دانشگاه شهید چمران اهواز

دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر

گروه ریاضی

پایان‌نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته

ریاضی محض ، گرایش جبر

عنوان

یک توپولوژی زاریسکی برای مدول‌ها

استاد راهنما

پروفسور امید علی شهنی کرمزاده

استاد مشاور

دکتر مهرداد نامداری

پژوهشگر

مریم زینالی

مهر ماه ۱۳۹۲

نام خانوادگی دانشجو: زینالی نام: مریم

عنوان: یک توپولوژی زاریسکی برای مدول‌ها

استاد راهنما: پروفسور امید علی شهنی کرمزاده
استاد مشاور: دکتر مهرداد نامداری

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد رشته: ریاضی محض گرایش: جبر

دانشگاه: شهید چمران اهواز دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر
تاریخ فارغ‌التحصیلی: مهر ماه ۱۳۹۲ تعداد صفحات: ۱۱۳

واژگان کلیدی: مدول دو طرفه، مدول ضربی، مدول هم‌ضربی، مدول تماماً اول، مدول برتر، حلقه‌ی برتر، توپولوژی زاریسکی

چکیده

$R-$مدول M را دو طرفه می‌نامیم، اگر و تنها اگر هر زیرمدول آن کاملاً پایا باشد. مدول دو طرفه‌ی M روی یک حلقه‌ی شرکت‌پذیر R را در نظر می‌گیریم. در این پایان‌نامه، یک توپولوژی زاریسکی روی فضای زیرمدول‌های سره را که در M تماماً اول هستند، بررسی خواهیم نمود. همچنین در ادامه شرایطی را به دست خواهیم آورد که تحت آن شرایط، فضای مورد نظر نویتری، تحویل‌ناپذیر، فرا همبند، فشرده، همبند، T_1 یا T_2 است. در پایان نیز کاربردهای توپولوژی زاریسکی را روی حلقه‌ها بررسی خواهیم نمود.

اولین دستنج زندگیم تقدیم به

پدر عزیزم، او که نگاهش اعتمادم می‌بخشد

مادر مهربانم، او که هرگز نتوانستم لحظه‌ای از مهرش را جبران کنم

و همسر فداکارم، او که وجودش مایه‌ی آرامش من است.

خدایا...[1]

به من زیستنی عطا کن که در لحظه مرگ، بر بی‌ثمری لحظه‌ای که برای زیستن گذشته است، حسرت نخورم و مُردنی عطا کن که بر بیهودگیش، سوگوار نباشم. بگذار تا آن را، خود انتخاب کنم، اما آن‌چنان که تو دوست می‌داری.

تو می‌دانی و همه می‌دانند که شکنجه دیدن بخاطر تو، زندانی کشیدن بخاطر تو و رنج بردن به پای تو تنها لذت بزرگ زندگی من است، از شادی توست که من در دل می‌خندم، از امید رهایی توست که برق امید در چشمان خسته‌ام می‌درخشد و از خوشبختی توست که هوای پاک سعادت را در ریه‌هایم احساس می‌کنم. نمی‌توانم خوب حرف بزنم. نیروی شگفتی را که در زیر کلمات ساده و جمله‌های ضعیف و افتاده، پنهان کرده‌ام دریاب، دریاب.

تو می‌دانی و همه می‌دانند که زندگی از تحمیل لبخندی بر لبان من، از آوردن برق امیدی در نگاه من، از برانگیختن موج شعفی در دل من، عاجز است.

تو، چگونه زیستن را به من بیاموز، چگونه مردن را خود خواهم آموخت.

به من توفیق تلاش در شکست، صبر در نومیدی، رفتن بی‌همراه، جهاد بی‌سلاح، کار بی‌پاداش، فداکاری در سکوت، دین بی‌دنیا، مذهب بی‌عوام، عظمت بی‌نام، خدمت بی‌نان، ایمان بی‌ریا، خوبی بی‌نمود، گستاخی بی‌خامی، قناعت بی‌غرور، عشق بی‌هوس، تنهایی در انبوه جمعیت و دوست داشتن بی‌آنکه دوست بداند، روزی کن.

اگر تنهاترین تنهاها شوم، باز خدا هست

او جانشین همه نداشتن‌هاست...

[1] مناجاتی از دکتر علی شریعتی.

سپاس‌گزاری...

