بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه گیلان

دانشکده علوم ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد

(گرایش ریاضی محض)

عنوان :

الصاق های خطی برای دستگاه معادلات دیفرانسیل درجه دوم

از:

صدیقه دار سرائی

استاد راهنما:

دکتر اسماعیل عزیزپور

شهریور ۱۳۹۱

فإذا عزمت فتوكل على الله....

تقدیر و تشکر

از خانواده ی عزیزم که همیشه همراه، مشوق و پشتیبانم بودند،

از زحمات و کمک های بی دریغ استاد راهنمایم، جناب آقای دکتر عزیزپور

و از جناب آقای دکتر پناهی، استاد محترم گروه فیزیک، که از مشاوره و راهنمایی های ایشان بسیار بهره گرفتم، صمیمانه سپاسگزارم.

همچنین از داوران گرامی جناب آقای دکتر میرمحمد رضایی، از دانشگاه صنعتی امیرکبیر و جناب آقای دکتر پناهی، از دانشگاه گیلان، که پایان نامه ام را مورد مطالعه قرار دادند، تشکر و قدردانی می نمایم.

فهرست مطالب

لیست جداول

چکیده:

الصاق های خطی برای دستگاه معادلات دیفرانسیل درجه دوم

صدیقه دارسرائی

در این پایان نامه، ما ساختار یک الصاق خطی را توصیف می کنیم که مربوط به یک میدان معادله ی دیفرانسیل درجه دوم می باشد؛ انحنای آن را محاسبه نموده و راجع به برخی از کاربردها بحث می کنیم .

کلید واژه:
معادله دیفرانسیل معمولی درجه ی دوم، الصاق خطی، کلاف جت مرتبه ی اول، الصاق غیر خطی، انحناء.

Abstract:

Linear connections for system of second-order differential equations

Sedigheh Darsaraee

In this thesis, we describe the construction of a linear connection associated with a second-order differential equation field, calculate its curvature and discuss some applications.

Key words:
Second Order Differential Equation (SODE), Linear connection, First jet bundle, Non-linear connection, Curvature.

پیشگفتار:

دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبه ی دوم به صورت $\ddot{x}^i = f^i(t, x^j, \dot{x}^j)$ ، معمولا در زمینه های مختلفی ظهور پیدا می کند؛ ژئودزیک ها (منحنی های خود موازی) ، حساب تغییرات و مکانیک کلاسیک از جمله موضوعاتی هستند که به آسانی به ذهن خطور می کنند. چنین دستگاهی به عنوان یک نوع میدان برداری خاص (میدان معادله دیفرانسیل درجه دوم) روی منیفلد دیفرانسیل پذیر $R \times TM$ درنظر گرفته می شود؛ که در آن M یک منیفلد از بعد m با مختصات موضعی x^i ، $i = ۱, ۲, ..., m$ ، و TM کلاف مماس می باشد. با استفاده از چنین نمایشی می توان یک دید هندسی از مسائل متعددی که در مطالعه ی دستگاه های معادلات دیفرانسیل معمولی درجه ی دوم کاربرد دارند، به دست آورد. مسائلی که مربوط به شرایط وجود مختصاتی می- شوند که در آن معادلات شکل خاصی به خود می گیرند (سمت راست صفر می شود) یا خطی هستند یا در آن معادلات تجزیه می شوند، مسئله ی معکوس حساب وریته ها، تحلیل تقارن ها و مسائلی که مربوط به رفتار کیفی خانواده ای از جواب ها می شوند، ازجمله ی این کاربردها می باشند.

در این پایان نامه، ساختار یک الصاق خطی، روی یک کلاف برداری خاص توصیف می شود. این ساختار توسط هر میدان معادله دیفرانسیل درجه دوم به دست می آید. این الصاق خطی ابزار بسیار موثری برای بررسی مسائلی است که در بالا توضیح دادیم. به طور خاص صفر شدن انحنای این الصاق شرط لازم وکافی برای وجود مختصاتی است که بر حسب آن منحنی های جواب معادلات، خطوط راست می باشند. بنابراین ساختاری که در اینجا مطرح می شود یک تعمیم از قضیه ی الصاق معمولی برای پوشاندن انواعی از معادلات دیفرانسیل می باشد که کلی تر از معادلاتی هستند که ژئودزیک ها در آن ها صدق می کنند.

