z + Y + ۱$ زیرگروه مرکزی $C + ۱$ است، بدیهی است که $C + ۱$ پایدارساز μاست. از طرفی دیگر، اگر $x \in J \setminus C$، آنگاه $y \in Y$ وجود دارد که $[y, x] \neq ۰$. لذا $۱ + [y, x] \notin ker$ chi با استفاده از تساوی $J^۲Y = JYJ = YJ^۲$ داریم

$$\mu((۱ + y)^{۱+x}) = \mu(۱ + y + yx - xy) = \mu(۱ + y)\mu(۱ + [y, x]) \neq \mu(۱ + y)$$

بنابراین $۱ + x \notin Stab_{۱+J}(\mu)$.

چون $Z + Y + ۱$ حاصل ضرب مستقیم $Y + ۱$ و $Z + ۱$ است، لذا توسیع یکتای ν از λ روی $Z + Y + ۱$ وجود دارد که $۱ + Y \subseteq ker\ \nu$. فرض کنید η مولد تحویل‌ناپذیر $\chi_{۱+C}$ است. آنگاه $\eta_{۱+Y+Z} = l\kappa$ به ازای توسیع κ از λ و صحیح $l > ۰$. لذا $g \in ۱ + J$ وجود دارد که $\kappa^g = \nu$. سرشت $\theta := \eta^g$ مولدی از $\chi_{۱+C}$ است که $\theta_{۱+Y+Z} = l\mu$ و $۱ + Y \subseteq ker\ \theta$. چون $Stab_{۱+J}(\mu) = ۱ + C$، داریم که $Stab_{۱+J}(\theta) = ۱ + C$. اگر به ازای $h \in ۱ + J$، θ^h مولد تحویل‌ناپذیر دیگری از $\chi_{۱+C}$ باشد که هسته‌اش شامل $Y + ۱$ است آنگاه $\mu^h = \mu$ بنابراین $h \in ۱ + C$ و $\theta^h = \theta$. □

دو نوع انقباض تعریف می‌کنیم که هر $AC-$زوج (J, χ) را با زوجی از بعد کوچک‌تر جایگزین می‌کند.

A. فرض کنید I ایده‌آلی از J باشد که $۱ + I \subseteq ker\chi$. در این‌صورت $(J/I, \tilde{\chi})$ یک انقباض از (J, χ) است (توجه کنید $I + ۱$ زیر گروه نرمال $J + ۱$ است و $(J/I) + ۱$ را می‌توان با $(۱ + J)/(۱ + I)$ یکسان در نظر گرفت).

B. فرض کنید که (Z, Y) یک زوج مطلوب در J باشد و $۱ + Z \nsubseteq ker\chi$. بنابر لم ۱.۱، $\theta \in Irr(C)$ یکتایی وجود دارد به‌طوری‌که $\chi_{۱+C} \mid \theta$ و $۱ + Y \subseteq ker\theta$. لذا تعویض (J, χ) با $(C/Y, \tilde{\theta})$ یک انقباض است.

$AC-$زوج (J', χ') یک منشا از (J, χ) است اگر توسط یک سری انقباض از (J, χ) بدست آید.

تعریف ۱.۴ *(J, χ) را انقباض‌ناپذیر گوییم اگر هیچ منشای از بعد کوچکتر از $dimJ$ وجود نداشته باشد. اگر (J', χ') یک منشا انقباض‌ناپذیر از $AC-$زوج (J, χ) باشد آنگاه (J', χ') هسته (J, χ) نامیده می‌شود.*

نتیجه ۱.۱ *فرض کنید J یک جبر با بعد متناهی تک‌توان روی $\mathbb{F}_q$ و (Z,Y) یک زوج مطلوب در J باشد. فرض کنید $C = C_J(Y)$. آنگاه انقباض‌های نوع B یک دوسویی بین*

$$Irr(1+J,Z) \text{ و } Irr(1+C/Y,(Z+Y)/Y)$$

ایجاد می‌کند. معکوس این نگاشت با ضابطه $\tilde{\theta} \mapsto \theta^{1+J}$ تعریف می‌شود.

