بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه زنجان
دانشکده علوم - گروه ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد

عنوان:

روش تجزیه اصلاح شده برای معادلات انتگرال ولترا — فردهلم غیرخطی

نگارش:

رقیه مقیمی

استاد راهنما:

دکتر جعفر ملکی زنجانی

استاد مشاور: دکتر حسین خیری استیار

تیر ۱۳۸۷

دانشگاه زنجان

صورتجلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد

شماره: ۶۱۵۷
تاریخ: ۸۷/۴/۱۲

با تأییدات خداوند متعال و با استعانت از حضرت ولی‌عصر (عج) جلسه دفاع از پایان‌نامه کارشناسی‌ارشد

خانم **رقیه مقیمی** رشته **ریاضی** گرایش **کاربردی**

تحت عنوان : **روش تجزیه اصلاح شده برای معادلات ولترا فردهلم غیرخطی**

در تاریخ ۸۷/۴/۱۲ با حضور هیأت محترم دوران در دانشگاه زنجان برگزارگردید و نظر هیأت داوران بشرح زیر می‌باشد:

قبول(با درجه :......عالی.......امتیاز: ....۱۹/۳..................) دفاع مجدد ☐ مردود ☐

۱- عالی(۲۰-۱۸)

۲- بسیارخوب(۱۷/۹۹- ۱۶)

۳- خوب(۱۵/۹۹- ۱۴)

۴- قابل قبول(۱۳/۹۹- ۱۲)

عضو هیأت داوران	نام و نام خانوادگی	رتبه علمی	امضاء
۱- استاد راهنما	دکتر جعفرملکی زنجانی	استادیار	
۲- استاد مشاور	دکترحسین خیری استیار	استادیار	
۳- استاد ممتحن داخلی	دکتر مجید ادیب	استادیار	
۴- استاد ممتحن خارجی	دکتر قدرت عبادی	استادیار	
۵- نماینده تحصیلات تکمیلی	دکتر محمد ابراهیمی	استادیار	ابراهیمی

دکتر محمدعلی اسم‌خانی
معاون آموزشی و تحصیلات تکمیلی
دانشکده علوم
۸۷/۴/۱۵

دکتر نعمت‌الله رشیدی
مدیر تحصیلات تکمیلی دانشگاه

دانشگاه زنجان

تقدیم به :

همسر مهربانم

پدر و مادر دلسوز

و

خواهر و برادر عزیزم

و

تقدیر و تشکر از اساتید بزرگوارم جناب آقای دکتر ملکی و جناب آقای دکتر خیری و تمامی اساتید و دوستانی که در طول تحصیل راهنما و مشوق بنـــده بوده‌اند.

فهرست مندرجات

فهرست مندرجات

چکیده

در این پایان نامه ضمن آشنایی با تعریف معادلات انتگرال و انواع آن، و آشنایی با روش تجزیه آدومیان و آدومیان اصلاح یافته یک روش عددی و تحلیلی برای حل معادلات انتگرال ولترا – فردهلم غیر خطی به روش تجزیه اصلاح یافته و بسط تیلور ارائه می‌گردد.

چون حل معادلات انتگرال ولترا –فردهلم غیرخطی در حالت کلی بسیار پیچیده است و عموماً حل تحلیلی برای آن‌ها موجود نمی‌باشد، لذا در صدد یافتن روش عددی برای این گونه معادلات هستیم که استفاده از روش تجزیه آدومیان و همچنین به دست آوردن جواب به فرم سری تیلور یک روش عددی برای این گونه معادلات ارائه می‌دهد که ارائه نتایج عددی، بیان‌گر دقت آن‌هاست.