ثنای بی حد خدایی را که بر من منت نهاد و شوق آموختن را در قلبم جاری ساخت و مرا یاری کرد که با تکیه بر لطف بی‌دریغش قدم در این راه نهاده و در سایه‌ی عنایاتش آن را به پایان برسانم. به حکم این که اگر خلق تشکر نکنیم، شکر خالق را به جای نیاورده‌ایم، بر خود لازم می‌دانم تا از تمام بزرگوارانی که در این راه، راهنمایی‌ام کردند و از محضرشان دانش آموخته‌ام، تشکر و سپاس‌گزاری کنم. سپاس از پدر عزیزم که قلم را در دست‌هایم فشرد و ستون استوار زندگیم است. او که صبور و صمیمی یاریم نمود و بدون حمایت او پیمودن این مسیر ناممکن بود، به پاس زحمات بی‌دریغش و مادرم، او که همچون فرشته‌ای مهربان در سراسر دوران تحصیل کنارم بود و در بذل محبت‌هایش سخاوتمندترین است. فداکاری که همیشه چشم به فردای من دوخته و قلب پر امیدش به آینده‌ی من می‌تپد، به پاس زحمات، ایثار بی‌پایانش و به احترام مقام آسمانی‌اش و همسر مهربانم که در کنار او بودن، آرامش‌بخش وجودم بود و لحظه‌های تنهایی و دل‌تنگی با حضورش رنگ می‌باخت، به پاس فداکاری‌اش و گوهرهای گرانقدر زندگی‌ام، فرزندانم امیر حسین و امیر محمد که وجودشان شادی‌بخش دلم و آینده‌ی روشنشان نهایت آرزوی من است و برادران عزیزم، مهدی و میلاد که آینده‌ی درخشان و مملو از سعادت را برایشان از خداوند منان آرزومندم، به پاس حمایت‌ها و محبت‌هایشان.
با سپاس از استاد راهنمای فرهیخته و فرزانه‌ام، جناب آقای پروفسور کرمزاده که بزرگ‌اندیشی را از ایشان آموختم و افتخار شاگردی ایشان را در دوره‌ی کارشناسی داشتم. از استاد گرانقدر و دلسوزم، جناب آقای دکتر نامداری که من مدیون زحمات بی‌پایان و ارزشمند این بزرگوار هستم، تشکر و قدردانی می‌کنم. استاد فرهیخته‌ای که وقت گرانبهای خود را در اختیار من قرار داده و از هیچ تلاشی برای راهنمایی اینجانب در بررسی و رفع اشکالات پایان‌نامه، جستجوی منابع و در نهایت کمک در به پایان رسانیدن این مجموعه دریغ نکردند، به پاس زحمات فراوانش. همچنین با سپاس از اساتید بزرگوار و عزیزم، خانم دکتر شیر علی و آقایان دکتر فروزانفر، دکتر رضایی و دکتر آذرنگ که من وام‌دار محبت‌های بی‌دریغ و راهنمایی‌های ارزشمند آنان هستم. بزرگانی که دری تازه از دنیای زیبای ریاضیات را به رویم گشودند و نمونه‌هایی از اخلاق و تعهد علمی را برایم ترسیم کردند. از خداوند مهربان آرزوی سلامتی و توفیق روزافزون برای تمامی اساتید بزرگوارم را دارم.

مریم زینالی
مهرماه ۱۳۹۲

فهرست مطالب

پیشگفتار

در این پایان‌نامه که از مرجع [۱] گرفته شده است، یک توپولوژی زاریسکی برای مدول‌ها را بررسی می‌کنیم. لازم به ذکر است که در سرتاسر این پایان‌نامه، فرض می‌شود که تمام حلقه‌ها، شرکت‌پذیر و تمام مدول‌ها به عنوان R−مدول چپ غیر صفر، یکانی می‌باشند.

فرض کنید R یک حلقه‌ی دلخواه باشد. زیرمدول L از R−مدول M را کاملاً پایا می‌گوییم، هرگاه برای هر $f \in End(M)^{op}$ داشته باشیم $f(L) \subseteq L$ یا به طور معادل L یک (R,S)−دو زیرمدول باشد. R−مدول M را دو طرفه می‌نامیم، هرگاه هر R−زیرمدول M کاملاً پایا باشد. برای مشاهده‌ی خصوصیات و ویژگی‌های مدول‌های دو طرفه می‌توان به مرجع [۳۵] رجوع کرد. مثال‌هایی از مدول‌های دو طرفه عبارتند از مدول‌های ضربی و هم‌ضربی که در مراجع [۶]، [۹]، [۳۵]، [۴۵]، [۴۶] و [۵۳] به ذکر مثال‌هایی از آن‌ها پرداخته می‌شود.

R−مدول M را هم اتمی می‌نامیم، هرگاه هر R−زیرمدول سره از M در یک R−زیرمدول ماکسیمال واقع شده باشد و به طور معادل برای هر زیرمدول سره‌ی L از M داشته باشیم $Rad(\frac{M}{L}) \neq \frac{M}{L}$. مثال‌ها و قضایایی از مدول‌های هم اتمی را می‌توان در مراجع [۱۷]، [۳۸] و [۵۵] مشاهده کرد.

R−مدول M را یک $S-PCD$−مدول می‌گوییم، اگر و تنها اگر $_RM$، خود تصویری، هم اتمی و دو طرفه باشد (برای دیدن مطالب بیشتر می‌توان به مراجع [۲۴]، [۴۳] و [۴۵] رجوع کرد). در ادامه‌ی پایان‌نامه در فصل چهارم به زیرمدول‌های تماماً اول از R−مدول M می‌پردازیم. R−مدول چپ M را تماماً اول می‌نامیم، اگر و تنها اگر $_RM$، برای هر زیرمدول کاملاً پایای غیر صفر K از M، K−هم تولید شده باشد (گزاره‌ی ۳.۲.۴)، در واقع تعریف مدول‌های تماماً اول از تعریف مدول‌های اول در مرجع [۱۰] گرفته شده است

