

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



دانشکده مهندسی مکانیک

شبیه سازی مستقیم عددی جریان گردابه ای به روش تفاضل محدود فشرده تطبیقی

دانشجو: بابک حقیقی

استاد راهنما:

دکتر محمد جواد مغربی

پایان نامه ارشد جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

اردیبهشت ۸۹

دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده :

گروه :

پایان نامه کارشناسی ارشد (رساله دکتری) آقای / خانم

تحت عنوان:

در تاریخ توسط کمیته تخصصی زیر جهت اخذ مدرک کارشناسی ارشد
(مورد ارزیابی و با درجه مورد پذیرش قرار گرفت.

امضاء	اساتید مشاور	امضاء	اساتید راهنما
	نام و نام خانوادگی :		نام و نام خانوادگی :
	نام و نام خانوادگی :		نام و نام خانوادگی :

امضاء	نمایندة تحصیلات تکمیلی	امضاء	اساتید داور
	نام و نام خانوادگی :		نام و نام خانوادگی :
			نام و نام خانوادگی :
			نام و نام خانوادگی :
			نام و نام خانوادگی :

دانشجو تأیید می نماید که مطالب مندرج در این پایان نامه (رساله) نتیجه تحقیقات خودش می باشد و در صورت استفاده از نتایج دیگران مرجع آن را ذکر نموده است.

کلیه حقوق مادی مترتب از نتایج مطالعات ، آزمایشات و نو آوری ناشی از تحقیق موضوع این پایان نامه (رساله) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد .

ماه و سال

نردبان این جهان ما تهی است

عاقبت این نردبان افتادنی است

لاجرم هرکس که بالاتر نشست

استخوانش سخت تر خواهد شکست

تقدیم به

پدر و مادر عزیزم

که در تمام لحظات زندگی حامی و راهنمای من بودند.

تقدیر و تشکر

خدای یکتا را سپاسگزارم که در دو سال اخیر، فرصت شاگردی در کلاس علم و ادب استادان فرهیخته ای را داشته ام. به ویژه از استاد بزرگوارم جناب آقای دکتر مغربی تشکر می کنم که در جوار ایشان نه تنها علم بلکه اخلاق نیز آموختم. بی شک بدون وجود کمک و راهنمایی استاد بزرگوارم جناب آقای دکتر مغربی، که در تمامی مراحل پایان نامه حامی و راهنمای صبور من بودند، اتمام پروژه از محالات بود. همچنین در این قسمت لازم می دانم از راهنمایی های مهندس حمید رضا سنندجی، مهندس احد زرغامی، و به ویژه از هم فکری دوست عزیزم مهندس امیر محمدی ویسرودی قدردانی نمایم. در طول انجام پروژه مشکلاتی بوجود می آید که توسط مجموعه ای از انسانها برطرف می شود، لذا از خداوند متعال برای کلیه کسانی که مرا در انجام این پروژه یاری نمودند، موفقیت و سربلندی همراه با آرامش در تمام مراحل زندگی خواستارم.