قضیه ۱.۱ *هر دو هسته از $AC-$زوج (J,χ) ایزومرفند.*

لم ۱.۲ *فرض کنید R_1 و R_2 انقباض‌های از $AC-$زوج (J,χ) باشند. در این‌صورت R_1 و R_2 منشا مشترک دارند.*

برهان : سه حالت در نظر می‌گیریم:

۱. هر دو انقباض از نوع A باشند
آنگاه $R_1 = (J/I_1, Defl_{1+I_1}(\chi))$ و $R_2 = (J/I_2, Defl_{1+I_2}(\chi))$ که در آن I_1 و I_2 ایده‌آل‌های از J می‌باشند که $1 + I_1 + I_2 \subseteq ker\chi$. بنابراین $(J/(I_1+I_2), Defl_{1+I_1+I_2}(\chi))$ یک منشا مشترک R_1 و R_2 است.

۲. یکی از این دو انقباض از نوع B باشد، فرض کنید انقباض در R_1.
فرض کنید (Z,Y) یک زوج مطلوب و $C = C_J(Y)$. آنگاه
$R_1 = (C/Y, \tilde{\theta})$ برای موسس θ از χ_{1+C}، و $R_2 = (J/I, \tilde{\chi})$ که در آن I ایده‌آلی از J است. چون $[J,Y] \subseteq Z$، داریم $[I,Y] \subseteq I \cap Z$. چون $1 + I \subseteq ker\chi$ و $1 + Z \nsubseteq ker\chi$، داریم $I \cap Z = 0$، بنابراین $[I,Y] = 0$ از این‌رو $I \subseteq C$. چون $1 + I \subseteq ker\chi$ و θ موسسی از χ_{1+C} است، داریم که $1 + I \subseteq ker\theta$. فرض کنید $\phi \in Irr(1 + C/(I+Y))$ تقلیل θ باشد. آنگاه $(C/(I+Y), \phi)$ انقباضی از $(C/Y, \tilde{\theta})$ از نوع A است.
برای کامل کردن اثبات در این حالت، نشان می‌دهیم که $(C/(I+Y), \phi)$ از طریق انقباضی از نوع B در R_2 با بکارگیری زوج مطلوب $((Y+I)/I, (Z+I)/I)$ بدست می‌آید و این واضح خواهد بود اگر نشان دهیم $C' = C$ که در آن

$$C' = \{x \in J : [x,Y] \subseteq I\}.$$

داریم $C \subseteq C'$. چون $dim(J/C) = 1$ نشان می‌دهیم که $C' \neq J$. چون $C \neq J$ ، $x \in J$ و $y \in Y$ وجود دارد که $[x,y] \in Z \setminus \{0\}$. وقتی‌که $Z \cap I = 0$، داریم که $[x,y] \notin I$ ، بنابراین $C' \neq J$ و حکم ثابت می‌شود.

۳. هر دو انقباض از نوع B باشند.

فرض کنید انقباض در R_1 زوج مطلوب (Z_1, Y_1) و انقباض در R_2 زوج مطلوب (Z_2, Y_2) را به کار می‌گیرد. برای $i = 1, 2$، فرض کنید $C_i = C_J(Y_i)$. آنگاه $R_i = (C_i/Y_i, \tilde{\theta_i})$ که در آن θ_i مولد تحویل‌ناپذیر χ_{1+C_i} است.

۳a $Y_1Y_2 = Y_2Y_1 = 0$ و $C_1 = C_2 =: C$.

فرض کنید θ_1 و θ_2 مولدهای از χ_{1+C} باشند، $g \in 1 + J$ وجود دارد که $\theta_2 = \theta_1^g$. چون $1 + Y_1 \subseteq ker\ \theta_1$، داریم $1 + Y_1^g \subseteq ker\ \theta_2$. بعلاوه، $C^g = C$ زیرا C ایده‌آلی از J می‌باشد، بنابراین داریم $CY_1^g = Y_1^gC = 0$. اگر ϕ_2 کاراکتری از $1 + C/(Y_1^g + Y_2)$ باشد که توسط تقلیل روی θ_2 بدست آمده باشد، آنگاه $S_2 = (C/(Y_1^g + Y_2), \phi_2)$ یک انقباض نوع A از R_2 است.
به طور مشابه، $S_1 = (C/(Y_1 + Y_2^{g^{-1}}), \phi_1)$انقباض نوع A از R_1 است، که در آن $\phi_1 = \phi_2^{g^{-1}}$.