که زیرمدول‌های دلخواه با زیرمدول‌های کاملاً پایا جایگزین شده‌اند. برای مشاهده‌ی خصوصیات بیشتر از چنین مدول‌هایی می‌توان به مراجع [۴۷] و [۵۰] رجوع کرد. برای کلیه‌ی مفاهیم مربوط به توپولوژی می‌توان به مرجع [۱۲] رجوع کرد. توپولوژی زاریسکی تعریف شده روی طیف ایدآل‌های اول یک حلقه قبلاً در مراجع [۲۹]، [۴۴] و [۵۶] بررسی شده است. در ادامه در این پایان‌نامه به معرفی توپولوژی زاریسکی روی ($Spec^{fp}(M)$) طیف زیرمدول‌های تماماً اول از مدول دو طرفه‌ی ${}_RM$ می‌پردازیم که در واقع نتایجی از توپولوژی زاریسکی روی طیف ایدآل‌های اول از حلقه‌ی تعویض‌پذیر می‌باشد که در مراجع [۸] و [۱۱] به آن پرداخته شده است. همچنین با معرفی مدول‌های برتر (تماماً اول)؛ یعنی، مدول‌هایی که طیف زیرمدول‌های تماماً اول آن‌ها به یک توپولوژی زاریسکی می‌رسند، به ذکر قضایایی از آن‌ها می‌پردازیم (برای دیدن مطالب مربوط به مدول‌های برتر می‌توان به مراجع [۲۷]، [۲۸]، [۳۱]، [۳۲] و [۵۲] رجوع کرد). همچنین شرایطی را به دست خواهیم آورد که فضای مورد نظر در توپولوژی زاریسکی، نویتری (قضیه‌ی ۱۰.۳.۴)، تحویل‌ناپذیر (نتیجه‌ی ۱۸.۳.۴)، فرا همبند (گزاره‌ی ۲۳.۳.۴)، فشرده (قضیه‌ی ۲۵.۳.۴)، همبند (نتیجه‌ی ۲۷.۳.۴)، T_1 (گزاره‌ی ۳۳.۳.۴) یا T_2 (قضیه‌ی ۳۴.۳.۴) باشد.

این پایان‌نامه در چهار فصل تنظیم شده که در فصل اول به بیان مقدماتی که در سه فصل بعد به آن‌ها نیاز پیدا خواهیم کرد، خواهیم پرداخت.

در فصل دوم به معرفی و بررسی قضایایی از مدول‌های ضربی و مدول‌های هم‌ضربی می‌پردازیم. در فصل سوم به معرفی مدول‌ها و حلقه‌های دو طرفه و مثال‌ها و قضایایی از آن‌ها می‌پردازیم. هدف اصلی ما در این پایان‌نامه که در فصل چهارم به آن خواهیم پرداخت، توپولوژی زاریسکی روی طیف زیرمدول‌های تماماً اول از مدول دو طرفه می‌باشد. در ادامه مدول‌های برتر را معرفی کرده و توپولوژی زاریسکی روی چنین مدول‌هایی را بررسی می‌کنیم. این پایان‌نامه را با کاربردهای توپولوژی زاریسکی روی حلقه‌های برتر خاتمه می‌دهیم. در قسمت آخر فصل چهارم، ویژگی‌های جدیدی از حلقه‌های تعویض‌پذیر نیمه موضعی با بعد صفر و حلقه‌های نیم ساده‌ی تعویض‌پذیر که در واقع خاصیت ماکسیمال کامل دارند را در نتیجه‌ی ۱۱.۴.۴ بررسی می‌کنیم.

فصل ۱
تعاریف و مفاهیم اولیه

مقدمه

در این فصل که شامل دو بخش است، به بیان تعاریف و مقدماتی بر مطالبی که سرتاسر پایان‌نامه ذکر خواهند شد، خواهیم پرداخت. در بخش نخست، تعاریف و قضایای مورد نیاز جبر بیان شده است و در بخش دوم، مفاهیم مورد نیاز توپولوژی ذکر شده است.
بیشتر مطالب مربوط به تعاریف و قضایای جبر در مراجع [۵]، [۱۶] و [۴۰] به راحتی قابل دسترس می‌باشند که بعضی از آن‌ها بدون اثبات بیان شده‌اند. بیشتر مطالب مربوط به توپولوژی را نیز می‌توان در مرجع [۱۲] یافت.

۱.۱ تعاریف و قضایای جبر

در تمام این پایان‌نامه منظور از حلقه‌ی R، حلقه‌ای یکدار است، همواره عضو خنثی جمع را با ۰ و عضو خنثی ضرب را با ۱ نشان می‌دهیم، همواره $0 \neq 1$.

تعریف ۱.۱.۱. هرگاه M و N دو R−مدول باشند، آن‌گاه مجموعه‌ی تمام R−همریختی‌های از M به N را با $Hom_R(M,N)$ نمایش می‌دهیم؛ یعنی، $Hom_R(M,N) = \{f : M \to N \ (R-mod)\}$.

تذکر ۲.۱.۱. *$Hom_R(M,N)$ یک گروه آبلی است و بنابراین $\mathbb{Z}$− مدول است ولی در صورتی که R حلقه‌ای*

تعویض‌پذیر باشد، آن‌گاه $Hom_R(M,N)$ یک $R-$مدول با ضرب زیر است:

$$r\cdot f : M \to N$$

$$(r\cdot f)(m) := rf(m) \text{ و } r\in R \ , \ f\in Hom_R(M,N).$$

تعریف ۳.۱.۱. اگر $M = N$، آن‌گاه $Hom_R(M,N)$ را با $End_R(M)$ نشان داده و آن را مجموعه‌ی تمام $R-$درون‌ریختی‌های از M به M می‌نامیم؛ یعنی، $End_R(M) = \{f : M \to M \ (R-mod)\}$.

تذکر ۴.۱.۱. هرگاه M یک $R-$مدول باشد، *آن‌گاه $S = End_R(M)$ یک حلقه است که ضرب در آن همان ترکیب توابع است؛ یعنی،*

$$\forall\, f,g\in S \ , \ \forall\, m\in M : \ fg(m) = f\circ g(m) = f(g(m)).$$

قضیه ۵.۱.۱. *اگر R یک حلقه و M یک $R-$مدول باشد، آن‌گاه $Hom_R(R,M)\cong M$.*

برهان. کافی است تعریف کنیم

$$\phi : Hom_R(R,M)\to M$$

$$\phi(f) = f(۱)$$

به راحتی می‌توان دید که ϕ یک $\mathbb{Z}-$مدول یکریختی می‌باشد. در صورتی که حلقه‌ی R تعویض‌پذیر باشد، $R-$مدول یکریختی است. $\square$

مثال ۶.۱.۱. $\mathbb{Z}_n \overset{(\mathbb{Z}-mod)}{\cong} Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z},\mathbb{Z}_n)$ و $\mathbb{Q} \overset{(\mathbb{Z}-mod)}{\cong} Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z},\mathbb{Q})$.