مقدمه

هر معادله به شکل $y(x) = f(x) + \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} F(x,t,y(t))dt$ را یک معادله انتگرال گویند. معادلات انتگرال در خیلی از مباحث فیزیک، زیست شناسی، شیمی و مهندسی ظاهر می‌شوند. به نظر بوچر[۱]، نام معادله انتگرال توسط بوآ– ریموند[۲] در سال ۱۸۸۸ پیشنهاد شده است. هر چند که پیدایش اولین معادله انتگرال توسط آبل [۳] به رسمیت شناخته شده است. آبل در سال‌های ۱۸۲۳ تا۱۸۲۶ مشغول بررسی معادلاتی نظیر $f(x) = \int_a^{\infty} (x-t)^{-\alpha} f(t)dt \quad 0 < \alpha < 1$ بود که در آن $f(x)$ یک تابع پیوسته و در شرط $f(\alpha) = 0$ صدق می‌کرد. همچنین نظریاتی وجود دارد که آغاز پیدایش معادلهٔ انتگرال به کارهای لاپلاس [۴] در سال ۱۷۸۲ برمی‌گردد که روی تبدیلات لاپلاس و معکوس آن‌ها مطالعه می‌کرده است. به عنوان مثال تبدیل لاپلاس تابع $f(t)$ به صورت $L(f(t)) = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)dt, \ s > 0$ است به شرط آن‌که انتگرال فوق به ازای $s > 0$ همگرا باشد. در مسئله پیدا کردن تبدیل معکوس لاپلاس تابع $F(s) = \frac{1}{s^2}, \ s > 0$ با حل معادله انتگرال، $\frac{1}{s^2} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)dt, \ s > 0$ مواجه می شویم. بنابراین به نظر می‌رسد که معادله انتگرال توسط لاپلاس شروع شده باشد. در سال ۱۸۲۰ فوریه، [۵] تبدیلات فوریه را مطرح کرد که پیدا کردن تبدیل معکوس فوریه به حل معادله انتگرال منجر می شود. سپس در سال ۱۸۲۶ پواسن [۶] در بررسی علم مغناطیس، معادله $y(x) - \lambda \int_0^x K(x,t)y(t)dt = f(x)$ را مورد بررسی قرار داده که درآن $y(x)$ تابعی مجهول می‌باشد. در سال ۱۸۹۶ ولترا درزمینه موضوع رشد جمعیت، مسئله $y(x) - \lambda \int_a^x K(x,t)y(t)dt = f(x)$ را بررسی کرد. کمی بعد در سال ۱۹۰۰ فردهلم معادله $y(x) - \lambda \int_a^b K(x,t)y(t)dt = f(x)$ را مورد مطالعه قرار داد.

به دنبال روش‌های معمول برای حل معادلات انتگرال و دیفرانسیل، روش تجزیه آدومیان برای اولین بار در سال

[۱] Bocher
[۲] Bois-Reymond
[۳] Abel
[۴] Laplace
[۵] Fourrier
[۶] Poisson

۱۹۸۴ توسط آدومیان [۷] ارائه شد. سپس در سال ۱۹۹۹ روش تجزیه اصلاح یافته توسط وزواز[۸] بیان شد که در این روش‌ها جواب به صورت سری ارائه می‌شود و به دلیل همگرایی سریع در مقایسه با روش‌های دیگر، در سال‌های اخیر مورد توجه گسترده‌ای قرار گرفته است. در این پایان‌نامه ابتدا در فصل اول برخی از تعاریف و قضایای پیش نیاز فصول بعد آورده شده است. در فصل دوم روش‌های حل انواع معادلات انتگرال و وجود و یگانگی جواب در معادلات انتگرال خطی و غیرخطی بررسی می شوند. در فصل سوم معادلات ولترا — فردهلم با استفاده از بسط تیلورحل می‌شوند. در فصل چهارم روش تجزیه آدومیان معرفی و همگرایی آن بررسی می شود. بالاخره در فصل پنجم برای معادلات انتگرال ولترا — فردهلم باروش تجزیه آدومیان و تجزیه اصلاح یافته آدومیان به جواب می‌رسیم.

لازم به ذکر است که این پایان نامه بر اساس مقاله‌های [۳] و [۴] و [۱۲] تنظیم شده است و تمامی محاسبات عددی به کار رفته در این پایان نامه، با استفاده از نرم افزار $Matlab$۷.۲ صورت گرفته‌اند.

---

[۷] Adomian

[۸] Wazwaz

فصل ۱

تعاریف و قضایای پیش نیاز

۱.۱ تعاریف و قضایای کلی

تعریف ۱.۱.۱ اگر F یک میدان و V یک گروه آبلی باشد و یک ضرب عددی برای ضرب هر عضو x از F، در هر عضو v از V تعریف شده باشد، به طوری که عضو منحصر به فرد xv از V را نتیجه دهد و به ازای هر x و y از F و هر u و v از V داشته باشیم

۱) $x(u+v)=xu+xv$،

۲) $(x+y)u=xu+yu$،

۳) $(xy)v=x(yv)$،

۴) $1v=v$.

در این صورت V یک فضای برداری روی میدان F نامیده می‌شود.

