بسم الله الرحمن الرحیم

وزارت علوم، تحقیقات و فناوری

دانشگاه تفرش

دانشکده ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد

عدد ۲– احاطه‌کننده در گراف‌ها

استاد راهنما:

پرفسور دوستعلی مژده

استاد مشاور:

دکتر احمدرضا ساده

دانشجو:

هدی عالیوند

دی ماه ۹۰

نثار روح

خورشید بی غروب زندگانی ام

پدرم

و تقدیم به

مادر عزیزتر از جانم

که دستان پرمهرش ، پشتیبان من . اندیشه های سبزش، انگیزه ی من. نگاه مهربانش ، دلگرمی من و وجودش، رنگ زندگی من بوده است.

پروردگارا!

تو را سپاس می گویم

که به من، قدرت اندیشیدن، فرصت آموختن، توان دیدن و شنیدن، زبان گفتن و... عطا نمودی

چه لطیفانه نعمتم دادی

وچه رحیمانه یاری ام نمودی

درحالی که، نه یاریت را سپاس گفتم و نه نعمتت را.

با سپاس فراوان از جناب آقای دکتر مژده که با صبر و شکیبایی، در این راه مرا همراهی نموده و همیشه، حتی در اوج خستگی، با کمال تواضع، تمام سوال هایم را پاسخ گفته اند. ایشان، استادی است که علم و اخلاق را در کنار هم دارد و وجودشان باعث دلگرمی و ادامه ی کار من بوده است.

از خداوند برایش بهترین ها را آرزو دارم و من الله توفیق.

هدی عالیوند، دی ۹۰

چکیده

مجموعه راس S از گراف G، یک مجموعه‌ی ۲- احاطه‌کننده از گراف G است، اگر هر راس $v \in V(G)-S$ با حداقل ۲ راس در S مجاور باشد. عدد ۲- احاطه‌کننده، می‌نیمم اندازه را در میان مجموعه‌های ۲- احاطه‌کننده از گراف G دارد و با $\gamma_2(G)$ نشان داده می‌شود. در این پایان‌نامه، عدد ۲- احاطه‌کننده‌ی برخی گراف‌ها، مورد مطالعه قرار می‌گیرد و کران‌های بالا و پایین مختلفی را از عدد ۲- احاطه‌کننده نسبت به پارامترهای مختلفی از جمله، عدد استقلالی، عدد احاطه‌کننده، مرتبه‌ی گراف، تعداد برگ‌ها و دیگر پارامترها نشان خواهیم داد و همچنین، به مقایسه‌ی عدد ۲- احاطه‌کننده با عدد احاطه‌کننده و عدد احاطه‌کننده‌ی مستقل می‌پردازیم و شرایط لازم و کافی را برای گراف‌هایی که عدد ۲- احاطه‌کننده و عدد احاطه‌کننده‌ی یکسان دارند، بررسی می‌کنیم و در انتها نیز گراف‌های خاصی می‌سازیم و عدد ۲- احاطه‌کننده را در این گراف‌ها پیدا می‌کنیم و تغییراتی که عدد ۲- احاطه‌کننده در اثر اضافه‌کردن مسیرها و دورها پیدا می‌کند را حدس می‌زنیم.

کلمات کلیدی: مجموعه‌ی ۲- احاطه‌کننده، عدد ۲- احاطه‌کننده، کران‌های عدد ۲- احاطه‌کننده، عدد احاطه‌کننده، عدد احاطه‌کننده‌ی مستقل، گراف‌های خاص.