قضیه ۷.۱.۱ (فاکتور[۱] (سازنده))**.** *فرض کنید M، M'، N و N'، $R-$مدول‌های چپ و $f : M\to N$ یک $R-$همریختی باشد. در این صورت اگر $g : M\to M'$ یک برور‌یختی باشد که $Kerg\subseteq Kerf$، آن‌گاه یک همریختی منحصر به فردی مانند $h : M'\to N$ وجود دارد که $f = hg$ و دیاگرام زیر را داریم:*

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & M' \arrow[dl, dotted, "h"] \\ N & \end{tikzcd}$$

[۱] The Factor Theorem

برهان. به قضیه‌ی ۳.۶ از مرجع [۵] مراجعه شود. □

تعریف ۸.۱.۱. فرض کنید M یک $R-$مدول باشد، در این صورت پوچساز M را به صورت

$$Ann_R(M) = \{a \in R : \ aM = \{\circ\}\}$$

تعریف می‌کنیم که $aM = \{am : \ m \in M\}$. گاهی اوقات $Ann_R(M)$ را با $ann_R(M)$ نیز نشان می‌دهیم.

تذکر ۹.۱.۱. *به راحتی دیده می‌شود که $Ann_R(M)$ ایدآلی دو طرفه از R است، زیرا* $\circ \in Ann_R(M) \neq \emptyset$ *و برای هر* $x \in R$، *اگر* $aM = \{\circ\}$ *و بنا بر رابطه‌ی* $xM \subseteq M$، *داریم* $axM = \{\circ\}$ *و در نتیجه* $ax \in Ann_R(M)$.

تعریف ۱۰.۱.۱. برای هر $m \in M$، پوچساز m را به صورت $Ann_R(m) = \{a \in R : \ am = \circ\}$ تعریف می‌کنیم. در این صورت $Ann_R(m)$ ایدآل چپی از R است.

تذکر ۱۱.۱.۱. ۱) $Ann_R(M) = \bigcap_{m \in M} Ann_R(m)$؛

۲) $N \leq M \Leftarrow Ann_R(M) \subseteq Ann_R(N)$؛

۳) $M \cong N \Leftarrow Ann_R(M) = Ann_R(N)$.

تعریف ۱۲.۱.۱. $R-$مدول M را وفادار (با ایمان) می‌نامیم، هرگاه $Ann_R(M) = \{\circ\}$.

مثال ۱۳.۱.۱. ۱) اگر D یک حلقه‌ی تقسیم باشد، آن‌گاه هر $D-$مدول ناصفر وفادار است؛

۲) $\mathbb{Z}_۶$۲ به عنوان $\mathbb{Z}-$مدول، وفادار نمی‌باشد، زیرا $۳ \in Ann_{\mathbb{Z}}(۲\mathbb{Z}_۶)$؛

۳) اگر I ایدآل ناصفری از R باشد، آن‌گاه $\frac{R}{I}$ به عنوان $R-$مدول، وفادار نمی‌باشد، زیرا $Ann(\frac{R}{I}) = I$.

تعریف ۱۴.۱.۱. فرض کنید R یک دامنه‌ی صحیح تعویض‌پذیر و M یک $R-$مدول چپ باشد. در این صورت مجموعه‌ی $T(M) = \{x \in M : \ Ann_R(x) \neq \circ\}$ زیرمدولی از M است که زیرمدول تابدار M نامیده می‌شود. اگر $T(M) = M$، M را تابدار و اگر $T(M) = \circ$، M را تابدار آزاد می‌نامیم.

تعریف ۱۵.۱.۱. فرض کنید M یک $R-$مدول و P ایدآلی از حلقه‌ی R باشد. قرار می‌دهیم

$$Tp(M) = \{m \in M : \ \exists p \in P \ , \ (۱ - p)m = \circ\}.$$

$Tp(M)$ زیرمدولی از M است، اگر $Tp(M) = M$، آن‌گاه گوییم M، P–تابی است. به عبارت دیگر برای هر $m \in M$ یک $p \in P$ وجود داشته باشد که $m = pm$.

تذکر ۱.۱.۱۶. *فرض کنید R یک حلقه و P ایدآلی از R باشد. R–مدول M، P–تابی نامیده می‌شود، هرگاه برای هر عنصر m در M یک عدد صحیح مثبت n موجود باشد که $P^n m = 0$.*

تعریف ۱.۱.۱۷. هرگاه R یک حلقه باشد، آن‌گاه حلقه متضاد R را با R^{op} نشان می‌دهیم. در واقع از لحاظ مجموعه‌ای $(R^{op}, +) = (R, +)$، ولی ضرب در R^{op} به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\forall\, a, b \in R^{op}:\ \ a \cdot b = ba$$

تذکر ۱.۱.۱۸. *I ایدآل چپی از R است، اگر و تنها اگر I ایدآل راستی از R^{op} باشد.*