در حقیقت، نمایش منیفلد زمینه به صورت $R \times TM$ ، مطابق هدف ما نیست؛ زیرا ما می خواهیم مجاز به استفاده از تبدیلات مختصاتی وابسته به t، که t مختصات استاندارد روی R است، باشیم؛ یعنی تبدیلات مختصاتی روی $R \times M$ به صورت $(t, x^i) \longrightarrow (t, y^i)$، که $y^i = y^i(t, x^j)$، به همراه با تبدیلات مختصاتی القا شده روی $R \times TM$. چنین تبدیلات مختصاتی ای لزوما بر حسب ساختار حاصلضربی نیستند که به طور قطعی تشخیص داده شوند. بنابراین، قضیه برای منیفلد $(m + ۱)$ - بعدی E که یک کلاف تاری روی R با تار استاندارد M می باشد، بسط داده می شود. با این که E بدیهی خواهد شد، اما هیچ یک از بدیهی سازی های آن بر دیگری ترجیح داده نمی شود و مفهوم این را نشان می دهد. همچنین با این روش می توان مطمئن بود که همه ی فرمول

-ها نسبت به تبدیلات مختصاتی وابسته به t ، تانسوری خواهند بود. بنابراین فرض می کنیم که کلاف تاری E با تبدیل تصویری $\pi : E \longrightarrow R$ داده شده باشد و کلاف جت مرتبه اول آن را که با $\pi_{1,0} : J^1\pi \longrightarrow E$ نشان می دهیم، در نظر می گیریم [۸]. تار $J^1\pi$ روی هر نقطه ی $p \in E$ ، یک فضای آفین شکل داده شده [1] روی $V_p\pi$ می باشد؛ $V_p\pi$ زیر فضای T_pE ، شامل بردارهای عمود نسبت به π ، یعنی مماس بر تار E است. با داشتن هر بدیهی سازی $E \equiv R \times TM$ ، $J^1\pi$ را با $R \times TM$ یکی در نظر می گیریم. تابع $\pi_{1,0}$ نیز متناظر با تبدیل تصویری کلاف مماس $\tau_M : TM \longrightarrow M$ درنظر گرفته می شود. یک میدان معادله دیفرانسیل درجه دوم، یک میدان برداری روی $J^1\pi$ می باشد، با این ویژگی که منحنی های انتگرال آن، جت های برش های π می باشند. با استفاده از تابع تصویر $\pi_{1,0} : J^1\pi \longrightarrow E$ ، کلاف مماس $\tau_E : TE \longrightarrow E$ را برای به دست آوردن کلاف برداری $\pi_{1,0}^*(\tau_E)$ ، روی $J^1\pi$ برمی گردانیم. [2]

در اینجا چگونه ساخته شدن یک الصاق خطی روی $\pi_{1,0}^*(\tau_E)$، هرگاه یک میدان معادله دیفرانسیل درجه دوم روی $J^1\pi$ داده شده باشد، نشان داده می شود. ساختار مذکور وابسته به این واقعیت است که یک میدان معادله دیفرانسیل درجه دوم، یک توزیع افقی یا یک الصاق غیرخطی را روی $J^1\pi$ بیان می کند. در واقع ساختار یکسانی برای هر توزیع افقی روی $J^1\pi$ به کار می رود. ولی ما تنها درباره ی حالتی بحث می کنیم که توزیع افقی از یک میدان معادله دیفرانسیل درجه دوم ناشی می شود.

بنابراین داده های ما شامل کلاف $\pi : E \longrightarrow R$ ، یک میدان معادله دیفرانسیل درجه دوم تعریف شده روی $J^1\pi$ و الصاق غیرخطی متناظر روی $J^1\pi$ می باشد؛ با استفاده از این اطلاعات، یک الصاق خطی به صورت عملگر مشتق کوواریانت روی برش های $\pi_{1,0}^*(\tau_E)$ ساخته خواهد شد. برای جلوگیری از اشتباه، اصطلاح الصاق را تنها برای ارجاع به الصاق خطی ای که می سازیم، به کار می بریم و برای ارجاع به الصاق غیرخطی داده شده از توزیع افقی ای که آن را تعریف می کند، استفاده می نماییم.