بابک حقیقی

b.haghighi@mech.tus.ac.ir

اردیبهشت ماه ۱۳۸۹

چکیده

با پیشرفت علم کامپیوتر و بوجود آمدن کامپیوترهایی با سرعت بالا استفاده از حل‌های عددی در مسائل مختلف علوم از جمله مهندسی فراگیر شده است. حل‌های عددی نه تنها هزینه روش‌های آزمایشگاهی و تجربی را ندارند، بلکه در مدت زمان کمتری نیز می‌توانند نتایج مفید با جزئیات زیادی را بدست آورند. مزیت شبیه سازی عددی مستقیم نسبت به سایر روش‌های عددی این است که نیاز به مدل خاصی برای مدلسازی توربولانس ندارد ولی یکی از معایب آن این است که حجم محاسبات بالا بوده و در نتیجه حل با استفاده از این روش زمان‌بر خواهد بود. جریانهای برشی حالت‌هایی از جریان هستند که استفاده صنعتی زیادی دارند و همچنین در مدلسازی مسائل پیچیده نیز به کار می‌روند؛ لیکن حل دقیق این جریانها می‌تواند در موارد فوق مشکل گشا باشد. در این تحقیق فرم چرخشی معادلات ناویر-استوکس برای جریانهای برشی با استفاده از روش‌های عددی و تفاضلات محدود فشرده¹ در جهت اصلی جریان (X) و تفاضلات فشرده تطبیقی در جهت عمود بر جریان Y حل شده‌اند. دامنه حل مسئله در جهت جریان دارای طول محدود و در جهت عمود بر جریان به سمت $\pm\infty$ میل می‌نماید. از نگاشت² یک به یک کتانژانت $y = -\beta \cot(\pi\xi)$ برای مرتبط نمودن شبکه فیزیکی (Y) با شبکه محاسباتی (ξ) به طول واحد استفاده شده است. در مرز ورودی شرط مرزی دیریشله برای سرعت و در مرز خروجی این شرط با استفاده از مدل انتقالی تولید و اعمال شده است. در این مرزها علاوه بر شرط فوق، شرط نیومن که از معادله پیوستگی بوجود می‌آید بر روی $\frac{\partial u}{\partial x}$ اعمال شده است. محاسبات در دامنه زمان با استفاده از روش فشرده رانجه کوتای مرتبه سوم انجام شده است. ضمناً تحلیل جوابها در دستگاه مختصات خودمشابه، خود تشابهی ترمهای سرعت و گردابه را بخوبی نمایان می‌نماید.

کلمات کلیدی: روش مستقیم عددی، جریان برشی، روش تفاضلات محدود فشرده، تفاضلات محدود فشرده

تطبیقی، خود تشابهی

¹ Compact finite difference

² Mapping

فهرست مطالب

صفحه	موضوع
و	تقدیر و تشکر
ح	چکیده
۱	فصل اول _ جریانهای برشی آزاد و مروری بر تحقیقات انجام شده
۲	۱-۱ مقدمه
۲	۲-۱ جریانهای برشی آزاد
۴	۳-۱ تحقیقات انجام شده در زمینه جریانهای گردابه ای
۱۰	فصل دوم _ بررسی معادلات حاکم بر جریان و فرمول بندی ریاضی مسئله
۱۱	۱-۲ مقدمه
۱۲	۲-۲ معادله حاکم بر جریان
۱۵	۳-۲ شرایط مرزی جریان
۱۶	۴-۲ شرایط اولیه
۱۸	فصل سوم _ روش تفاضلات محدود فشرده و نحوه بدست آوردن مشتقات
۱۹	۱-۳ مقدمه
۲۰	۲-۳-۱ محاسبه مشتقات به روش تفاضلات محدود فشرده
۲۴	۳-۲-۲ ارزیابی مشتقات در جهت جریان
۲۶	۳-۳-۱ تحلیل نگاشت اعمال شده برای محدود کردن دامنه در راستای عمود بر جریان
۲۸	۳-۳-۲ ارزیابی مشتقات در جهت عمود بر جریان
۳۰	۳-۴-۱ الگوی پیشرفت زمانی معادلات
۳۳	فصل چهارم _ الگوریتم حل و بررسی صحت جواب
۳۴	۱-۴ مقدمه
۳۵	۲-۴ چگونگی روش حل
۳۸	۳-۴-۱ ارزیابی صحت کد و شبیه سازی عددی
۳۹	۳-۴-۲ گردابه استوارت
۴۱	۳-۴-۳ معادله نفوذ وابسته به زمان
۴۴	فصل پنجم _ بررسی نتایج بدست آمده از تحلیل جریان گردابه ای دو بعدی
۴۵	۱-۵ مقدمه
۴۶	۲-۵ جریان گردابه ای آرام دو بعدی
۵۵	۳-۵ جریان گردابه ای اغتشاشی دو بعدی
۶۶	۴-۵ نتیجه گیری
۶۷	۵-۵ پیشنهادات برای تحقیقات آینده
۶۸	ضمیمه
۸۸	مراجع

فهرست اشکال:

موضوع	صفحه
شکل ۱-۱: نمایی از جریان جت، لایهٔ اختلاطی و گردابه و نوع پروفیل سرعت در آنها	۳
شکل ۲-۱: جریان دنباله پشت صفحهٔ تخت	۵
شکل ۱-۲: نمای شماتیک پروفیل سرعت اولیه جریان گردابه ای	۱۶
شکل ۱-۳: مقایسه مشتق مرتبه اول تحلیلی و عددی تابع $f(x) = x^3 \cos x + 2x \sin(4x)$	۲۵
شکل ۲-۳: مقایسه مشتق مرتبه دوم تحلیلی و عددی تابع $f(x) = x^3 \cos x + 2x \sin(4x)$	۲۵
شکل ۳-۳: مقایسه مشتق اول همراه با نگاشت کتانژانتی اعمال شده بر تابع $f(y) = \exp(-y^2)$	۲۸
شکل ۴-۳: مقایسه مشتق دوم همراه با نگاشت کتانژانتی اعمال شده بر تابع $f(y) = \exp(-y^2)$	۲۹
شکل ۵-۳: مرتبه خطای رانج کوتای مرتبه سوم فشرده برای معادله (۲۱-۳)	۳۲
شکل ۱-۴: ماکزیمم خطا بر حسب زمان برای گردابه استوارت	۴۰
شکل ۲-۴: جواب دقیق گردابه استوارت و مقایسه با نتیجه حاصل از شبیه سازی عددی مستقیم	۴۱
شکل ۳-۴: ماکزیمم خطا در u برای حل دو بعدی معادله نفوذ به صورت تابعی از زمان	۴۲
شکل ۴-۴: ماکزیمم خطا در u برای حل دو بعدی معادله نفوذ به صورت تابعی از تعداد گره در جهت x	۴۲
شکل ۵-۴: ماکزیمم خطا در u برای حل دو بعدی معادله نفوذ به صورت تابعی از تعداد گره در جهت y	۴۳
شکل ۱-۵: گذر زمانی u در ۵ فاصله مساوی در طول L_x برای شبیه سازی جریان گردابه ای دوبعدی بدون اغتشاش ورودی	۴۷
شکل ۲-۵: گذر زمانی v در ۵ فاصله مساوی در طول L_x برای شبیه سازی جریان گردابه ای دوبعدی بدون اغتشاش ورودی	۴۸
شکل ۳-۵: چگونگی توسعه یافتن پروفیل سرعت جریان گردابه ای	۴۹
شکل ۴-۵: پروفیل سرعت نقصان u در مختصات خود تشابه برای شبیه سازی جریان گردابه ای دو بعدی بدون اغتشاش ورودی	۵۱
شکل ۵-۵: پروفیل گردابه ω در مختصات خود تشابه برای شبیه سازی جریان گردابه ای دوبعدی بدون اغتشاش ورودی	۵۱
شکل ۶-۵: پروفیل گردابه ω در مختصات خود تشابه برای شبیه سازی جریان گردابه ای دوبعدی بر اساس تمام نقاط دامنه	۵۲

- شکل ۷-۵: نمودار نقصان سرعت خط مرکزی $U_{center\ deficit}$ در جهت x ۵۳
- شکل ۸-۵: نمودار ضخامت نیم عرض دنباله b_n در جهت x ۵۳
- شکل ۹-۵: پروفیل سرعت u برای نگاشت $y = -\beta \cot(\pi\xi)$ در شبیه سازی عددی مستقیم ۵۴
- شکل ۱۰-۵: نمودار گذر زمانی U در نقطه $x=50$ روی محور $y = 0$ بر حسب زمان ۵۷
- شکل ۱۱-۵: نمودار گذر زمانی U در نقطه $x=100$ روی محور $y = 0$ بر حسب زمان ۵۷
- شکل ۱۲-۵: نمودار گذر زمانی U در نقطه $x=150$ روی محور $y = 0$ بر حسب زمان ۵۸
- شکل ۱۳-۵: نمودار گذر زمانی U در نقطه $x=200$ روی محور $y = 0$ بر حسب زمان ۵۸
- شکل ۱۴-۵: نمودار گذر زمانی V در نقطه $x=50$ روی محور $y = 0$ بر حسب زمان ۵۹
- شکل ۱۵-۵: نمودار گذر زمانی V در نقطه $x=100$ روی محور $y = 0$ بر حسب زمان ۵۹
- شکل ۱۶-۵: نمودار گذر زمانی V در نقطه $x=150$ روی محور $y = 0$ بر حسب زمان ۶۰
- شکل ۱۷-۵: نمودار گذر زمانی V در نقطه $x=200$ روی محور $y = 0$ بر حسب زمان ۶۰
- شکل ۱۸-۵: پروفیل سرعت متوسط در مختصات خود تشابه برای شبیه سازی جریان گردابه ای دوبعدی همراه با اغتشاش ورودی در نقاط $x = 50, 100, 150, 200$ ۶۱
- شکل ۱۹-۵: پروفیل گردابه ω در مختصات خود تشابه برای شبیه سازی جریان گردابه ای دوبعدی همراه با اغتشاش ورودی در نقاط $x = 50, 100, 150, 200$ ۶۲
- شکل ۲۰-۵: نمودار تنش رینولدزی $\sqrt{(\overline{u'})^2}/U_{average}$ بر حسب y در نقاط $x = 50, 100, 150, 200$ ۶۳
- شکل ۲۱-۵: نمودار تنش رینولدزی $\sqrt{(\overline{u'})^2}/U_{average}$ بر حسب $y/b_{1/2}$ در نقاط $x = 50, 100, 150, 200$ ۶۴
- شکل ۲۲-۵: نمودار تنش رینولدزی $u'v'_{rms}/U_{average}$ بر حسب $y/b_{1/2}$ در نقاط $x = 50, 100, 150, 200$ ۶۴
- شکل ۲۳-۵: نمودار تنش رینولدزی $\sqrt{(\overline{v'})^2}/U_{average}$ بر حسب $y/b_{1/2}$ در نقاط $x = 50, 100, 150, 200$ ۶۵