قضیه ۱.۱.۱۹. *هرگاه R یک حلقه باشد، آن‌گاه $End_R(R) \cong R^{op}$.*

برهان. کافی است تعریف کنیم

$$\varphi : End_R(R) \to R^{op}$$

$$\varphi(f) = f(1)$$

به راحتی می‌توان دید که φ یک R–مدول یکریختی است. □

تذکر ۱.۱.۲۰. ۱) *برای هر حلقه R داریم $(R^{op})^{op} = R$؛*

۲) $(\prod R_i)^{op} = \prod R_i^{op}$؛

۳) *R حلقه تقسیم است، اگر و تنها اگر R^{op} حلقه تقسیم باشد.*

تعریف ۱.۱.۲۱. فرض کنید که M یک R–مدول باشد. زیرمجموعه‌های غیر تهی $L \subseteq M$ و $I \subseteq R$ را در نظر می‌گیریم، در این صورت حادی L در M و حادی L در I را به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$(L :_R M) = \{r \in R:\ rM \subseteq L\}$$

$$(L :_M I) = \{m \in M:\ Im \subseteq L\}.$$

تذکر ۲۲.۱.۱. ۱) $(\circ :_R M)=\{r\in R:\ rM=\circ\}=Ann_R(M)$؛

۲) $(L:_R M)=\{r\in R:\ r(L+M)\subseteq L\}=Ann\left(\frac{L+M}{L}\right)$.

تعریف ۲۳.۱.۱. ایدآل چپ I را ماکسیمال می‌نامیم، هرگاه $I\neq R$ و I در بین ایدآل‌های چپ، ماکسیمال باشد.

تعریف ۲۴.۱.۱. ایدآل سره P از حلقه‌ی R را اول می‌نامیم، هرگاه برای هر دو ایدآل I و J از R، از $IJ\subseteq P$، نتیجه شود $I\subseteq P$ یا $J\subseteq P$.

تذکر ۲۵.۱.۱. *حلقه‌ی R را اول می‌نامیم، هرگاه $\circ$ ایدآل اول باشد.*

تذکر ۲۶.۱.۱. ۱) *هر حلقه یکدار دارای ایدآل ماکسیمال است (بنا بر لم زورن).*

۲) *هر ایدآل ماکسیمالی، اول است.*

۳) *اگر I یک ایدآل چپ ماکسیمال R باشد، آن‌گاه $R=<a>+I$، به ازای هر $a\in R\backslash I$.*

قضیه ۲۷.۱.۱. *شرایط زیر برای ایدآل سره P از حلقه‌ی R معادل‌اند:*

۱) *P اول است.؛*

۲) *$\frac{R}{P}$ حلقه اول است؛*

۳) *هرگاه I و J ایدآل‌های چپ (راست) R باشند که $IJ\subseteq P$، آن‌گاه $I\subseteq P$ یا $J\subseteq P$؛*

۴) *برای هر $a,b\in R$، هرگاه $aRb\subseteq P$، آن‌گاه $a\in P$ یا $b\in P$.*

برهان. به گزاره‌ی ۳.۱ از مرجع [۱۶] مراجعه شود. □

نمادگذاری ۲۸.۱.۱. *مجموعه‌ی تمام ایدآل‌های ماکسیمال حلقه‌ی R را با $Max(R)$ و مجموعه‌ی تمام ایدآل‌های اول حلقه‌ی R را با $Spec(R)$ نشان می‌دهیم.*

مثال ۲۹.۱.۱. $Max(\mathbb{Z})=Spec(\mathbb{Z})=\{\circ, p\mathbb{Z}:\ \text{اول است}\ p\}$.

مثال ۳۰.۱.۱. $Max(\mathbb{Z}_n)=Spec(\mathbb{Z}_n)=\{\frac{p\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}:\ p|n\}$.

تعریف ۳۱.۱.۱. فرض کنید I ایدآل حلقه‌ی تعویض‌پذیر R باشد. واریته‌ی I که با نماد $Var(I)$ نشان داده می‌شود به صورت $V(I) = Var(I) = \{P \in Spec(R) :\ P \supseteq I\}$ تعریف می‌شود.

تعریف ۳۲.۱.۱. فرض کنید R حلقه‌ای تعویض‌پذیر و I ایدآل R باشد. در این صورت رادیکال I برابر با مجموعه $\sqrt{I} = \{r \in R :\ r^n \in I$ که nای متعلق به $\mathbb{N}$ وجود داشته باشد$\}$ می‌باشد که ایدآلی از حلقه‌ی R و شامل I است.

لم ۳۳.۱.۱. *اگر I ایدآل حلقه‌ی تعویض‌پذیر R باشد، آن‌گاه* $\sqrt{I} = \bigcap_{P \in Var(I)} P = \bigcap_{\substack{P \in Spec(R) \\ P \supseteq I}} P$.

برهان. به لم ۴۸.۳ از مرجع [۴۰] مراجعه شود. □

تعریف ۳۴.۱.۱. فرض کنید I ایدآل سره‌ی حلقه‌ی تعویض‌پذیر R باشد. ایدآل اول P از حلقه‌ی R را ایدآل اول مینیمال I گوییم، هرگاه $I \subseteq P$ و بین I و P هیچ ایدآل اول دیگری وجود نداشته باشد. مجموعه‌ی ایدآل‌های اول مینیمال I را با $Min(I)$ نمایش می‌دهیم. در حالت خاص $Min(0) = Min(R)$ مجموعه‌ی ایدآل‌های اول مینیمال حلقه‌ی R می‌باشد.