فهرست مطالب

عنوان **صفحه**

فهرست اشکال

عنوان	صفحه

پیشگفتار

از دیدگاه ریاضی، شبکه‌ی ارتباطی، گرافی چون $G=(V,E)$ است که در آن راس‌ها نمایانگر پردازشگرهایی هستند که در سیستم ارتباطی به کار رفته‌اند و یال‌ها پیوند بین این پردازشگرها را نشان می‌دهند. با چنین تعریف، بی‌درنگ درمی‌یابیم که آشنایی با ساختار و سبک عملکرد این شبکه‌ها بدون داشتن آگاهی لازم و درک صحیحی از مباحث نظریه‌ی گراف به ویژه مجموعه‌های احاطه‌گر، امکان‌پذیر نیست. از دیدگاه نظریه‌ی گراف، به منظور استفاده‌ی بهینه از منابع انسانی و ارتقای سطح کیفی و شبکه‌ها، نیاز به گزینش مدل‌هایی است که سازگاری هر چه بیشتر با اهداف تعریف شده دارند. طیف وسیعی از مدل‌بندی‌های ریاضی برای شبکه‌ها تا به امروز طراحی و در مجلات مختلف به چاپ رسیده‌اند. مفهوم احاطه‌گری همراه با اقسام متنوع آن، گستره‌ی وسیعی از مطالعات در زمینه‌ی گراف را به خود اختصاص داده است. برگ[1] و اور[2] نخستین کسانی بودند که به بیان مفهوم احاطه‌گری در گراف‌ها پرداختند و از جمله کاربردهایی که برای این مفهوم می‌توان نام برد، استفاده‌ی آن در شبکه‌های ارتباطی است.

اگر p را یک عدد صحیح مثبت قرار دهیم، زیر مجموعه‌ی D از مجموعه رئوس گراف G، یک مجموعه‌ی $p-$ احاطه‌کننده است، اگر هر راس $v\in V(G)-D$، مجاور با حداقل p راس در D باشد. عدد $p-$ احاطه‌کننده از گراف G، می‌نیمم اندازه را در میان مجموعه‌های p - احاطه‌کننده‌ی G دارد و با $\gamma_p(G)$ نشان داده می‌شود.

فینک[3] و جاکبسن[4] مفهوم p - احاطه‌کننده را معرفی کردند و عدد ۱- احاطه‌کننده که با $\gamma_1(G)$ نشان داده می‌شود، همان عدد احاطه‌کننده‌ی معمول می‌باشد. عدد ۲- احاطه‌کننده حالتی از عدد p -

1 - Berge
2 - Ore
3 - Fink
4- Jacobson

احاطه‌کننده است، زمانی که $p=2$ باشد. با این تعریف که، زیر مجموعه‌ی $D\subseteq V(G)$ یک مجموعه‌ی ۲- احاطه‌کننده از گراف G است، اگر هر راس $v\in V(G)-D$ با حداقل ۲ راس در D مجاور باشد. عدد ۲- احاطه‌کننده، می‌نیمم اندازه را در میان مجموعه‌های ۲- احاطه‌کننده از گراف G دارد و با $\gamma_2(G)$ نشان داده می‌شود. مرجع [۲].

بلیدیا[1]، شلالی[2] و ولکمن[3]، کران‌های بالا و پایین مختلفی را از عدد ۲- احاطه‌کننده نسبت به پارامترهای مختلف از جمله، عدد استقلالی، عدد احاطه‌کننده، مرتبه‌ی گراف، تعداد برگ‌ها و دیگر پارامترها نشان داده‌اند. همچنین در بعضی از مقالات، مقایسه‌ای بین عدد ۲- احاطه‌کننده و دیگر احاطه‌کننده‌ها، صورت گرفته است که از جمله افرادی که در این زمینه، تحقیق و پژوهش کرده‌اند، می‌توان به هانسبرگ[4]، ولکمن و رندراس[5] اشاره کرد که خصوصیاتی از گراف‌هایی که عدد ۲- احاطه‌کننده و عدد احاطه‌کننده‌ی یکسان دارند را معرفی کردند. آن‌ها گراف‌های C_4-کاکتوس، کاکتوس، خطی و بدون پنجه‌ای را تشخیص دادند که اعداد ۲- احاطه‌کننده و احاطه‌کننده‌ی برابر داشتند.

در فصل اول این پایان‌نامه، مفاهیم و تعاریفی را مطرح می‌کنیم که در فصل‌های بعد، مورد استفاده قرار می‌گیرند.

در فصل دوم آن، کران‌های بالا و پایین مختلفی را از عدد ۲- احاطه‌کننده نسبت به پارامترهای مختلف در گراف‌های گوناگون جمع‌آوری کرده‌ایم که از جمله‌ی این گراف‌ها می‌توان به گراف‌های کاکتوس و کاکتوس بلوکی، گراف‌های بلوکی و درخت‌ها اشاره کرد. مطالب این فصل، برگرفته از مراجع [۲،۴، ۵] و همچنین، ازمراجع [۱، ۶، ۱۱، ۱۳، ۱۴] استفاده شده است.