اساس این پایان نامه، برپایه ی کار های **مارتینز** [3] ، **کارینِنا** [4] و **سارلت** [5] ، روی مشتقات جبر فرم های در امتداد یک نگاشت تصویری می باشد. در ابتدا فعالیت های این نویسندگان روی فرم های در امتداد تبدیل تصویری روی کلاف مماس $\tau_M : TM \longrightarrow M$ متمرکز شده بود، [۱۱] و [۱۲] ؛ اما به تازگی شیوه ی فعالیت آن ها به حالت " وابسته به زمان " گسترش پیدا کرده است؛ یعنی حالتی که، در اینجا درنظر گرفته شده است. [۳۷]

اگرچه تحلیل خواص میدان های معادله دیفرانسیل درجه دوم، یکی از انگیزه های انجام این کار بود، ولی قضیه

[1] Modelled [2] Pull back [3] E. Martinez [4] J. F. Carinena [5] W. Sarlet

-ی بسط داده شده بسیار جامع و گسترده است و به هیچ وجه، همه ی نتایج آن برای درکی سریع از رویکرد هندسی، جهت مطالعه ی معادلات دیفرانسیل درجه دوم، مورد نیاز نمی باشد. وضعیت مشابه با حالتی است که در هندسه ی دیفرانسیل معمولی یافت می شود و برای مطالعه ی ژئودزیک ها مورد نیاز نیست؛ (در آن حالت، قضیه کامل مشتقات فرم های خارجی توسط **فرولیچر** [۱] و **نیجنهویس** [۲] گسترش پیدا کرده است.) در متن حاضر علاوه بر سایر مطالبی که عنوان می شود، یک بیان جدید از نتایج کارهای مارتینز که ارتباط زیادی با مطالعه ی میدان های معادلات دیفرانسیل درجه دوم دارد، نیز ارائه می شود. به عنوان یک نتیجه گیری می توان گفت که این پایان نامه معرفی نسبتا کوتاهی از قضیه ی کلی تری است که توسط این نویسندگان به دست آمده است.

الصاقی که در اینجا تعریف می شود مرتبط با چندین الصاق دیگر است که قبلا در متن های مختلف تعریف شده اند. یک نوع از این الصاق ها، که بسیار نزدیک به این موضوع می باشد، الصاق **بروالد** [۳] هندسه ی فینسلری و تعمیم های آن است که توسط **ای. جی. گریفون** [۴] [۲۱] و **بیجانکو** [۵] [۲] تعریف شده اند. گرچه به نظر نمی رسد افرادی که در زمینه ی هندسه ی فینسلری فعالیت داشته اند از این نوع الصاق برای مطالعه ی خواص هندسی میدان های معادله دیفرانسیل درجه دوم عمومی استفاده کرده باشند، اما با این وجود گریفون نقش مهمی در مطالعه ی یک ساختار افقی که متناظر با یک میدان معادله دیفرانسیل درجه دوم عمومی می باشد ایفا کرده است. به عبارت دیگر از قضیه ی الصاق برای تحلیل ویژگی های یک رده ی خاص از منحنی های جواب معادلات دیفرانسیل درجه دوم، (ژئودزیک های ژئودزیک های فضاهای فینسلری)، استفاده شده است؛ یعنی اکسترمال یک لاگرانژین که به طور مثبت همگن از درجه ی یک برحسب متغیرهای مشتق می باشد. نویسندگانی که در این زمینه کار کرده اند، همچون **اوسلاندر** [۶] [۲۲] و اخیرا **بائو** [۷] و **چرن** [۸] [۶] ، اغلب با توسیع نتایج هندسه ی ریمانی، مانند قضایای **مایرز** [۹] و **سینج** [۱۰] ، به تنظیم کلی تری از هندسه ی فینسلری دست یافته اند. نویسنده ی دیگری که کارهای مهمی در این مورد انجام داده است، **پی. فولون** [۱۱] می باشد.تحقیقات وی تا اندازه ای، بسیار نزدیک به مطالب مورد بحث در این پایان نامه می باشد و با صرف نظر از کاربردهایش برای مطالعه ی اکسترمال لاگرانژین ها [۳۳] و [۳۱] ، قضیه ی او درباره ی معادلات مرتبه دوم عمومی [۳۲] ، شامل اصولی از ایده ی یک الصاق خطی می باشد که در بخش های ۳ − ۱ و ۳ − ۲ به آن پرداخته می شود. در حقیقت تصور او از درون ریختی ژاکوبی و مشتق دینامیکی در زمره ی منابع الهام برای کارهای مارتینز، کارینتا و سارلت قرار می گیرد که در بالا به آن اشاره شد.

