بسم الله الرحمن الرحيم

دانشکده علوم ریاضی
گروه ریاضی محض

پایان‌نامه کارشناسی ارشد
رشته ریاضی محض، گرایش جبر

عنوان

حلقه‌های تعویض‌پذیری که ایده‌آل‌های آن‌ها تشکیل جبر- MV می‌دهند

پژوهشگر
اعظم نیک‌زاد چالش‌تری
استادان راهنما
دکتر محمدرضا ریسمانچیان و دکتر فرهاد خاکسار حقانی
استاد مشاور
دکتر علیرضا نقی‌پور

دی ۱۳۹۱

به پاس عاطفه سرشار و گرمای امید بخش وجودشان، که در این سردترین روزگاران بهترین پشتیبان است،
به پاس قلب های بزرگشان، که فریادرس است و سرگردانی و ترس در پناهشان به شجاعت می گراید،
و به پاس ایثار و محبت های بی دریغشان، که هرگز فروکش نمی کند،
این مجموعه را به مهربانان پدر و مادر عزیزم و پناه خستگی هایم همسر عزیزم تقدیم می کنم.

سپاس گزاری...

ای خدای مهربان تو با شکوه ترین لحظه موعودی، همواره دوستت خواهم داشت چرا که: به من آموختی که باید، سپیدی ها را مجذور و از سیاهی ها جذر گرفت، زیبایی ها را در ده به توان ده ضرب کرد و زشتی ها را بر آن تقسیم کرد. به من آموختی تا منحنی اکیداً نزولی پشت خمیده آن پیرزن دردمند را بر صفحه کاهگلی دیوار کلبه اش همواره به خاطر داشته باشم. تو علامت را در تساوی اضلاع مثلث متساوی الاضلاع، استواری را در مثلث قائم الزاویه و نظم را در قالب تمامی n - ضلعی های منتظم به ما نمایاندی. در محضر بزرگوارت آموختم که باید از همه بدی های دیگران فاکتور گرفت. آموختم که اعداد حقیقی با در برداشتن اعداد گنگ زیباترند، چرا که حقیقت زیباست و آموختم که هر روزمان باید نقطه عطفی باشد. برای تغییر علامت از منفی به مثبت بی نهایت، از سرازیری به سمت اعلا و از اکیداً نزولی به سمت اکیداً صعودی، به سمت مثبت بی نهایت، به سمت آن حقیقت نامتناهی. آموختم که همه چیز را در قالب اعداد مثبت و در ناحیه اول مثلثاتی که ناحیه مثبتها است، بررسی کنیم و اکسترمم لطف و صمیمیت، پاکی و صفا را ماکزیمم در نظر بگیریم و در همان حال، کینه و نفرت را به سمت صفر میل دهیم. . تو را همیشه تاریخ سپاس خواهم گفت چرا که در محضر تو آموختم چگونه انسان باشم و در خدمت به دیگران از پارامترهای موجود پا را فراتر نهم و در بینهایت عشق ورزیدن غوطه ور گردم. تو درس زندگی را در قالب فرمولها و روابط منطقی ریاضی به من آموختی و مرا با هنر ریاضی ورزیدن، مأنوس کردی. بر خود لازم می دانم از همه عزیزانی که در جهت به سرانجام رساندن این مجموعه مرا یاری نمودند، قدردانی نمایم. مراتب قدردانی و سپاس خود را از زحمات بی دریغ استادان بزرگوارم جناب آقای دکتر محمدرضا ریسمانچیان و دکتر فرهاد خاکسار حقانی ابراز می نمایم، که قطعاً بدون راهنمایی های ارزنده ایشان، این مجموعه به انجام نمی رسید. از استاد گرانقدر، جناب آقای دکتر علیرضا نقی پور، که زحمت مطالعه و مشاوره این رساله را تقبل فرمودند، کمال امتنان را دارم، هم چنین از خواهر گرامی ام به خاطر کمک های فراوانش کمال تشکر را دارم.

اعظم نیک زاد چالش تری

دی ۱۳۹۱

چکیده

در این پایان نامه ما رده‌ای از حلقه‌های تعویض‌پذیر را معرفی می‌کنیم به طوری که مشبکه ایده‌آل‌های آن، به‌وسیله ضرب ایده‌آل‌ها تکمیل شده است یعنی این‌که نیم‌حلقه از ایده‌آل‌ها یکریخت با جبر ـ MV است. این رده از حلقه‌های تعویض‌پذیر، جمع مستقیم حلقه‌های زنجیر آرتینی موضعی یکدار هستند. از جمله حلقه‌هایی که در این رده قرار دارند، حلقه‌های لوکاسوییچ می‌باشند که در ادامه به بررسی برخی خواص آن‌ها از جمله زیر حلقه‌های لوکاسوییچ، حلقه‌های خارج قسمتی لوکاسوییچ و... می‌پردازیم. شرایطی را روی جبر ـ MV اعمال کرده و جبرهای ـ MV جدیدی را به‌دست می‌آوریم که بعضی از آن‌ها می‌توانند با جبر ـ MV مربوط به حلقه‌ی خارج قسمتی حلقه لوکاسوییچ و همین‌طور با جبر ـ MV، $A\left(M\right)$ یکریخت باشند به طوری که در آن M ایده‌آل خودتوان در حلقه لوکاسوییچ است.