قضیه ۳۵.۱.۱. *هر ایدآل اول، شامل یک ایدآل اول مینیمال است.*

برهان. به گزاره‌ی ۳.۳ از مرجع [۱۶] مراجعه شود. □

نتیجه ۳۶.۱.۱. *فرض کنید I ایدآل سره‌ی حلقه‌ی تعویض‌پذیر R و $Min(I)$ نشان دهنده‌ی مجموعه‌ی ایدآل‌های اول مینیمال I باشد. در این صورت* $\sqrt{I} = \bigcap_{P \in Min(I)} P$.

برهان. با توجه به لم ۳۳.۱.۱ و قضیه‌ی ۳۵.۱.۱، به وضوح برقرار است. □

تعریف ۳۷.۱.۱. می‌گوییم L در M کوچک است، هرگاه برای هر زیرمدول $\widetilde{L} \leq_R M$، داشته باشیم $L + \widetilde{L} \neq M$ و آن را به شکل $L << M$ نمایش می‌دهیم (این تعریف معادل با این است که اگر برای هر زیرمدول $\widetilde{L}$ از M، داشته باشیم $M = L + \widetilde{L}$، آن‌گاه $\widetilde{L} = M$).

مثال ۳۸.۱.۱. $\mathbb{Z}_{\mathbb{Z}}$ در $\mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}$ کوچک است ($\mathbb{Z} << \mathbb{Q}$).

تعریف ۳۹.۱.۱. فرض کنید p عددی اول باشد. $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ زیرگروهی از گروه آبلی $\frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}}$ است که آن را به صورت $\mathbb{Z}_{p^\infty} = \{\frac{a}{p^n} + \mathbb{Z} : \ a \in \mathbb{Z} \ , \ n \in \mathbb{N}\}$ نشان می‌دهیم. هر زیرگروه آن به شکل $G_n =< \frac{1}{p^n} + \mathbb{Z} >$ متناهیاً تولید شده است، در نتیجه زنجیر صعودی زیر از زیرگروه‌های آن را خواهیم داشت:

$$< \overline{\frac{1}{p}} > \subset < \overline{\frac{1}{p^2}} > \subset < \overline{\frac{1}{p^3}} > \subset \ldots$$

مثال ۴۰.۱.۱. هر زیرمدول $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ کوچک است.

تعریف ۴۱.۱.۱. هرگاه M یک $R-$مدول چپ باشد، رادیکال M را با نماد $Rad(M)$ نمایش می‌دهیم و به صورت $Rad(M) = \bigcap_{K \in Max(M)} K$ تعریف می‌کنیم.

قضیه ۴۲.۱.۱. *اگر M یک $R-$مدول چپ باشد، آن‌گاه* $Rad(M) = \cap_{K \in Max(M)} K = \sum_{L << M} L$.

برهان. فرض کنیم $L << M$. اگر K یک زیرمدول ماکسیمال از M باشد و $L \nsubseteq K$، آن‌گاه $K + L = M$. اما چون L در M کوچک است، خواهیم داشت $K = M$ که یک تناقض می‌باشد. پس می‌توان نتیجه گرفت که هر زیرمدول کوچک از M در $Rad(M)$ واقع شده است. برعکس، فرض کنیم $x \in M$. اگر N زیرمدول M باشد که $Rx + N = M$، آن‌گاه یا $N = M$ و یا زیرمدول ماکسیمال K از M وجود دارد که $N \leq K$ و $x \notin K$. اگر $x \in Rad(M)$ این رابطه اتفاق نمی‌افتد. بنابراین $x \in Rad(M)$ نتیجه می‌دهد که $Rx << M$، پس حکم ثابت می‌شود. □

قضیه ۴۳.۱.۱. *اگر هر زیرمدول سره از M در یک زیرمدول ماکسیمال از M قرار داشته باشد، آن‌گاه $Rad(M)$ بزرگترین زیرمدول کوچک منحصر به فرد از M است.*

برهان. فرض کنیم L یک زیرمدول سره از M و K یک زیرمدول ماکسیمال باشد که $L \leq K$، در این صورت بنا بر قضیه‌ی ۴۲.۱.۱، $L + Rad(M) \leq K \neq M$. □

تعریف ۴۴.۱.۱. فرض کنیم $L \leq_R M$. می‌گوییم L در M اساسی یا وسیع است و با نماد $L \leq_e M$ می‌نویسیم، هرگاه $L \cap \widetilde{L} \neq 0$ برای هر $0 \neq \widetilde{L} \leq_R M$.

تذکر ۴۵.۱.۱. ۱) *اگر* $f : A \to B$ *یک تکریختی باشد،* f *را یک تکریختی اساسی می‌نامیم، هرگاه* $f(A) \leq_e B$؛

۲) $N \leq_e M$، *اگر و تنها اگر* $i : N \to M$ *تکریختی اساسی باشد.*

مثال ۴۶.۱.۱. هر $\mathbb{Z}$–زیرمدول از $\mathbb{Z}$ اساسی است.

مثال ۴۷.۱.۱. هر زیرمدول از $\mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}$ اساسی است، زیرا

$$N_۱, N_۲ \leq \mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}\ ,\ \frac{a_۱}{b_۱} \in N_۱\ ,\ \frac{a_۲}{b_۲} \in N_۲ \to a_۱ a_۲ \in N_۱ \cap N_۲\ ,\ N_۱ \cap N_۲ \neq ۰.$$

مثال ۴۸.۱.۱. اگر R یک دامنه‌ی صحیح باشد، آن‌گاه هر ایدآل غیر صفر در R اساسی است.