[۱]Frolicher [۲]Nijenhuis [۳]Berwald [۴]E.G.Grifone [۵]Bejancu [۶]Auslander [۷]Bao [۸]Chern [۹]Myers [۱۰]Synge [۱۱]P. Foulon

یک رویکرد جایگزین برای ساختار الصاق های خطی متناظر با میدان معادله دیفرانسیل درجه دوم وجود دارد که توسط **ماسا** [۱] و **پاگانی** [۲] در متون فرمول بندی مکانیک کلاسیک [۱۴] و همچنین در تنظیمی کاملا هندسی توسط **بایرنس** [۳] توسعه پیدا کرده است. [۱۶] این نویسندگان یک الصاق خطی معمولی روی $T(J^1\pi)$ ، به جای یک الصاق کلاف برداری روی $\pi_{1,0}^{*}(\tau_E)$ به دست آورده اند. می توان ادعا نمود، رویکردی که در ابتدا از آن صحبت شد، بهتر است، زیرا با این شیوه از دوباره کاری جلوگیری می شود. (در بخش۳ − ۲ نشان می دهیم که چگونه این دو رویکرد با هم مرتبط اند.) از این رو می توانیم مدعی تهیه ی ترکیبی از چندین رویکرد برای مطالعه و استفاده از قضیه ی الصاق و عناوین وابسته در مبحث میدان های معادله دیفرانسیل درجه دوم باشیم. همچنین این کار به چند دلیل، ویژه است: اولا یک تنظیم هندسی مشخص اتخاذ می شود؛ (یعنی درنظر گرفتن کلاف جت مرتبه ی اول از یک منیفلد تاری روی R) که به نظر می رسد مناسب ترین حالت برای مطالعه ی معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم وابسته به زمان باشد. الصاق های بروالـد عمومـی که در [۲] تعریف می شوند، به عنوان الصاق هایی در زیرکلاف عمودی از کلاف مماس یک منیفلد هستند. الصاق های سازگار با ژئودزیک های فینسلری روی کلاف کروی [۲۲] یا روی کلاف مماس تصویری [۶] از یک منیفلد تعریف می شوند. تحقیقات فولون نیز [۳۱] ، [۳۲] و [۳۳] روی صورت گرایی همگن متمرکز است و جوهره ی هندسی فعالیت های وی یک کلاف کروی می باشد. ثانیا با استفاده از شرایط **کزال** [۴] برای مشتق گیری کوواریانت، یک تعریف بدون مختصات از الصاق مذکور ارائه می شود. (سایر نویسندگان از روش های تانسوری [۲] یا فرم های الصاق و معادلات ساختاری [۲۲] و [۶] استفاده می کنند.) ثالثا ویژگی های این الصاق بیشتر از تحقیقات سایر نویسندگان بسط داده می شود و به طور خاص برای انحنای آن اتحاد های بیانچی کاملی بیان می شود؛ و در آخر، با فرض برقرار بودن شرایط اولیه، نشان داده می شود که چگونه انحنای این الصاق خواص ذاتی معادلات دیفرانسیل درجه دوم را ، در جایی که از آن نشئت می گیرد، بیان می کند.

$\star$ لازم به توضیح است که مطالب فصل های ۱ ، ۲ ، ۳ و ۴ بر اساس [۲۸] می باشند.

[۱] Massa [۲] Pagani [۳] Byrnes [۴] Koszul

فصل ۱

تعاریف و مفهوم های اولیه

در این فصل مروری کوتاه بر ساختار منیفلد تاری و کلاف جت مرتبه ی اول خواهیم داشت.
مطالب این فصل منطبق بر [۸] و [۲۸] می باشد.

۱ - ۱ منیفلد تاری

تعریف ۱ - ۱ - ۱. یک منیفلد تاری، سه تایی (E, π, M) است که در آن E و M منیفلد دیفرانسیل پذیر بوده و $\pi : E \to M$ یک تابع سابمرشن پوشا است. E را فضای کل ، π را تابع تصویر و M را فضای پایه می نامیم. برای هر نقطه ی p ، زیر مجموعه ی $\pi^{-1}(p)$ از E ، تار روی p نامیده می شود و معمولا با E_p نمایش داده می شود.