---

[1] - Blidia
[2] - Chellali
[3] - Volkmann
[4] - Hansberg
[5] - Randerath

در فصل سوم به رابطه‌ی بین عدد ۲- احاطه‌کننده و عدد احاطه‌کننده‌ی مستقل می‌پردازیم و همچنین عدد ۲- احاطه‌کننده را با عدد احاطه‌کننده در گراف‌های مختلف مقایسه می‌کنیم و شرایط لازم و کافی را برای گراف‌هایی که اعداد ۲- احاطه‌کننده و احاطه‌کننده‌ی یکسان دارند، بررسی می‌کنیم، از جمله گراف‌هایی که به تحلیل اعداد ۲- احاطه‌کننده، احاطه‌کننده و احاطه‌کننده‌ی مستقل آن‌ها می‌پردازیم، می‌توان به گراف‌های کاکتوس و کاکتوس بلوکی، گراف‌های بدون پنجه، گراف‌های خطی و گراف C_4-کاکتوس اشاره کرد. مطالب این فصل، برگرفته از مراجع [۹، ۱۰] و همچنین، از مراجع [۳، ۷، ۸، ۱۵، ۱۶] استفاده شده است.

در فصل چهارم نیز گراف‌های خاصی می‌سازیم به این صورت که به راس‌های هر گراف دلخواه، مسیر و دور اضافه می‌کنیم و آنگاه، عدد ۲- احاطه‌کننده و عدد احاطه‌کننده‌ی کلی را برای این گراف‌ها پیدا می‌کنیم و تغییراتی را که عدد ۲- احاطه‌کننده در اثر اضافه‌کردن مسیرها و دورها پیدا می‌کند را بررسی می‌کنیم.

فصل اول
تعاریف و مفاهیم مقدماتی

در این فصل، تعاریف و مفاهیمی را مطرح می‌کنیم که در فصل‌های آینده، آن‌ها را مورد استفاده قرار داده‌ایم.

تعریف ۱-۱-۱: یک گراف[1] $G = (V(G), E(G))$ یک سه‌تایی مرتب است. شامل مجموعه‌ی راس‌های $V(G)$ و مجموعه یال‌های $E(G)$ و یک رابطه که به هر یال، دو راس که الزاماً متمایز از هم نبوده و به نام نقاط یا راس‌های انتهایی آن یال شناخته شده‌اند را نسبت می‌دهد. همچنین یک یال با راس‌های u و v را به صورت uv نشان می‌دهیم.

تعریف ۱-۱-۲: دو راس را مجاور[2] یا همسایه[3] گوییم، هرگاه راس‌های انتهایی یک یال باشند.

تعریف ۱-۱-۳: یک طوقه[4] در یک گراف، یالی است که نقاط انتهایی آن یکسان باشند.

تعریف ۱-۱-۴: یال‌های چندگانه[5] در یک گراف، یال‌هایی هستند که جفت نقاط انتهایی آن‌ها یکسان باشند.

تعریف ۱-۱-۵: یک راس از درجه‌ی صفر، راس تنها[6] نامیده می‌شود.

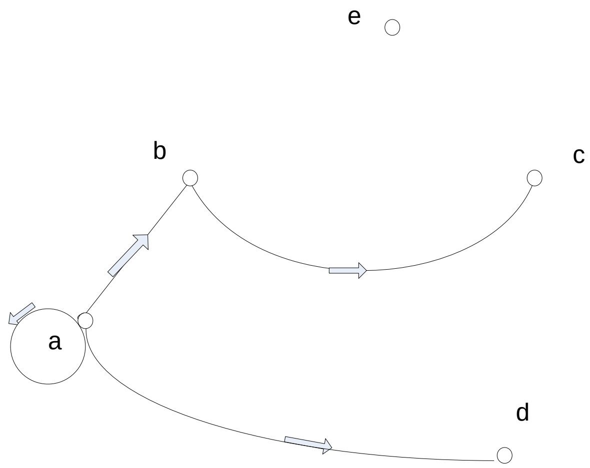
تعریف ۱-۱-۶: گراف سودار[7] G یک سه‌تایی مرتب است، شامل مجموعه راس‌های $V(G)$ و مجموعه یال‌های $E(G)$ و یک رابطه که هر یال را به یک جفت از راس‌ها اختصاص می‌دهد. اولین راس را مبدأ

---

[1] - Graph
[2] - Adjacent
[3] - Neighbor
[4] - Loop
[5] - Multiple Graph
[6] - Isolated Vertex
[7] - Directed Graph

یال و دومین راس را مقصد یال می‌نامیم و هر یال، با یک پیکان از مبدأ یال به سمت مقصد آن مشخص می‌شود.