فصل اول

جریانهای برشی آزاد و مروری بر تحقیقات

انجام شده

۱-۱) مقدمه

در این فصل ابتدا انواع جریانهای برشی آزاد معرفی می گردند و اهمیت و نیز کاربردهای آنها در حوزه های گوناگون علوم مهندسی بیان می شود. در ادامه جریان گردابه ای و پارامترهای موثر بر آن و نیز چگونگی پروفیل سرعت آن مورد بررسی قرار می گیرد. در پایان نیز برخی از تحقیقات انجام شده در زمینه جریانهای گردابه ای ارائه می گردد.

۱-۲) جریانهای برشی آزاد

در جریانهای برشی آزاد سیال هیچ تماس فیزیکی مرزی با محیط خود ندارد. به همین علت به آن جریانهای برش آزاد می گویند. از انواع جریانهای برشی آزاد می توان دنباله^۱، جت^۲، لایه های اختلاطی^۳ و را نام برد در شکل ۱-۱ می توان آنها را دید. جریانهای برشی حالتی از جریان هستند که استفاده صنعتی زیادی دارند و همچنین در مدلسازی مسائل پیچیده نیز به کار می روند؛ لیکن حل دقیق این جریانها می تواند در موارد فوق مشکل گشا باشد. در اینگونه جریان ها با پیشروی برش آزاد در محیط، سیال محیط را با خود حمل می کند و محیط گردابه ای تولید می کند. با بی بعد کردن ابعاد با یک طول مشخصه خاص و سرعت با مشخصه سرعت، پروفیل های سرعت و توزیع تنش های رینولدز در ایستگاههای مختلف در دامنه وسیعی به خوبی به روی هم منطبق می شوند. به این پدیده خودتشابهی می گویند [۵].