تعریف ۲.۱.۱ اگر V یک فضای برداری روی میدان F و W زیر مجموعه‌ای از V باشد. آنگاه W یک زیرفضای V نامیده می‌شود هرگاه با اعمال تعریف شده روی V یک فضای برداری روی میدان F باشد.

قضیه ۳.۱.۱ فرض کنید V یک فضای برداری روی میدان F و W زیرمجموعه‌ای از V باشد. آنگاه W یک

زیرفضای V است اگر و تنها اگر دارای خواص زیر باشد

۱) اگر $a, b \in W$ آنگاه $a + b \in W$،

۲) اگر $\lambda \in F$ و $a \in W$ آنگاه $\lambda a \in W$.

تعریف ۴.۱.۱ برروی یک فضای برداری V، $\|\cdot\|$، یک تابع نرم از V به مجموعه اعداد حقیقی نامنفی است هر گاه از سه قاعده زیر تبعیت کند

۱) اگر $x \in V$ و $x \neq 0$، $\|x\| \geqslant 0$،

۲) اگر $\alpha \in \mathbb{R}$ و $x \in V$، $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|$،

۳) به ازای هر $x, y \in V$، $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$.

فاصله بین x و y را با $d(x, y)$ نشان می‌دهیم و به صورت $d(x, y) = \|x - y\|$ تعریف می کنیم.

تعریف ۵.۱.۱ نرم‌های $\|\cdot\|_1$ و $\|\cdot\|_2$ و $\|\cdot\|_\infty$ برای $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ برداری در $\mathbb{R}^n$، به صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|,$$

$$\|x\|_2 = \left\{ \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \right\}^{1/2},$$

$$\|x\|_\infty = \max |x_i|, \quad 1 \leqslant i \leqslant n.$$

$\|x\|_2$ نرم اقلیدسی بردار x نامیده می‌شود که متناظر با مفهوم ذاتی طول است.

تعریف ۶.۱.۱ هرگاه $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ و $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)^T$ بردارهایی در $\mathbb{R}^n$ باشند، فاصله $\|\cdot\|_2$ و $\|\cdot\|_\infty$ بین x و y به ترتیب چنین تعریف می‌شوند

$$\|x - y\|_2 = \left\{ \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2 \right\}^{1/2},$$

$$\|x - y\|_\infty = \max |x_i - y_i|, \quad 1 \leqslant i \leqslant n.$$

تعریف ۷.۱.۱ گوییم دنباله حقیقی a_n در شرط کوشی صدق می کند یا a_n یک دنباله کوشی است هر گاه در رابطه زیر صدق کند.

$$\forall \varepsilon \ \exists N \forall n \forall m (n, m \geq N \Rightarrow d(a_n, a_m) < \varepsilon)$$

قضیه ۸.۱.۱ در هر فضای متری X، هر دنباله همگرا یک دنباله کوشی است ونیزدر هر فضای متری تام X، هر دنباله کوشی همگراست.

برهان . ر.ک. به [۷]. □

تعریف ۹.۱.۱ اگر (M, d) یک فضای متری بوده و $\acute{M} \subseteq M$ و نیز T نگاشتی به صورت $T : \acute{M} \to M$ باشد آن‌گاه $u_\circ \in \acute{M}$ را یک نقطه ثابت گوییم هر گاه

$$T(u_\circ) = u_\circ$$

تعریف ۱۰.۱.۱ نگاشت T، یک نگاشت انقباضی نامیده می‌شود هرگاه $\circ \leq \alpha < ۱$, وجود داشته باشد به طوری‌که برای هر $u_۱, u_۲ \in \acute{M}$ داشته باشیم

$$d(T(u_۱), T(u_۲)) \leq \alpha d(u_۱, u_۲)$$

تعریف ۱۱.۱.۱ گردایه τ از زیرمجموعه‌های مجموعه X را یک توپولوژی در X گوییم اگر τ از سه خاصیت زیر بهره‌مند باشد

۱) $\varnothing \in \tau$ و $X \in \tau$

۲)هر گاه به ازای $i = ۱, ..., n$، $V_i \in \tau$،آن‌گاه $V_۱ \cap V_۲ \cap ... \cap V_n \in \tau$

۳)هرگاه V_α گردایه دلخواهی از اعضای τ (متناهی، شمارش‌پذیر، یا شمارش‌ناپذیر)باشد، آن‌گاه $\cup_\alpha V_\alpha \in \tau$.