مثال ۱-۱-۱: شکل زیر یک گراف سودار روی V={a,b,c,d,e} را نشان می‌دهد که در آن E={(a,a), (a,b), (a,d), (b,c)} است. مطابق شکل، سوی هر یال با قراردادن یک پیکان روی آن یال مشخص می‌شود. برای هر یال مانند (b,c) می‌گوییم که b مبدأ و c مقصد یال می‌باشد. یال (a,a) مثالی از طوقه است و راس e که هیچ یالی از آن نمی‌گذرد، راس تنها است.

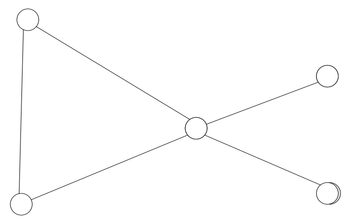


شکل ۱-۱: گراف سودار G

تعریف ۱-۱-۷: در هر گراف، به تعداد یال‌های گذرنده از یک راس، درجه‌ی راس[1] گفته می‌شود. ماکسیمم درجه‌ی راس‌های یک گراف را با نماد $\Delta(G)$ و می‌نیمم درجه‌ی راس‌های یک گراف را با نماد $\delta(G)$ نشان می‌دهیم.

مثال ۱-۱-۲: در گراف زیر ماکسیمم درجه، $\Delta(G)=4$ و می‌نیمم درجه، $\delta(G)=1$ می‌باشد.

[1] - Vertex Degree



شکل ۱-۲: گراف G

تعریف ۱-۱-۸: تعداد راس‌های $|V(G)|$ از گراف G، مرتبه‌ی[۱] G نامیده می‌شود و با $n(G)$ نشان داده می‌شود.

تعریف ۱-۱-۹: یک راس از درجه‌ی ۱ را برگ[۲] یا راس آویزان[۳] می‌نامیم و به همسایه‌ی آن راس حامی[۴] گفته می‌شود و مجموعه برگ‌هایی که مجاور با راس u هستند را با L_u نشان می‌دهیم.

تعریف ۱-۱-۱۰: اگر v یک راس دلخواه گراف G باشد، آنگاه، $N[v]$ شامل کلیه‌ی مجاورهای v و خود v است و آن را همسایگی بسته‌ی[۵] v می‌نامیم. $N(v)$ نیز شامل کلیه‌ی مجاورهای v است و همسایگی باز[۶] v نامیده می‌شود.

تعریف ۱-۱-۱۱: فرض می‌کنیم x و y دو راس (که الزاماً متمایز نیستند) در گراف بیسوی $G=(V,E)$ باشند. هر $x-y$ راه[۷] در G یک دنباله‌ی متناوب متناهی و بیطوقه مانند

$$x=x_\circ,e_1,x_1,e_2,x_2,e_3,\dots,e_{n-1},x_{n-1},e_n,x_n=y$$

[1] - Order
[2] - Leaf
[3] - Pendant
[4] - Support Vertex
[5] - Closed Neighborhood
[6] - Open Neighborhood
[7]- Walk

از تعدادی راس و یال متعلق به G است که از راس x آغاز و به راس y ختم می‌شود و حاوی n یال $e_i=\{x_{i-1},x_i\}$، $1\le i\le n$ است. طول هر راه برابر n، یعنی تعداد یال‌های راه است. هر $x-y$ راه که در آن $x=y$ $(n\succ 1,)$ باشد، راه بسته نام دارد و در غیر این صورت، راه باز نامیده می‌شود.

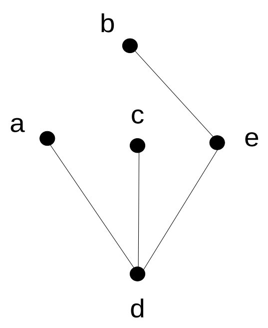
تعریف ۱-۱-۱۲: به یک $x-y$ راه که در آن، هر راس بیش از یک بار تکرار نشود، $x-y$ مسیر[1] گفته می‌شود و یک $x-x$ مسیر بسته را دور[2] می‌نامیم.