تعریف ۱ - ۱ - ۲. فرض کنیم (E, π, M) یک منیفلد تاری باشد، بطوریکه $dimE = m+n, dimM = m$ و فرض کنیم $y : U \longrightarrow R^{m+n}$ یک دستگاه مختصاتی روی مجموعه باز $U \subset E$ باشد. دستگاه مختصاتی y را یک دستگاه مختصات تطبیقی می نامیم هرگاه به ازای هر $a, b \in U$ و $\pi(a) = \pi(b) = p$ ، داشته باشیم $pr_1(y(a)) = pr_1(y(b))$ ، که در آن $pr_1 : R^{m+n} \longrightarrow R^m$.
معنی این تعریف این است که نقاط روی یک تار $E_p \cap U$ ، در m مولفه ی اول با هم برابرند و تنها تفاوتشان در n مولفه ی باقیمانده است. حال اگر x^i $(1 \leqslant i \leqslant m)$ توابع مختصاتی روی M باشند، در اینصورت توابع مختصاتی روی E را به صورت زیر نشان می دهیم

$$(x^i, u^\alpha) \qquad\qquad 1 \leqslant i \leqslant m, \quad 1 \leqslant \alpha \leqslant n.$$

تعریف ۱ - ۱ - ۳. اگر (E, π, M) یک منیفلد تاری باشد، آنگاه یک بدیهی سازی (کلی) از π ، دوتایی (F, t) است که در آن F یک منیفلد و $t : E \longrightarrow M \times F$ یک دیفئومورفیسم است که در شرط $pr_1 \circ t = \pi$ صدق می کند.
یک منیفلد تاری که حداقل یک بدیهی سازی داشته باشد، بدیهی نامیده می شود.

تعریف ۱ - ۱ - ۴. اگر (E, π, M) یک منیفلد تاری و $p \in M$ ، آنگاه یک بدیهی سازی (موضعی) از π حول نقطه ی p ، سه تایی (W_p, F_p, t_p) است که در آن W_p یک همسایگی حول p ، F_p یک منیفلد و $t_p : \pi^{-1}(W_p) \longrightarrow W_p \times F_p$ یک دیفئومورفیسم است، بطوریکه $pr_1 \circ t_p = \pi \mid_{\pi^{-1}(W_p)}$.
یک منیفلد تاری که حداقل یک بدیهی سازی موضعی حول هر نقطه از فضای پایه اش داشته باشد، موضعا بدیهی نامیده می شود. این منیفلد تاری را یک کلاف می نامیم.

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(W_p) & \xrightarrow{t_p} & W_p \times F_p \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \pi|_{\pi^{-1}(W_p)}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle pr_1} \\ W_p & \xrightarrow[id]{} & W_p \end{array}$$

تعریف ۱-۱-۵. نگاشت $\phi : M \longrightarrow E$ یک برش از π نامیده می شود، اگر $\pi \circ \phi = id_M$. مجموعه ی تمام برش های π را با $\Gamma(\pi)$ نمایش می دهیم.

اگر $\phi \in \Gamma(\pi)$ و (x^i, u^α) یک خانواده از توابع مختصاتی حول $a \in E$ باشند، آنگاه

$$\begin{aligned} x^i(\phi(a)) &= x^i(\pi(\phi(a))) \\ &= x^i(a). \end{aligned}$$

بنابراین m مولفه ی اول $\phi(a)$ ، توسط مولفه های اول a مشخص می شوند و تنها n مولفه ی باقیمانده در توصیف ϕ نقش دارند. در نتیجه برای نمایش ϕ در این سیستم مختصاتی از توابع حقیقی مقدار ϕ^α ، که به صورت زیر تعریف می شوند، استفاده می کنیم

$$\phi^\alpha = u^\alpha \circ \phi.$$

تعریف ۱-۱-۶. اگر (E, π, M) یک منیفلد تاری باشد، آنگاه یک برش موضعی از π ، نگاشت $\phi : M \longrightarrow E$ است که در آن W یک زیر منیفلد باز از M می باشد بطوریکه $\pi \circ \phi = id_W$.

مجموعه ی تمام برش های موضعی از π با دامنه ی W را با $\Gamma_W(\pi)$ نشان می دهیم. همچنین اگر $p \in M$، در اینصورت مجموعه ی تمام برشهای موضعی از π که دامنه ی آنها شامل p باشد را با $\Gamma_p(\pi)$ نشان می دهیم.

تعریف ۱-۱-۷. اگر (E, π, M) و (H, ρ, N) دو کلاف باشند، آنگاه یک هم ریختی کلافی از π به ρ دوتایی $(f, \bar{f})$ است که در آن $f : E \longrightarrow H$ و $\bar{f} : M \longrightarrow N$ و $\rho \circ f = \bar{f} \circ \pi$. نگاشت $\bar{f}$ را تصویر f می نامیم.