۳b $Y_1Y_2 = Y_2Y_1 = 0$ و $C_1 \neq C_2$.

واضح است که $Z_2 \subseteq C_1$ و $Y_2 \subseteq C_1$ ، $Y_1 \subseteq C_2$. ثابت می‌کنیم که

$$((Z_2 + Y_1)/Y_1, (Y_2 + Y_1)/Y_1)$$

یک زوج مطلوب در C_1/Y_1 است. کافی است که نشان دهیم

$$C_1 \cap C_2 = \{x \in C_1 : [x, Y_2] \subseteq Y_1\} \tag{1.1}$$

داریم: $1 + Z_2 \subseteq Z(\chi)$ و $1 + Z_2 \nsubseteq ker\chi$. از این‌رو $1 + Z_2 \subseteq Z(\theta_1)$ و $1 + Z_2 \nsubseteq ker(\theta_1)$.
بنابراین $Z_2 \neq Y_1$ وقتی‌که $[J, Y_2] \subseteq Z_2$ تساوی ۲.۱ را به دنبال دارد. قبلا نشان دادیم که $1 + Z_2 \nsubseteq ker(\tilde{\theta_1})$ بنابراین انقباض نوع B که زوج (Z_2, Y_2) را به کار می‌گیرد در R_1 نیز بکار برده می‌شود. و نتیجه این انقباض $AC-$زوج $S = (C_1 \cap C_2/(Y_1 + Y_2), \tilde{\phi})$ است که در آن $\phi \in Irr(1 + C_1 \cap C_2)$ موسسی از $\chi_{1+C_1\cap C_2}$ و $1 + Y_1 + Y_2 \subseteq ker\phi$ است.
ثابت می‌کنیم که ϕ مولد تحویل‌ناپذیر یکتایی از $\chi_{1+C_1\cap C_2}$ است. فرض کنید ϕ' مولد دیگری باشد. آنگاه یک مولد $\omega \in Irr(1 + C_1)$ از χ_{1+C_1} وجود دارد که $\phi' \mid \omega_{1+C_1\cap C_2}$.
از این‌رو 1_{1+Y_1} مولدی از ω_{1+Y_1} است وقتی‌که $1 + Y_1$ زیر گروه نرمال $1 + C_1$ است در نتیجه

$Y_1 + 1 \subseteq ker\omega$. بنابر لم ۱.۱، $\omega = \theta_1$، و با استفاده دوباره از این لم تساوی $\phi = \phi'$ بدست می‌آید. یکتایی ϕ نشان می‌دهد که S نه تنها انقباضی از R_1 است بلکه روی R_2 نیز چنین است.

۳c $Y_1Y_2 + Y_2Y_1 \neq 0$

بنابر تعریف زوج مطلوب داریم که $Y_1 \subseteq C_2$ و $Y_2 \subseteq C_1$. فرض کنید $D = C_1 \cap C_2$.
آنگاه $DY_1 = Y_1D = 0$ و $C_1 = D \oplus Y_1$ یک فضای برداری است، لذا گروه $C_1 + 1$ به‌صورت ضرب مستقیم $D + 1$ و $Y_1 + 1$ تجزیه می‌شود. از این رو کاراکتر $\phi := (\theta_1)_{1+D}$ تحویل‌ناپذیر است. همومرفیسم جبری $f : D \to C_1/Y_1$ با ضابطه $f(x) = x + Y_1$ تعریف می‌کنیم بنابر فرض $D \cap Y_1 = 0$ لذا f یک به یک است و بنابراین پوشاست. همچنین f همومرفیسم گروهی $f : 1 + D \to 1 + C_1/Y_1$ را القا می‌کند و $\tilde{\theta_1} \circ f = \phi$. بنابراین $S := (D, \phi)$ با R_1 ایزومرف است. به‌طور مشابه، S با R_2 ایزومرف است، لذا R_1 و R_2 ایزومرفند.