تعریف ۱-۱-۱۳: گراف همبند[3]، گرافی است که بین هر دو راس آن یک مسیر وجود داشته باشد.

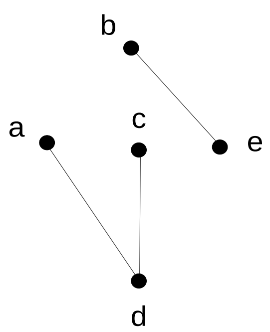
تعریف ۱-۱-۱۴: اگر $G=(V,E)$ یک گراف دلخواه باشد، $G_1=(V_1,E_1)$ را یک زیرگراف[4] G می‌نامند، هرگاه، $\phi\neq V_1\subseteq V$ و $E_1\subseteq E$ باشد و راس‌های واقع بر هر یال متعلق به E_1، متعلق به V_1 باشند.

تعریف ۱-۱-۱۵: فرض کنیم $G_1=(V_1,E_1)$ زیرگرافی از گراف $G=(V,E)$ باشد. اگر $V_1=V$ باشد، آنگاه، G_1 را زیرگراف فراگیر[5] G می‌نامند.

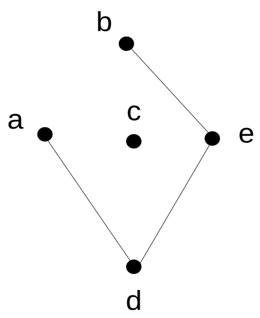
مثال ۱-۱-۳: در شکل زیر، گراف G و زیرگراف‌های فراگیر آن (G_1 و G_2) را مشاهده می‌کنید.



شکل ۱-۳: گراف G



شکل ۱-۴: گراف G_1



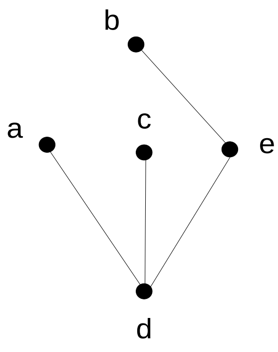
شکل ۱- ۵: گراف G_2

---

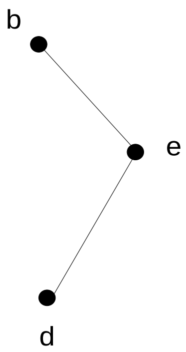
[1] - Path
[2] - Cycle
[3] - Connected Graph
[4] - Subgraph
[5] - Spanning Subgraph

تعریف ۱-۱-۱۶: فرض کنید $G=(V,E)$ یک گراف دلخواه باشد. اگر $\phi \neq U \subseteq V$ باشد، زیرگراف القاشده[1] به وسیله‌ی U زیرگرافی است که مجموعه راس‌های آن U است و شامل آن یال‌هایی از G است که به صورت $\{x,y\}$، $x,y \in U$ باشند. این زیرگراف را با $\langle U \rangle$ نشان می‌دهیم.

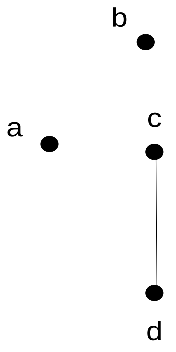
مثال ۱-۱-۴: در شکل زیر، گراف G را مشاهده می‌کنید که G_1 زیرگراف القایی آن است ولی G_2 زیرگراف القایی آن نیست زیرا فاقد یال $\{a,d\}$ است.



شکل ۱-۶: گراف G



شکل ۱-۷: گراف G_1

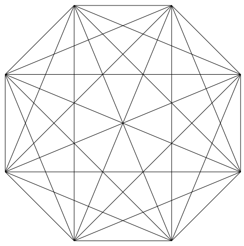


شکل ۱-۸: گراف G_2

تعریف ۱-۱-۱۷: فرض کنیم V مجموعه‌ای متشکل از n راس باشد. گراف کامل[2] روی V که با K_n نشان داده می‌شود، گراف بیسوی بیطوقه‌ای است که در آن به ازای هر $a,b \in V$ و $a \neq b$ یالی مانند $\{a,b\}$ وجود داشته باشد.

مثال ۱-۱-۵: در شکل زیر گراف k_8 را مشاهده می‌کنید.