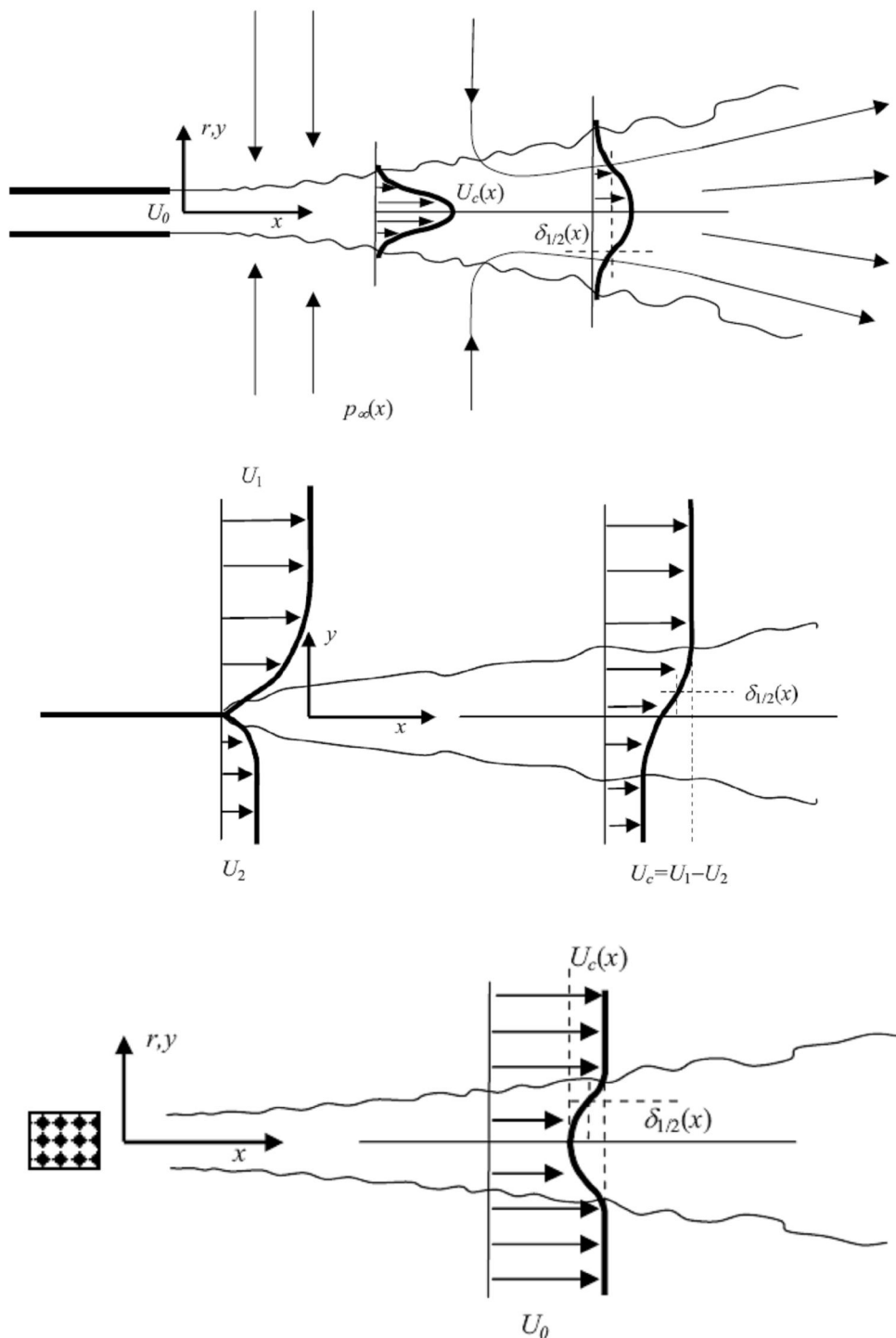
هر یک از این جریانها کاربردهای متفاوت و گسترده ای در زمینه های مهندسی و به طور کلی علوم مختلف دارند که بررسی و تحلیل آنها را ضروری می سازد. جریانهای برشی آزاد دارای پارامترهای مختلفی می باشند که برای بررسی و تحلیل هر یک از آنها توجه به این متغیرها و نحوه تاثیرات هر یک بر جریانات باید مورد توجه قرار گیرد. به عنوان مثال در جریان لایه اختلاطی رشد ضخامت ورتیسیتته و اختلاف سرعت دو جریان و در جریان گردابه ای نصف عرض پروفیل نقصان دنباله در بی بعد سازی و ارزیابی و تحلیل نقش دارند و در نتیجه در تحلیل هر کدام از

¹Wake

² Jet

³ Mixing Layer

این جریانها، توجه به رفتار پارامترهای حاکم و ارزیابی درست اهمیت هر یک از آنها می تواند تاثیر زیادی بر نتایج داشته باشد.



شکل ۱-۱: نمایی از جریان جت، لایه اختلاطی و گردابه و نوع پروفیل سرعت در آنها [۱۸]

جریانهای برشی دارای کاربردهای عملی بسیاری می باشند. به عنوان مثال جریان جت درمحفظه پاشش سوخت، جلوبندی در موتور جت و ... به کاربرده می شود. یکی از مهمترین بررسی های انجام شده برای جریان جت فرآیند اختلاط و حمل سیال محیط یک جت با توجه به محیط خودش است [۵]. به عنوان مثال پاشش سوخت باعث اختلاط یکنواخت تر شده و در نتیجه بازده افزایش می یابد و کارکرد موتور بهتر می شود. از کاربردهای جریان گردابه می توان در طراحی زیردریایی و کشتیها و ایرفویل ها اشاره کرد. لایه های اختلاطی در طراحی توربین های گازی و محاسبات لبه فرار پره توربین ها و یا واکنش های شیمیایی استفاده گسترده ای دارد.