□

گزاره ۱.۱ *فرض کنید (K, θ) یک منشا از $AC-$زوج (J, χ) باشد. در این‌صورت θ خوش القا است اگر و فقط اگر χ خوش القا باشد*

برهان: فرض کنید که (K, θ) منشا بدست آمده توسط انقباض A باشد، بنابراین $K = J/I$ به ازای ایده‌آل I و $\bar{\chi} = \theta$. فرض کنید که χ خوش القاست. آنگاه زیرجبر L از J و سرشت خطی ψ از $L + 1$ وجود دارد که $\psi^{1+J} = \chi$ و $L^2 + 1 \subseteq ker\ \psi$. لذا داریم $ker\ \chi \subseteq ker\ \psi \subseteq L + 1$، از این رو $I + 1 \subseteq ker\ \psi$.
بنابراین ψ دارای تقلیل $\tilde{\psi} \in Irr(1 + L/I)$ است که $\tilde{\psi}^{1+J/I} = \theta$. چون $(L/I)^2 + 1 \subseteq ker\ \tilde{\psi}$ آنگاه θ خوش القاست.
فرض کنید انقباض از نوع B باشد. فرض کنید (Z, Y) زوج مطلوب بکار رفته در این انقباض باشد، بنابراین $K = C_J(Y)/Y = C/Y$، و فرض کنید $\xi = Infl_{1+Y}(\theta)$. لذا θ خوش القاست اگر ξ خوش القا باشد. بنابر نتیجه ۱.۱، $\chi = \xi^{1+J}$. آنگاه اگر θ خوش القا باشد χ نیز خوش القاست.
فرض کنید χ خوش القاست. آنگاه زیرجبر L از J و سرشت خطی $\phi \in Irr(1 + L)$ وجود دارد که $\phi^{1+J} = \chi$ و $L^2 + 1 \subseteq ker\ \phi$. فرض کنید که $L \subseteq C$. چون ϕ^{1+J} تحویل‌ناپذیر است، بنابراین داریم $\eta := \phi^{1+C}$. بنابر قضیه کلایفورد[1] $g \in 1 + J$ وجود دارد که $\eta^g = \xi$. لذا ξ خوش القاست.
فرض کنید $L \nsubseteq C$ و $\psi = \phi_{1+L\cap C}$. فرض کنید $\xi_1 = \xi, \xi_2, ..., \xi_q$ مولدهای تحویل‌ناپذیر χ_{1+C} باشند. چون $dim\ (J/C) = 1$، داریم $LC = J$، از این رو $(1 + L)(1 + C) = (1 + J)$. آنگاه بنابر فرمول ماکی[2]

[1] Clifford
[2] Mackey

$$\psi^{1+C} = (\phi^{1+J})_{1+K} = \xi_1 + ... + \xi_q \qquad (۲.۱)$$

اگر $Y \subseteq L$، آنگاه $Y + ۱$ زیرگروه مرکزی $C + ۱$ است، داریم $(\psi^{1+C})_{1+Y} = l\mu$ که در آن μ سرشت خطی از $Y + ۱$ و $l \in \mathbb{N}$. بنابر لم ۱.۱، $\xi_1, ..., \xi_q$ دارای تحدیدهای مجزایی در $Y + ۱$ هستند. بنابراین $Y \cap L = ۰$. فرض کنید $M = (L \cap C) + Y$. چون $CY = YC = ۰$ داریم که $M + ۱$ حاصل ضرب مستقیم $Y + ۱$ و $L \cap C + ۱$ می‌باشد. فرض کنید ω توسیع یکتایی از ψ در $M + ۱$ باشد که $۱ + Y \subseteq ker\ \omega$. آنگاه $\omega^{1+C}(۱) = \psi^{1+C}(۱)/q = \xi(۱)$ و $۱ + Y \subseteq ker\ (\omega^{1+C})$. وقتی‌که ω^{1+C} مولدی از ψ^{1+C} باشد، داریم $\omega^{1+K} = \xi_i$ برای $i \in [۱, q]$ بنابر ۲.۱. بنابر لم ۱.۱، ξ تنها یکی از سرشت‌های $\xi_1, ..., \xi_q$ که هسته‌اش شامل $Y + ۱$ است، از این رو $\xi = \omega^{1+K}$. بعلاوه،