گزاره ۴۹.۱.۱. *هر ایدآل اول یا اساسی است و یا مینیمال.*

برهان. فرض کنیم P ایدآل اول غیر اساسی باشد، نشان می‌دهیم که اول مینیمال است. از آن‌جایی که P غیر اساسی می‌باشد، بنابراین ایدآل I از R وجود دارد که $I \cap P = (۰)$، در نتیجه $IP = ۰$. حال فرض کنیم Q ایدآل اولی از R باشد که $Q \subseteq P$، پس $IP = (۰) \subseteq Q$ و چون Q اول است، لذا $I \subseteq Q$، بنابراین $I \subseteq P$ که یک تناقض می‌باشد و یا $P \subseteq Q$، درنتیجه $Q = P$. □

لم ۵۰.۱.۱. *اگر* $N \leq M$ *و* B *بزرگترین زیرمدولی از* M *با خاصیت* $B \cap N = ۰$ *باشد، آن‌گاه* $N \oplus B \leq_e M$.

برهان. فرض کنیم $(۰) \neq L \leq M$ که $L \cap (N \oplus B) = (۰)$، در نتیجه $\{L, N, B\}$ یک مجموعه مستقل است، پس $N \cap (L \oplus B) = (۰)$. از طرفی $B \subseteq L \oplus B$ و این یک تناقض است. □

تعریف ۵۱.۱.۱. به زیرمدول B در لم ۵۰.۱.۱، زیرمدول متمم می‌گوییم. همواره متمم یک زیرمدول وجود دارد.

تعریف ۵۲.۱.۱. R–مدول ناصفر M را ساده می‌نامیم، هرگاه $\{۰\}$ و M تنها زیرمدول‌های M باشند، به عبارت دیگر (۰) زیرمدول ماکسیمال M باشد.

مثال ۵۳.۱.۱. $\mathbb{Z}_p$ به عنوان $\mathbb{Z}$–مدول ساده است، اگر و تنها اگر p–عددی اول باشد.

قضیه ۵۴.۱.۱. *هرگاه M یک $R-$مدول و $N \leq M$، آن‌گاه N زیرمدول ماکسیمال M است، اگر و تنها اگر $\frac{M}{N}$ یک $R-$مدول ساده باشد.*

برهان. بنا بر تعریف مدول ساده، بدیهی است. □

مثال ۵۵.۱.۱. هرگاه D حلقه تقسیم باشد، آن‌گاه D به عنوان $D-$مدول چپ ساده است.

لم ۵۶.۱.۱. *هرگاه M یک $R-$مدول دوری باشد، آن‌گاه ایدآل چپ I از R وجود دارد که $M \cong \frac{R}{I}$.*

برهان. از آن‌جایی که M یک $R-$مدول دوری است، بنابراین $m \in M$ وجود دارد که $M = Rm$. همریختی

$$\phi : R \to Rm = M$$

$$\phi(r) = rm$$

را در نظر می‌گیریم. به راحتی دیده می‌شود که ϕ یک $R-$مدول بروریختی می‌باشد. حال بنا بر قضیه‌ی اول یکریختی مدول‌ها داریم $M \cong \frac{R}{Ker\phi}$ و $Ker\phi = I$. □

لم ۵۷.۱.۱. *هرگاه M یک $R-$مدول ساده باشد، آن‌گاه M دوری است.*

برهان. فرض کنیم $0 \neq m \in M$، در این صورت $0 \neq Rm \leq M$ و از آن‌جایی که M ساده است، بنابراین $M = Rm$. □

گزاره ۵۸.۱.۱. *$R-$مدول چپ M ساده است، اگر و تنها اگر $M \cong \frac{R}{I}$ که I ایدآل چپ ماکسیمالی از R است.*

برهان. به گزاره‌ی ۹.۱ از مرجع [۵] مراجعه شود. □

لم ۵۹.۱.۱ (لم شور). *فرض کنیم M یک $R-$مدول ساده باشد، در این صورت حلقه $End_R(M)$ یک حلقه تقسیم است.*

برهان. فرض کنیم $0 \neq f \in E = End_R(M)$، بنابراین $0 \neq f : M \stackrel{(R-mod)}{\longrightarrow} M$. از آن‌جایی که M ساده است، پس f یک به یک و پوشا و در نتیجه دو سویی می‌باشد، لذا $0 \neq f^{-1} \in E$ وجود دارد و از این رو $End_R(M)$ حلقه‌ی تقسیم است. $\square$

قضیه ۶۰.۱.۱. *فرض کنید M و N دو $R-$مدول ساده باشند، در این صورت*
$M \cong N$، اگر و تنها اگر $Hom(M, N) \neq 0$.

برهان. اگر $Hom(M, N) \neq 0$، آن‌گاه $0 \neq f : M \to N$ وجود دارد. حال از آن‌جایی که M و N ساده هستند، پس f دو سویی و در نتیجه $M \cong N$. عکس این قضیه نیز بدیهی می‌باشد. $\square$

مثال ۶۱.۱.۱. $Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Z}_q) \neq 0 \Leftrightarrow p = q$.

تعریف ۶۲.۱.۱. حلقه‌ی R را ساده گوییم، هرگاه تنها ایدآل‌های آن (0) و R باشند.

مثال ۶۳.۱.۱. $\mathbb{Z}$ حلقه‌ای ساده نیست.

مثال ۶۴.۱.۱. هرگاه D حلقه تقسیم باشد، آن‌گاه D ساده است.

مثال ۶۵.۱.۱. هرگاه D حلقه تقسیم باشد، آن‌گاه $M_n(D)$ حلقه‌ای ساده است.