۱-۳) تحقیقات انجام شده در زمینه جریانهای گردابه ای

بخش عمده ای از مطالعات به جریانهای دارای مرز مشخص جامد اختصاص یافته است ولی همان گونه که قبلا ذکر شد جریانهای برشی آزاد نیز دارای اهمیت زیادی در بررسی و تحلیل جریانهای مختلف می باشند. شیلیختینگ [۸] جریانی را که به دیواره جامدی محدود نباشد را جریان آزاد نامید و سه نوع جریان برشی مهم شامل جریان اختلاطی، جریان جت آزاد و جریان گردابه ای و شرایط مرزی هر یک را مورد بررسی قرار داده است که ما در اینجا توجه خود را به جریان گردابه ای معطوف می سازیم.

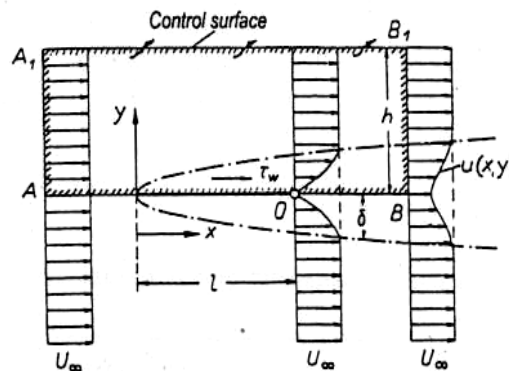
جریان گردابه ای پشت یک جسم جامد که تحت درگ ناشی از سیال قرار گرفته است یا به عبارت دیگر در پشت جسمی جامد که در مسیر جریان سیال قرار دارد تشکیل می گردد. سرعت در جریان گردابه ای از سرعت جریان اصلی آزاد کمتر است و با پیشروی هرچه بیشتر پروفیل سرعت کامل تر شده و از مقدار نقصان^۱ آن کاسته می شود به عبارت دیگر گسترش پروفیل سرعت گردابه با افزایش فاصله از جسم افزایش می یابد و تفاوت سرعت گردابه با جریان آزاد نیز کاهش می یابد.

شیلیختینگ بیان می کند که جریانهای برشی آزاد نیز دارای طبیعت لایه مرزی هستند بنابراین مجاز هستیم که از معادلات لایه مرزی برای بررسی چنین جریاناتی استفاده نماییم.

¹ Wake deficit

در نتیجه استفاده از معادلات لایه مرزی الزاماً برای جریان روی دیواره ثابت محدود نشده است. شکل (۲-۱) جریان دنباله پشت یک صفحه تخت را نشان می دهد. پروفیل سرعت دنباله با افزایش x کامل تر شده و مقدار نقصان آن کمتر می شود در این قسمت فرض می شود که اندازه نقصان سرعت یعنی:

$$u_1(x, y) = U_\infty - u(x, y) \quad (1-1)$$



شکل ۲-۱: جریان دنباله پشت صفحه تخت [۵]

وقتی $x \rightarrow \infty$ میل می کند u_1 در مقایسه با U_∞ مقدار ناچیزی دارد. بنابراین می توان از عبارتهای مرتبه دوم u_1 و v_1 صرف نظر کرد. با توجه به اینکه در پائین دست جریان فشار کم است، می توان معادلات لایه مرزی را با صرف نظر از عبارتهای مرتبه دوم به صورت زیر نوشت:

$$U_\infty \frac{\partial u_1}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} \quad (2-1)$$

که شرایط مرزی آن به صورت زیر است:

$$\frac{\partial u_1}{\partial y}(y=0) = 0, \quad y \rightarrow \infty \Rightarrow u_1 \rightarrow 0 \quad (3-1)$$

این معادله یک معادله خطی با مشتقات جزئی است. این خطی سازی بوسیله فرضیاتی در ترم u_1 یعنی اغتشاشات انجام شده است. حال اگر متغیر تشابهی η را به صورت زیر تعریف کنیم:

$$u_1 = U_\infty C \left(\frac{x}{l} \right)^{-m} F(\eta), \eta = \frac{y}{2} \sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x}} \quad (4-1)$$