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f} & H \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \pi} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \rho} \\ M & \xrightarrow[\bar{f}]{} & N \end{array}$$

تعریف ۱-۱-۸. اگر $W \subset M$ یک زیر منیفلد باز باشد و اگر $f : \pi^{-1}(W) \longrightarrow H$ و $\bar{f} : W \longrightarrow N$ در اینصورت دوتایی$(f, \bar{f})$ یک هم ریختی از π به ρ نامیده می شود، هرگاه $\rho \circ f = \bar{f} \circ \pi \mid_{\pi^{-1}(W)}$.

تعریف ۱-۱-۹. اگر (E, π, M) و (H, ρ, M) دو کلاف روی فضای پایه ی یکسان M باشند، آنگاه کلاف حاصلضرب تاری ، سه تایی $(E \times_M H, \pi \times_M \rho, M)$ است که در آن فضای کل $E \times_M H$ برابر با

$\{(a,b)\in E\times H : \pi(a)=\rho(b)\}$ و تابع تصویر $\pi\times_M \rho$ بصورت $(\pi\times_M \rho)(a,b)=\pi(a)=\rho(b)$ تعریف می شود.

$$\begin{tikzcd} E\times_M H \arrow[r, "\pi^*(\rho)"] \arrow[d, "\rho^*(\pi)"'] & E \arrow[d, "\pi"] \\ H \arrow[r, "\rho"'] & M \end{tikzcd}$$

تعریف ۱-۱-۱۰. اگر (E,π,M) یک کلاف و $\rho : H \longrightarrow M$ یک تابع مشتق پذیر باشد، آنگاه پس - کشنده ی π توسط ρ، کلاف $(\rho^*(E),\rho^*(\pi),H)$ است که در آن $\rho^*(E)$ به صورت زیر تعریف می شود

$$\rho^*(E)=\{(a,b)\in E\times H : \pi(a)=\pi(b)\}.$$

همچنین تابع تصویر $\rho^*(\pi)$ را تعریف می کنیم

$$(\rho^*(\pi))(a,b)=b.$$

تعریف ۱-۱-۱۱. اگر (E,π,M) یک کلاف باشد، آن گاه کلاف عمودی از π، زیرکلاف برداری $(V\pi,\tau_E,E)$ از کلاف مماس τ_E است که فضای پایه ی $V\pi$ در آن به صورت زیر تعریف می شود

$$V\pi=\{\xi\in TE : \pi_*(\xi)=\circ\in T_{\tau_M(\pi_*(\xi))}M\}$$

معمولا تار $V\pi$ را در نقطه ی $a\in E$ با نماد $V_a\pi$ نشان می دهیم.

تعریف ۱-۱-۱۲. اگر V یک فضای برداری، A یک مجموعه و $\alpha : A\times V \longrightarrow A$ یک تابع باشد، در این صورت سه تایی (A,V,α) را یک فضای آفین می نامیم، اگر

الف) برای هر $x\in A$، $\alpha(x,\circ)=x$

ب) برای هر $x\in A$ و هر $v,w\in V$، $\alpha(\alpha(x,v),w)=\alpha(x,v+w)$

ج) اگر $x,y\in A$ آن گاه $v\in V$ ی یکتایی وجود داشته باشد که $\alpha(x,v)=y$.

۱-۲ کلاف جت

در هندسه ی دیفرانسیل اساسی، بردار مماس بر یک منیفلد را می توان به صورت کلاس هم ارزی منحنی هایی که از یک نقطه ی مفروض عبور می کنند، بیان نمود. در این حالت گفته می شود دو منحنی هم ارز هستند، اگر در آن نقطه مشتق یکسانی داشته باشند. یک جت مرتبه اول تعمیم این ایده به حالتی است که در آن خانواده -ای از منیفلد های با ابعاد بالاتر، که از یک نقطه می گذرند، در نظر گرفته می شود؛ به طوری که نگاشت های ایمبدینگ در آن نقطه، مشتقات اول برابر داشته باشند.

در این پایان نامه ما قصد داریم تعریفی کلی از جت مرتبه ی اول ارائه دهیم؛ مجموعه چنین جت هایی یک منیفلد دیفرانسیل پذیر خواهد بود. [۸]

تعریف ۱-۲-۱. فرض کنید (E,π,M) یک کلاف باشد و $p\in M$. برش های موضعی $\phi,\psi\in\Gamma_p(\pi)$ در p ، ۱ -هم ارز نامیده می شوند، اگر $\phi(p)=\psi(p)$ و همچنین در یک سیستم مختصاتی تطبیقی (x^i,u^α) حول $\phi(p)$ داشته باشیم

$$\frac{\partial\phi^\alpha}{\partial x^i}\mid_p=\frac{\partial\psi^\alpha}{\partial x^i}\mid_p$$

برای $1\leq i\leq m, 1\leq\alpha\leq n$. به کلاس هم ارزی شامل ϕ، ۱- جت از ϕ درم p گوییم و با $j^1_p\phi$ نشان می -دهیم.