تعریف ۶۶.۱.۱. فرض کنید M یک $R-$مدول باشد. در این صورت M را یک مدول نیم ساده (چپ) می‌نامیم، هرگاه برای هر زیرمدول N از M زیرمدول N' وجود داشته باشد که $M = N \oplus N'$، به عبارت دیگر هر زیرمدول از M جمعوند مستقیم M است.

مثال ۶۷.۱.۱. هر مدول ساده، نیم ساده است.

مثال ۶۸.۱.۱. $\mathbb{Z}$ به عنوان $\mathbb{Z}-$مدول نیم ساده نیست.

مثال ۶۹.۱.۱. $\mathbb{Z}_n$ به عنوان $\mathbb{Z}-$مدول نیم ساده است اگر n خالی از مربع باشد.

گزاره ۷۰.۱.۱. *هرگاه M یک $R-$مدول نیم ساده و $N \leq_R M$، آن‌گاه N و $\frac{M}{N}$ نیم ساده‌اند.*

برهان. بنا بر تعریف مدول نیم ساده و قانون مدولی، حکم ثابت می‌شود. □

تذکر ۷۱.۱.۱. *عکس گزاره ۷۰.۱.۱ در حالت کلی درست نیست، زیرا به عنوان مثال با قرار دادن $R=\mathbb{Z}$ ، $M=\mathbb{Z}_{p^2}$ و $N=p\mathbb{Z}_{p^2}$ ، به وضوح $\frac{M}{N}$ و N از مرتبه‌ی عدد اول p و ساده می‌باشند و در نتیجه نیم ساده‌اند ولی $\mathbb{Z}_{p^2}$ نیم ساده نیست.*

قضیه ۷۲.۱.۱. *هرگاه M یک $R-$مدول نیم ساده باشد، آن‌گاه M دارای زیرمدول ساده است.*

برهان. فرض کنیم $0\neq m\in M$ ، در این صورت $Rm\leq M$. بنا بر گزاره‌ی ۷۰.۱.۱، $R-$مدولی نیم ساده است. از طرفی با توجه به گزاره‌ی ۵۸.۱.۱، $R-$زیرمدول ماکسیمالی مانند K از Rm وجود دارد که $\frac{Rm}{K}$ ، $R-$مدولی ساده و $Rm=K\oplus S$ که S زیرمدولی از Rm می‌باشد، در نتیجه $S\cong\frac{Rm}{K}$ که S زیرمدولی ساده از M است. □

قضیه ۷۳.۱.۱. *هرگاه M یک $R-$مدول باشد، آن‌گاه شرایط زیر هم ارزند:*

۱) $M=\sum_{i\in I}M_i$ *که M_i ها $R-$زیرمدول‌های ساده‌اند؛*

۲) $M=\oplus_{i\in I}M_i$ *که M_i ها $R-$زیرمدول‌های ساده‌اند؛*

۳) M *نیم ساده است.*

برهان. به قضیه‌ی ۹.۶ از مرجع [۵] مراجعه شود. □

مثال ۷۴.۱.۱. هر فضای برداری A روی میدان K، به عنوان $K-$مدول، نیم ساده است، زیرا تمام زیرفضاهای تک بعدی A به عنوان $K-$زیرمدول ساده‌اند.

تعریف ۷۵.۱.۱. حلقه‌ی R را نیم ساده چپ می‌نامیم، هرگاه R به عنوان $R-$مدول چپ، نیم ساده باشد.

مثال ۷۶.۱.۱. $M_n(D)$ که D حلقه تقسیم است یک حلقه نیم ساده چپ است. ایدآل چپ مینیمال آن

عبارت است از

$$I_k = \left\{ \begin{bmatrix} \circ & a_1 & \circ \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \circ & a_n & \circ \end{bmatrix} : \ a_i \in D \right\}$$

که در آن ستون k−ام غیر صفر است.

مثال ۷۷.۱.۱. $\mathbb{Z}$ حلقه نیم ساده نیست.

قضیه ۷۸.۱.۱. *فرض کنیم R یک حلقه باشد، در این صورت روابط زیر معادل‌اند:*

۱) *هر R−مدول راست نیم ساده است؛*

۲) *هر R−مدول چپ نیم ساده است؛*

۳) R_R *نیم ساده است؛*

۴) ${}_RR$ *نیم ساده است؛*

۵) $R = \circ$ *یا* $R \cong M_{n_1}(D_1) \times \ldots \times M_{n_k}(D_k)$ *که* $n_i \in \mathbb{N}$ *و* D_i*ها حلقه‌های تقسیم هستند.*

برهان. به قضیه‌ی ۴.۴ از مرجع [۱۶] مراجعه شود. □

تعریف ۷۹.۱.۱. R−مدول نیم ساده‌ی M را همگن می‌نامیم، هرگاه M مجموع مستقیم از زیرمدول‌های ساده‌ی یکریخت باشد.

تعریف ۸۰.۱.۱. R−مدول M را یکنواخت می‌نامیم، هرگاه هر زیرمدول آن اساسی باشد. به عبارت دیگر هر دو زیرمدول از M اشتراک ناصفر داشته باشند.

مثال ۸۱.۱.۱. $\mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}$، $\mathbb{Z}_{\mathbb{Z}}$ و $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ به عنوان $\mathbb{Z}$−مدول یکنواخت هستند.

مثال ۸۲.۱.۱. اگر R یک دامنه‌ی تعویض‌پذیر و K میدان کسرهای R باشد، آن‌گاه هر R−زیرمدول از K در K اساسی و در نتیجه K، R−مدولی یکنواخت است.

لم ۸۳.۱.۱. *R−مدول M، نیم ساده است، اگر و تنها اگر هیچ زیرمدول اساسی سره نداشته باشد.*