$$۱ + M^۲ \subseteq ۱ + (L \cap C)^۲ \subseteq ker\ \psi \subseteq ker\ \omega$$

از این رو ξ خوش القاست و بنابراین θ نیز خوش القاست. $\square$

گزاره ۱.۲ *فرض کنید (K, θ) منشای از $AC-$زوج (J, χ) باشد و فرض کنید q توانی از ۲ باشد آنگاه*
(i) کاراکتر χ حقیقی مقدار است اگر و فقط اگر θ حقیقی مقدار باشد؛
(ii) کارکتر χ از نوع حقیقی است اگر و فقط اگر θ از نوع حقیقی باشد.

لم ۱.۳ *فرض کنید N یک زیر گروه نرمال از گروه متناهی G و $\mu \in Irr(N)$ باشد. فرض کنید $T = Stab_G(\mu)$ گروه جبری است و $\xi \in Irr(T|\mu)$، فرض کنید $\chi = \xi^G$ تناظر کلایفورد[۳] از ξ باشد.*
(i) اگر ξ حقیقی مقدار باشد آنگاه χ حقیقی مقدار است و اگر ξ از نوع حقیقی باشد آنگاه χ از نوع حقیقی است
(ii) فرض کنید μ حقیقی مقدار است. اگر χ حقیقی مقدار باشد آنگاه ξ حقیقی مقدار است و اگر χ از نوع حقیقی باشد آنگاه ξ از نوع حقیقی است.

برهان : قسمت (i) واضح است. برای (ii)، اول فرض کنید که $\bar{\xi} \neq \xi$. وقتی‌که نگاشت $\phi \mapsto \phi^G$ روی $Irr(T|\mu)$ یک به یک است و $\mu = \bar{\mu}$. آنگاه داریم $\chi = \xi^G \neq \bar{\xi}^G = \bar{\chi}$. فرض کنید χ از نوع حقیقی است. فرض کنید η سرشت یکتایی باشد که $\theta|\eta$. وقتی‌که χ_T از نوع حقیقی است، داریم $\eta|\chi_T$ و چون $\langle \chi_T, \theta \rangle = ۱$، داریم $\langle \eta, \theta \rangle = ۱$. این نتایج، همراه با این حقیقت که θ حقیقی مقدار است، نشان می‌دهد که $\eta = \theta$. $\square$

---
[۳] Clifford

برهان گزاره ۱.۲: فرض کنید (K,θ) منشا به دست آمده توسط انقباض نوع B باشد. و زوج (Z,Y) زوج بکار رفته در این انقباض باشد، از این رو $K = C_J(Y)/Y = C/Y$. فرض کنید $\xi = Infl_{1+Y}(\theta)$، بنابراین $\chi = \xi^{1+J}$ بنابر نتیجه ۱.۱. فرض کنید $\mu \in Irr(1+Y+Z)$ مولد تحویل‌ناپذیر یکتایی از ξ_{1+Y+Z} باشد. چون گروه $1+Y+Z$ آبلی است، لذا μ حقیقی مقدار است. و نتیجه توسط لم ۱.۳ دنبال می‌شود.

قضیه ۱.۲ *فرض کنید q توانی از یک عدد اول باشد. اگر $n \geq 12$ به ازای تمامی $\chi \in Irr(U_n(q))$ هسته کوچک است. آنگاه $q(q-1)^{13}$ سرشت $\chi \in U_n(q)$ وجود دارد که هسته کوچک ندارند. $(T_n(q),\chi)$ چنین سرشت‌های از درجه q^{16} هستند و هسته‌های به شکل (K,ϕ) دارند که K جبر جابه‌جایی ۲- بعدی*

$$xF_q[x]/(x^3)$$

است و $1+K^2 \nsubseteq ker\phi$.