تعریف ۱-۲-۲. اولین جت منیفلد از π، مجموعه ی

$$\{j^1_p\phi : p\in M,\phi\in\Gamma_p(\pi)\}$$

است که با $J^1\pi$ نشان داده می شود. توابع π_1 و $\pi_{1,0}$ به ترتیب تصویرگر های مبداو مقصد نامیده می شوند و به صورت زیر تعریف می شوند

$$\pi_1 : J^1\pi\longrightarrow M$$

$$j^1_p\phi\mapsto p.$$

و

$$\pi_{1,0} : J^1\pi\longrightarrow E$$

$$j^1_p\phi\mapsto\phi(p).$$

تعریف ۱-۲-۳. فرض کنید (E,π,M) یک کلاف و (U,u) نیز دستگاه مختصات تطبیقی روی E باشد، که در آن $u=(x^i,u^\alpha)$. سیستم مختصات القایی (U^1,u^1) روی $J^1\pi$ به صورت زیر تعریف می شود

$$U^1=\{j^1_p\phi : \phi(p)\in U\}$$

$$u^1=(x^i,u^\alpha,u^\alpha_i)$$

که در آن $x^i(j^1_p\phi)=x^i(p)$ و $u^\alpha(j^1_p\phi)=u^\alpha(\phi(p))$ و mn تابع جدید $u^\alpha_i : U^1\longrightarrow R$ ، به عنوان مولفه -های مشتق، به صورت زیر تعریف می شوند

$$u^\alpha_i(j^1_p\phi)=\frac{\partial\phi^\alpha}{\partial x^i}\mid_p .$$

تعریف ۱-۲-۴. فرض کنید (E,π,M) یک کلاف و $W\subset M$ یک زیرمنیفلد باز باشد و $\phi\in\Gamma_W(\pi)$. آنگاه اولین امتداد از ϕ یک برش $j^1\phi\in\Gamma_W(\pi_1)$ است که به ازای هر $p\in W$ به صورت زیر تعریف می -شود

$$j^1\phi(p)=j^1_p\phi,$$

برای تشخیص نمایش مختصاتی $j^1\phi$ باید ترکیب آن را با توابع مختصاتی تاری u^α, u_i^α بررسی کنیم. دراینصورت خواهیم داشت

$$\begin{aligned} u^\alpha(j^1\phi(p)) &= u^\alpha(j_p^1\phi) \\ &= u^\alpha(\phi(p)) \\ &= \phi^\alpha(p), \end{aligned}$$

بنابراین $u^\alpha \circ j^1\phi = \phi^\alpha$ و نیز

$$\begin{aligned} u_i^\alpha(j^1\phi(p)) &= u_i^\alpha(j_p^1\phi) \\ &= \frac{\partial\phi^\alpha}{\partial x^i}\mid_p, \end{aligned}$$

یعنی $u_i^\alpha \circ j^1\phi = \frac{\partial\phi^\alpha}{\partial x^i}$. از این رو نمایش مختصاتی $j^1\phi$ به صورت $(\phi^\alpha, \frac{\partial\phi^\alpha}{\partial x^i})$ می باشد.

تعریف ۱-۲-۵. فرض کنید (E,π,M) یک کلاف و $p \in M$ و $\phi \in \Gamma_p(\pi)$ و $\iota \in T_p(M)$. یک ارتقای هولونومیک از ι ، توسط ϕ ، به صورت زیر تعریف می شود

$$(\phi_*(\iota), j_p^1\phi) \in \pi_1^{0*}(TE).$$

تعریف ۱-۲-۶. اگر $X = X^i\frac{\partial}{\partial x^i} + X^\alpha\frac{\partial}{\partial u^\alpha}$ ، یک میدان برداری روی E باشد، یعنی $X \in \chi(E)$ ، در اینصورت امتداد X ، یک میدان برداری $X^1 \in \chi(J^1\pi)$ است که نمایش موضعی آن به صورت زیر می باشد

$$X^1 = X^i\frac{\partial}{\partial x^i} + X^\alpha\frac{\partial}{\partial u^\alpha} + (\frac{dX^\alpha}{dx^i} - u_j^\alpha\frac{dX^j}{dx^i})\frac{\partial}{\partial u_i^\alpha}.$$

۱-۳ تجزیه ی $\pi_1^{0*}(\tau_E)$

در این بخش با فرض داشتن کلاف تاری (E,π,M)، M را منیفلدی m -بعدی (نه لزوما ۱- بعدی) و مختصات تطبیقی روی E را (x^i, u^α) و بنابراین $(x^i, u^\alpha, u_i^\alpha)$ را مختصات موضعی روی $J^1\pi$ در نظر می-گیریم.