تعریف ۱۲.۱.۱ هرگاه τ یک توپولوژی در X باشد، آن‌گاه X را یک فضای توپولوژیک و اعضای τ را مجموعه‌های باز در X می‌نامند.

نکته

متداول‌ترین فضاهای توپولوژیک، فضاهای متری‌اند.

تعریف ۱۳.۱.۱ گردایه m از زیر مجموعه‌های مجموعه X را یک σـجبر در X نامیم اگر m از خواص زیر بهره‌مند باشد

۱) $X \in m$؛

۲) هرگاه $A \in m$ آن‌گاه $A^c \in m$ که در آن A^c متمم A نسبت به X است؛

۳) هرگاه $A = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$ و به ازای هر $n = 1, 2, 3, \ldots$، $A_n \in m$ آن‌گاه $A \in m$.

تعریف ۱۴.۱.۱ هرگاه m یک σـجبر در X باشد آن‌گاه X را یک فضای اندازه‌پذیر و اعضای m را مجموعه‌های اندازه‌پذیر در X می‌نامند.

تعریف ۱۵.۱.۱ هرگاه X یک فضای اندازه‌پذیر، Y یک فضای توپولوژیک، و f نگاشتی از X به‌توی Y باشد، آن‌گاه گوییم f اندازه‌پذیر است اگر به ازای هر مجموعه باز V در Y، $f^{-1}(V)$ یک مجموعه اندازه‌پذیر در X باشد.

قضیه ۱۶.۱.۱ قضیه همگرایی یکنوای لبگ

فرض کنیم f_n دنباله ای از توابع اندازه‌پذیر بر X باشد و نیز

۱) به ازای هر $x \in X$، $0 \leq f_1(x) \leq f_2(x) \leq \ldots \leq \infty$؛

۲) به ازای هر $x \in X$ وقتی $n \to \infty$، $f_n(x) \to f(x)$

در این صورت f اندازه‌پذیر است و

$$\int_X f_n d\mu \to \int_X f d\mu \quad , n \to \infty$$

برهان . ر.ک [۶]. □

قضیه ۱۷.۱.۱ هرگاه $f_n : X \to [\circ, \infty]$ به ازای $n = ۱, ۲, ۳, \ldots$ اندازه‌پذیر بوده و

$$f(x) = \sum_{n=۱}^{\infty} f_n(x) \quad (x \in X)$$

آن‌گاه

$$\int_X f d\mu = \sum_{n=۱}^{\infty} \int_X f_n d\mu$$

برهان . ر.ک [۶]. □

نتیجه

هرگاه به ازای $i, j = ۱, ۲, ۳, \ldots$، $a_{ij} \geq \circ$ آن‌گاه

$$\sum_{i=۱}^{\infty} \sum_{j=۱}^{\infty} a_{ij} = \sum_{j=۱}^{\infty} \sum_{i=۱}^{\infty} a_{ij}$$

تعریف ۱۸.۱.۱ $L^۱(\mu)$ را گردایه تمام توابع اندازه پذیر مختلط f بر X تعریف می‌کنیم هرگاه

$$\int_X |f| d\mu < \infty$$

قضیه ۱۹.۱.۱ هر گاه $f \in L^۱(\mu)$ آن‌گاه

$$\left| \int_X f d\mu \right| \leq \int_X |f| d\mu$$

برهان . ر.ک [۶]. □

تعریف ۲۰.۱.۱ هرگاه p و q اعداد حقیقی مثبتی باشند به طوریکه $p+q=pq$ و یا به‌طور معادل $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$، آن‌گاه p و q را یک جفت از نماهای مزدوج می‌نامند.

قضیه ۲۱.۱.۱ فرض کنیم p و q نماهای مزدوج بوده و $1<p<\infty$. همچنین X یک فضای اندازه با اندازه μ باشد. و نیز f و g توابعی اندازه‌پذیر بر X با برد در $[0,\infty]$ باشد در این صورت

$$\int_X fgd\mu \leq \{\int_X f^p d\mu\}^{\frac{1}{p}}\{\int_X g^q d\mu\}^{\frac{1}{q}} \tag{۱.۱}$$

و

$$\int_X (f+g)^p d\mu^{\frac{1}{p}} \leq \int_X f^p d\mu^{\frac{1}{p}} + \int_X g^p d\mu^{\frac{1}{p}} \tag{۲.۱}$$

نامساوی (۱.۱)، نامساوی هولدر و (۲.۱) نامساوی مینکوفسکی است هرگاه $p=q=2$، آن‌گاه (۲.۱) به نامساوی شوارتز مشهور است.