آنگاه به معادله دیفرانسیل زیر خواهیم رسید:

$$F'' + 2\eta F' + 4mF = 0 \quad (5-1)$$

که شرایط مرزی به صورت زیر است:

$$\eta = 0 : F' = 0; \eta \rightarrow \infty : F = 0 \quad (6-1)$$

بالانس نرخ حجم و مومنتوم در جهت X برای سطح کنترل در جدول (۱-۱) نشان داده شده است:

جدول ۱-۱: بالانس نرخ حجم و مومنتوم در جهت X برای سطح کنترل شکل ۲-۱

cross - section	Volume flux	x momentum
AB	0	0
AA ₁	$b \int_0^h U_\infty dy$	$\rho b \int_0^h U_\infty^2 dy$
BB ₁	$-b \int_0^h u dy$	$-\rho b \int_0^h u^2 dy$
A ₁ B ₁	$-b \int_0^h (U_\infty - u) dy$	$-\rho b \int_0^h U_\infty (U_\infty - u) dy$
$\Sigma =$ control surface	$\Sigma =$ volume flux=0	Σ Momentum flux= Drag

مقدار پارامتر مجهول m را می توان از بالانس مومنتوم حول جسم در شکل (۲-۱) بدست آورد. سطح کنترل مستطیلی AA₁BB₁ به اندازه کافی دور از جسم در نظر گرفته شده است به طوری که اغتشاشات فشار نداشته باشیم، در نتیجه فشار در کل سطح کنترل ثابت بوده و در نتیجه نیروی حاصل از فشار در بالانس مومنتوم اثری ندارد. به این دلیل که باید معادلات پیوستگی ارضا شوند در نتیجه سیال باید از بالا و پائین سطح کنترل خارج شود. مقدار کمیت سیال خارج شده از A₁B₁ باید با اختلاف سیال ورودی از AA₁ و سیال خارج شده از BB₁ برابر باشد. همانطور

که در جدول (۱-۱) نشان داده شده است، نرخ حجم ورودی مثبت و نرخ حجم خروجی منفی در نظر گرفته شده است. حال می‌توانیم نیروی دراگ را بوسیله نرخ کل مومنتوم حساب کنیم:

$$D = b\rho \int_{-\infty}^{+\infty} u(U_{\infty} - u) dy \quad (7-1)$$

که حدود انتگرال بجای $y = \pm h$ باید با $y = \pm\infty$ جاگذاری شود با فرضیات قبلی می‌توان معادله (۷-۱) را به صورت زیر نوشت

$$D \approx be \int_{-\infty}^{+\infty} U_{\infty} u_1 dy = 2b\rho U_{\infty}^2 C \left(\frac{x}{l}\right)^{-m} \sqrt{\frac{\nu x}{U_{\infty}}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\eta) d\eta \quad (8-1)$$

با توجه به اینکه بالانس مستقل از x است می‌توان مقدار پارامتر m را بدست آورد که برابر $m=0.5$ است. در نتیجه رابطه (۴-۱) به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$F'' + 2\eta F' + 2F = 0 \quad (9-1)$$

با یک بار انتگرال گیری به رابطه زیر می‌رسیم:

$$F' + 2\eta F = 0 \quad (10-1)$$

حل نهایی به صورت زیر است:

$$F(\eta) = e^{-\eta^2} \quad (11-1)$$

با توجه به رابطه انتگرالی زیر

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(\eta) d\eta = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\eta^2} d\eta = \sqrt{\pi} \quad (12-1)$$

می‌توان ضریب دراگ را به صورت زیر استخراج کرد:

$$c_D = \frac{D}{\frac{\rho}{2} U_{\infty}^2 b l} = \frac{4\sqrt{\pi} C}{\sqrt{\frac{U_{\infty} l}{\nu}}} \quad (13-1)$$

در نتیجه حل نهایی برای ترم u_1 برای جریان دنباله از رابطه زیر استخراج می‌شود که C_D ضریب دراگ است.

$$\frac{u_1(x, y)}{U_\infty} = \frac{c_D}{4\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{U_\infty l}{\nu}} \left(\frac{x}{l}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{y^2 U_\infty}{4x\nu}\right) \quad (14-1)$$

از رابطه (1-15) می توان نیم ضخامت دنباله را به صورت زیر استخراج کرد:

$$y_{0.5} = 1.7 \sqrt{\frac{\nu x}{U_\infty}} \quad (15-1)$$

حل بالا از نوع حل های تشابهی می باشد. امروزه الگوریتم های عددی متنوع و گسترده ای برای حل های انواع جریانهای برشی با کارایی بالا موجود می باشد که استفاده از هر کدام بستگی به نوع مسئله و پارامترهای موثر بر آن از قبیل دقت و سرعت مورد نیاز بستگی دارد.