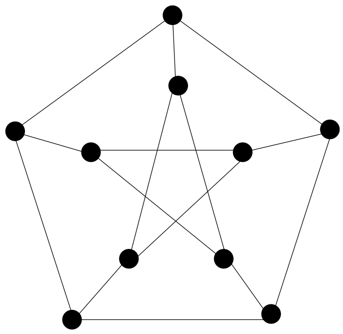
[1] - Induced Subgraph
[2] - Complete Graph



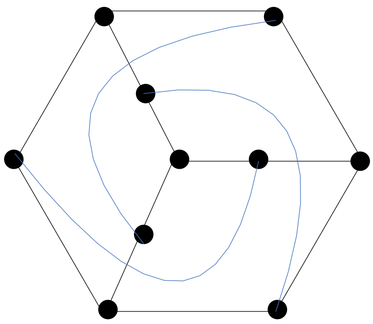
شکل ۱-۹: گراف k_8

تعریف ۱-۱-۱۸: فـرض کنـیم $G_1=(V_1,E_1)$ و $G_2=(V_2,E_2)$ دو گـراف بیسـو باشـند، تـابعی ماننـد $f:V_1\to V_2$ را یکریختی گراف مـی‌نامنـد هرگـاه (الـف) f یـک بـه یـک و پوشـا باشـد و (ب) بـه ازای هر $a,b\in V_1$، $\{a,b\}\in E_1$ اگر و فقط اگر $\{f(a),f(b)\}\in E_2$. اگر چنین تابعی وجود داشـته باشـد، G_1 و G_2 را گراف‌های یکریخت[1] می‌نامند.

مثال ۱-۱-۶: در شکل زیرگراف پترسن و گراف یکریخت با آن دیده می‌شود.



شکل ۱-۱۰: گراف پترسن



شکل ۱-۱۱: گراف یکریخت با گراف پترسن

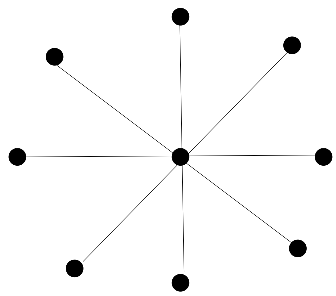
تعریف ۱-۱-۱۹: زیرگراف‌های همبند ماکسیمال یک گراف را مؤلفه‌های[2] آن گراف می‌گویند.

1 - Isomorphism
2 - Components

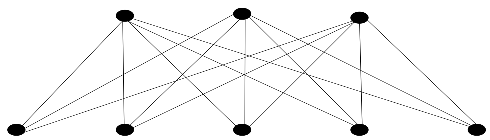
تعریف ۱-۱-۲۰: یک گراف را بدیهی[۱] گوییم اگر هیچ یالی نداشته باشد و در غیر این صورت، آن را غیربدیهی[۲] می‌نامیم.

تعریف ۱-۱-۲۱: گراف $G=(V,E)$ را دو بخشی[۳] می‌نامند هرگاه $V=V_1 \cup V_2$ و $V_1 \cap V_2 = \phi$ و هر یال G به صورت $\{a,b\}$ باشد که در آن $a \in V_1$ و $b \in V_2$ است. اگر هر راس V_1 به هر راس V_2 وصل شده باشد یک گراف دوبخشی‌کامل[۴] خواهیم داشت. در این حالت، اگر $|V_1|=m$ و $|V_2|=n$ باشد، این گراف را با $K_{m,n}$ نشان می‌دهیم.

مثال ۱-۱-۷: در شکل زیر، گراف $K_{3,5}$ و گراف $K_{1,8}$ را مشاهده می‌کنید.



شکل ۱-۱۲: گراف $K_{1,8}$



شکل ۱-۱۳: گراف $K_{3,5}$

تعریف ۱-۱-۲۲: یک راس v از گراف G، راس برشی[۵] نامیده می‌شود اگر حذف آن از G، تعداد مؤلفه‌های G را افزایش دهد.

تعریف ۱-۱-۲۳: بلوک[۶] در یک گراف، یک زیرگراف ماکسیمال همبند است که دارای هیچ راس برشی نباشد.

[1] - Trivial
[2] - Nontrivial
[3] - Bipartite Graph
[4]- Complete Bipartite Graph
[5] - Cut Vertex
[6]- Block