برهان . ر.ک [۶]. □

تعریف ۲۲.۱.۱ فرض کنید که $\tilde{x}$ یک تقریب برای x باشد، خطای مطلق $e_{\tilde{x}}$ و خطای نسبی $r_{\tilde{x}}$ با $x\neq 0$ به صورت زیر تعریف می‌شوند

$$e_{\tilde{x}}=x-\tilde{x}, \quad r_{\tilde{x}}=\frac{e_{\tilde{x}}}{x}.$$

خطای مطلق به طور ساده اختلاف بین مقدار واقعی و مقدار تقریبی می‌باشد. ولی خطای نسبی معیار بهتری برای سنجش خطا می‌باشد، چون به تناسب اعداد خطا را سنجش می کند.

۲.۱ معادلات انتگرال

تعریف ۱.۲.۱ معادله انتگرال، معادله‌ای است که در آن تابع مجهول $u(x)$ زیر علامت انتگرال قرار دارد یعنی در حالت کلی فرم زیر را دارد

$$u(x) = f(x) + \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} K(x,t,u(t))dt$$

یک نمونه‌از معادله انتگرال که در آن $u(x)$ تابع مجهولی است و می‌بایست معلوم شود، به صورت زیر است

$$u(x) = f(x) + \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} K(x,t)u(t)dt. \qquad (۳.۱)$$

$K(x,t)$، هسته معادله انتگرال نامیده می‌شود. $\alpha(x)$ و $\beta(x)$ حدود انتگرال‌گیری هستند. در ضمن $K(x,t)$ و $f(x)$ از قبل معلوم‌می‌باشند.

هدف از حل معادلات انتگرال تعیین تابع مجهول $u(x)$ است. اگر تابع مجهول $u(x)$ در تابع زیر علامت انتگرال، خطی باشد، مشابه (۳.۱) ، معادله انتگرال را خطی گویند. اما اگر تابع $u(x)$ زیر علامت انتگرال، در (۳.۱) با توابعی غیرخطی نظیر $u^{2}(x)$ یا $\cos u(x)$ یا $e^{u(x)}$ و غیره جایگزین شود، آنگاه معادله انتگرال را غیرخطی می گویند.

تعریف ۲.۲.۱ معادلات انتگرال خطی فردهلم

شکل استاندارد معادلات انتگرال خطی فردهلم، که در آنها حد پایین و حد بالای انتگرال‌گیری به ترتیب اعداد ثابت a و b هستند، به صورت زیر می‌باشد.

$$\phi(x)u(x) = f(x) + \lambda \int_{a}^{b} K(x,t)u(t)dt, \qquad a \leqslant x,t \leqslant b, \qquad (۴.۱)$$

که در آن $K(x,t)$ هسته معادله انتگرال و تابع $f(x)$ از قبل مشخص بوده و λ یک پارامتر معلوم می‌باشد. بر حسب این که $\phi(x)$ کدام یک از مقادیر زیر را انتخاب کند، معادلات انتگرال فردهلم خطی، به دو دسته تقسیم می‌شوند.

۱) اگر $\phi(x) = 0$، معادله (۴.۱) به معادله‌ی زیر تبدیل می‌شود.

$$f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)u(t)dt = 0$$

این معادله را معادله انتگرال فردهلم نوع اول می‌نامند.

۲) اگر $\phi(x) = 1$، معادله (۴.۱) به شکل زیر در خواهد آمد.

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)u(t)dt$$

این معادله را معادله انتگرال فردهلم نوع دوم می‌گویند. اگر در این معادله $f(x) \equiv 0$، معادله انتگرال فوق را معادله انتگرال فردهلم نوع دوم خطی همگن گویند. در غیر این صورت، معادله انتگرال فوق غیر همگن می‌باشد.

تعریف ۳.۲.۱ معادلات انتگرال خطی ولترا

شکل استاندارد معادلات خطی ولترا، یعنی معادلاتی که در آنها حد بالا یا پایین انتگرال‌گیری به جای این‌که عدد ثابتی باشد به صورت تابعی از x ظاهر می‌شود، به فرم زیر است.

$$\phi(x)u(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x,t)u(t)dt, \qquad (۵.۱)$$

که در آن تابع مجهول یعنی $u(x)$ زیر علامت انتگرال به صورت خطی می‌باشد. معادلات انتگرال ولترا را می‌توان با توجه به مقدار $\phi(x)$ به دو گروه دسته بندی کرد.