برای بررسی جریان گردابه ای از دو الگوریتم استفاده شده است که انتخاب هر یک از آنها به نوع هندسه مسئله و پارامترهای معلوم بکار گرفته شده بستگی دارد.

✓ بکار گرفتن معادلات ناویر استوکس بدست آمده ناشی از حذف ترم فشار

✓ حل معادلات ناویر استوکس با تعریف معادله برای میدان فشار

منصور و میاکاوا¹ در سال ۱۹۹۲ جریان گردابه ای را توسط روش طیفی و با استفاده از معادلات ناویر استوکس بدست آمده با حذف ترم فشار و با استفاده از شبیه سازی مستقیم عددی تحلیل کردند و تاثیرات ناپایداری فازی^۲ را بررسی نمودند. همچنین در سال ۱۹۹۹ دکتر مغربی جریان گردابه ای سه بعدی را با تلفیقی از روش طیفی و تفاضلات محدود فشرده و همچنین حل کننده اورسامرفیلد با استفاده تفاضل محدود را برای جریان گردابه ای مورد بررسی قرار دادند.

در سال ۲۰۰۳ رویت و چن^۳ شکست گردابه های سه بعدی^۴ در جریان گردابه ای و جت چرخشی را با استفاده از شبیه سازی عددی مستقیم مورد بررسی و تحلیل قرار دادند.

¹ Mansour and Maekawa

² Phase jittering

³ Ruith and Chen

⁴ Three-dimensional vortex breakdown

در سال ۲۰۰۵ نامورا^۱ و همکاران تولید گردابه^۲ در جریان تحریک شده گردابه ای را بررسی کردند.

در سال ۲۰۰۶ وینکلمنس و کاکل^۳ جریان گردابه ای را با استفاده از شبیه سازی گردابه های بزرگ^۴ بررسی و با نتایج تجربی مقایسه کردند.

در سال ۲۰۰۴ شوویلر^۵ و همکاران برهمکنش جریانهای گردابه ای ناشی از قرار گرفتن دو کره در کنار یکدیگر را بررسی کردند.

در سال ۲۰۰۴ واتانابه و میاکاوا^۶ تکامل سه بعدی ساختار و تولید گردابه در جریان گردابه ای دوبعدی تراکم پذیر را مورد تحلیل قرار دادند.

در سال ۲۰۰۵ دانگ^۷ جریان گردابه ای در پشت یک استوانه ثابت و نوسانی^۸ را در رینولدز ۱۰۰۰۰ با استفاده از شبیه سازی عددی مستقیم بررسی کرد.

در سال ۲۰۰۸ آفانسیف و کورابل^۹ دنباله و خیابان گردابه ای^{۱۰} ناشی از نیروی محلی اعمال شده را بررسی و تحلیل کردند.

در سال ۲۰۰۹ فون ترزی و همکاران^{۱۱} مشخصات ساختارهای بزرگ به هم پیوسته^{۱۲} در جریان گردابه ای سوپرسونیک نامتقارن را بررسی کردند.

همان طور که مشخص است بررسی جریان گردابه ای در زمینه های گوناگون به خصوص در سالهای اخیر بسیار مورد توجه قرار گرفته است که این امر به خوبی بیانگر اهمیت و کاربردهای مختلف این جریان می باشد. در سالهای اخیر تحقیقات در این زمینه به سمت روش شبیه سازی گردابه ای بزرگ و نیز جریانهای واکنش دهنده سوق پیدا کرده است.

¹ Nonomura

² Vortex Generation

³ Winckelmans and Cocle

⁴ Large Eddy Simulation

⁵ Schouveiler

⁶ Watanabe and Maekawa

⁷ Dong

⁸ Oscillating cylinder

⁹ Afanasyev and Korabel

¹⁰ Vortex Street

¹¹ Von Terzi

¹² Large coherent structures