قضیه ۱-۳-۱. **[۸] فرض کنیم (E,π,M) یک کلاف باشد و $j_p^1\phi \in J^1\pi$. در اینصورت یک تجزیه ی متعارف از فضای برداری $\pi_1^{0*}(TE)_{j_p^1\phi}$ وجود دارد، که به شکل جمع مستقیم زیر نوشته می شود**

$$\pi_1^{0*}(TE)_{j_p^1\phi} = \pi_1^{0*}(V\pi)_{j_p^1\phi} \oplus \phi_*(T_p(M))$$

توضیح اینکه $\phi_*(T_p(M))$ یا همان $hol\pi_1^0$ یک خانواده از ارتقاهای هولونومیک از بردارهای مماس در $T_p(M)$ ، توسط ϕ است.

برهان. روشن است که $\phi_*(T_p(M))$ و $\pi_1^{0*}(V\pi)_{j_p^1\phi}$ خوش تعریف هستند.⋆

قضیه را اثبات شده در نظر می گیریم و فرض می کنیم $(\xi, j_p^1\phi) \in \pi_1^{0*}(TE)_{j_p^1\phi}$ که در آن $\xi \in T_{\phi(p)}E$.

پس⋆⋆ $\quad (\phi_*(\pi_*(\xi)), j_p^1\phi) \in \phi_*(T_pM)$

حال با توجه به تعریف کلاف پس کشنده که در بخش ۱ − ۱ ، تعریف ۱-۱-۱۰ ارائه شده است، ادعا می کنیم برداری مانند $v_\xi \in V\pi$ وجود دارد که برای آن

$$(v_\xi, j_p^1\phi) \in \pi_1^{0*}(V\pi)_{j_p^1\phi},$$

و درنتیجه $(\xi, j_p^1\phi) = (\phi_*(\pi_*(\xi)), j_p^1\phi) + (v_\xi, j_p^1\phi)$.

به عبارت دیگر ادعا می کنیم که $v_\xi = \xi - \phi_*(\pi_*(\xi))$. شرط اینکه $(v_\xi, j_p^1\phi) \in \pi_1^{0*}(V\pi)_{j_p^1\phi}$ عبارتست از

$$\pi_*(v_\xi) = 0$$

ولی

$$\pi_*(\xi) - \pi_*(\phi_*(\pi_*(\xi)) = \pi_*(\xi) - id_{T_pM}(\pi_*(\xi)) = 0.$$

همچنین اگر داشته باشیم

$$(\xi, j_p^1\phi) \in \pi_1^{0*}(V\pi)_{j_p^1\phi} \cap \phi_*(T_p(M)) \qquad (۱-۱)$$

که در آن $\xi \in T_{\phi(p)}E$ ، ادعا می کنیم $\xi = 0$.

چون $(\xi, j_p^1\phi) \in \pi_1^{0*}(V\pi)_{j_p^1\phi}$ ، بنابراین

$$\pi_*(\xi) = 0, \qquad (۱-۲)$$

همچنین $(\xi, j_p^1\phi) \in \phi_*(T_p(M))$ ، پس برای یک $\iota \in T_pM$ داریم

$$(\xi, j_p^1\phi) = (\phi_*(\iota), j_p^1\phi) \in \pi_1^{0*}(TE),$$

در نتیجه

$$\xi = \phi_*(\iota), \qquad (۱-۳)$$

حال با توجه به روابط ۱-۲ و ۱-۳ داریم

$$0 = \pi_*(\xi) = \pi_*(\phi_*(\iota)),$$

اما $\pi_*(\phi_*(\iota)) = id_{T_pM}(\iota) = \iota$ ، پس $\iota = 0$ و چون ϕ_* تبدیل خطی است، پس $(\phi_*(\iota)) = (\phi_*(0)) = 0$ و بنابراین $\xi = 0$.