۱) اگر $\phi(x) = 0$، معادله (۵.۱) به صورت زیر تبدیل خواهد شد.

$$f(x) + \lambda \int_a^x K(x,t)u(t)dt = 0$$

این معادله را معادله انتگرال ولترا نوع اول می گویند.

۲) اگر $\phi(x) = 1$، آنگاه معادله (۵.۱) به شکل زیر تبدیل می‌شود.

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x,t)u(t)dt$$

این معادله را معادله انتگرال ولترا نوع دوم می‌نامند. هرگاه در این معادله $f(x) = 0$، معادله انتگرال فوق را همگن و در غیر این صورت معادله انتگرال را غیر همگن می‌نامند.

تعریف ۴.۲.۱ معادلات انتگرال — دیفرانسیل خطی

در این گونه معادلات، تابع مجهول $u(x)$ در دو طرف معادله ظاهر می‌شود. در یک طرف زیر علامت انتگرال و در طرف دیگر، به صورت یک مشتق معمولی نمایان می‌شود.

در زیر چند مثال از معادلات انتگرال — دیفرانسیل آورده شده است.

$$u''(x) = -x + \int_0^x (x-t)u(t)dt, \qquad u(0) = 0, u'(0) = 1, \tag{۶.۱}$$

$$u'(x) = -\sin(x) - 1 - \int_0^x u(t)dt, \qquad u(0) = 1, \tag{۷.۱}$$

$$u'(x) = 1 - \frac{1}{3}x + \int_0^1 xtu(t)dt, \qquad u(0) = 1. \tag{۸.۱}$$

معادلات انتگرال (۶.۱) و (۷.۱) را معادلات انتگرال — دیفرانسیل ولترا و معادله (۸.۱) را معادله انتگرال — دیفرانسیل فردهلم می‌نامند. این تقسیم بندی بر اساس حدود انتگرال گیری انجام شده است.

تعریف ۵.۲.۱ معادلات انتگرال منفرد خطی

معادله انتگرال از نوع اول

$$f(x) = \lambda \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} K(x,t)u(t)dt, \tag{۹.۱}$$

یا از نوع دوم

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} K(x,t)u(t)dt, \tag{۱۰.۱}$$

را که در آنها حد پایین، یا بالا و یا هر دو نامتناهی باشند، معادله انتگرال منفرد خطی می‌نامند. به علاوه اگر هسته معادلات انتگرال (۹.۱) و (۱۰.۱) در یک نقطه یا در نقاط بیشتری از دامنه‌ی انتگرال گیری نامتناهی باشد باز هم این گونه معادلات را معادلات منفرد خطی می‌نامند.

معادله انتگرال

$$u(x) = ۲x + ٦ \int_{۰}^{\infty} \sin(x-t)u(t)dt,$$

به دلیل نامتناهی بودن حوزه‌ی انتگرال گیری منفرد می‌باشد.

معادله انتگرال

$$x^{۲} = \int_{۰}^{x} \frac{۱}{\sqrt{x-t}}u(t)dt,$$

منفرد است زیرا هسته $K(x,t)$ هنگامی که $t \to x$، نامتناهی می‌شود.

تعریف ٦.۲.۱ هسته $K(x,t)$، هسته متقارن نامیده می‌شود هر گاه

$$K(x,t) = K(t,x) \qquad \forall (x,t)$$

تعریف ۷.۲.۱ فرض کنیم $K(x,t)$ یک هسته متقارن باشد در این صورت برای هر عددی مانند λ که به ازای آن معادله

$$u(x) - \lambda \int K(x,t)u(t)dt = ۰ \qquad ۰ \leq x \leq ۱$$

جواب نابدیهی داشته باشد یک مقدار ویژه $K(x,t)$ و جواب نا بدیهی متناظر با آن، یک تابع ویژه $K(x,t)$ نامیده می‌شود.

تعریف ۸.۲.۱ شرط منظم بودن

$K(x,t)$ با $a \leqslant x \leqslant b$ و $a \leqslant t \leqslant b$ را منظم گویند اگر شرط زیر برقرار باشد.

$$\int_{a}^{b}\int_{a}^{b} K(x,t)dxdt \prec \infty.$$