کلمات کلیدی : حلقه‌های لوکاسوییچ ، حلقه‌های تعویض‌پذیر، جبر ـ MV

فهرست مطالب

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی ۶۶

مقدمه

مطالعه جبری منطق کلاسیک از طریق جبرهای بولی حاصل می‌شود. برای منطق چند ارزشی لوکاسوییچ نظیر جبری جبرهای بولی، جبرهای ـ MV هستند ([۷] و [۸] را ببینید). جبرهای بولی می‌توانند مطابق نظریه حلقه‌ها رده‌بندی شوند. سؤال این است که چه رابطه‌ای بین نظریه حلقه‌ها و نظریه جبرهای ـ MV وجود دارد؟

در سال ۱۹۸۶ بلوس [۱] نشان داد فضای ایده‌آل اول از جبر ـ MV همانند حلقه‌های تعویض‌پذیر یک فضای طیفی است ([۱] را ببینید). در سال ۱۹۸۶ ماندیسی [۲] یک رابطه بین جبرهای ـ MV و AF C^* ـ جبرها از طریق گروه گروتندیک [۳] K_0 نشان داده است ([۱۵] را ببینید). لوین [۴] رابطه مستقیم‌تری بین حلقه اعداد و گوناگونی جبرهای ـ MV حاصل از $\mathcal{C}$، (جبرهای ـ MV که در [۲] توصیف شده‌اند)، نشان داده است ([۱۴] را ببینید). در سال ۱۹۹۸ ون نیومن [۵] نشان داد اگر نوع خاصی از مشبکه مفروض باشد (هندسه پیوسته)، یک حلقه منظم وجود دارد به طوری که مشبکه ایده‌آل‌های اصلی آن یکریخت با مشبکه مفروض است([۱۷] را ببینید).

در این پایان نامه ما رده‌ای از حلقه‌های تعویض‌پذیر را معرفی می‌کنیم به طوری که مشبکه ایده‌آل‌های آن، به‌وسیله ضرب ایده‌آل‌ها تکمیل شده است یعنی این‌که نیم‌حلقه از ایده‌آل‌ها یکریخت با جبر ـ MV است. از دیدگاه منطق، ضرب ایده‌آل منطبق با حاصل‌ضرب منطق چند ارزشی و پوچ‌سازی ایده‌آل منطبق با خنثی‌سازی چند ارزشی است. شرایطی که روی حلقه قرار داده‌ایم نسبتاً قوی می‌باشد و پیش‌بینی می‌شود رده‌ی حاصل از حلقه‌ها کوچک شود. این یک مطالعه مقدماتی روی چنین حلقه‌هایی است که در این‌جا آن‌ها را حلقه‌های لوکاسوییچ می‌نامیم.

---

[۱] Belluce
[۲] Mundici
[۳] Grothendieck
[۴] Lewin
[۵] Von Neuman

فهرست نمادها

فصل ۱

مقدمات و پیش‌نیازها

هر کشف تازه‌ای که در علوم طبیعی و صنعت رخ می‌دهد
تنها از راه به کار بردن نتیجه‌گیری‌های جدید در عمل
و یا زنده کردن نظریه‌های فراموش شده ریاضی
است. به این ترتیب نظریه‌های ریاضی
از قبل راه پیشرفت علم و صنعت
را پیش بینی کرده‌اند.
(ب. فلدیوم)

اهداف کلی فصل

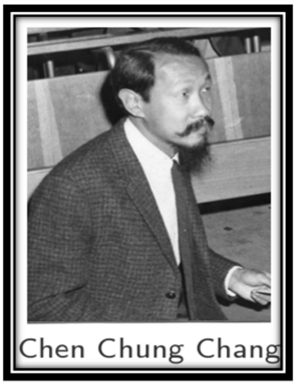
در این فصل به معرفی ساختار جبری جدیدی به نام جبرهای ـ MV می‌پردازیم. با استفاده از مرجع [الف] مشبکه را معرفی کرده و بعضی از خواص آن را بیان می‌کنیم در ادامه نشان می‌دهیم که می‌توانیم به جبرهای ـ MV ساختار مشبکه‌ای بدهیم. با استفاده از مرجع [۷] ساختار مشبکه‌ای جبرهای ـ MV را بیشتر مورد بررسی قرار می‌دهیم. هم‌چنین بعضی از زیرساختارهای جبرهای ـ MV از جمله ایده‌آل‌ها، جبرهای ـ MV ساده و . . . را معرفی می‌کنیم. ملاحظه می‌کنیم که جبرهای ـ MV از همان دستورالعمل‌های جبر عمومی برخوردار هستند. در ادامه با معرفی نیم حلقه لوکاسوییچ یک رابطه دوگان بین جبرهای ـ MV و نیم حلقه‌های لوکاسوییچ به‌دست می‌آوریم.

۱.۱ جبرهای ـ MV

در سال ۱۹۵۸ جبرهای ـ MV توسط چانگ [۱] به منظور ارایه یک اثبات جبری برای تامیت منطق چندارزشی لوکاسوییچ ارایه شدند. ساختار جبری به‌دست آمده از این اثبات منجر به تشکیل جبرهای ـ MV گردید.

---

[۱] C. C. Chang



شکل ۱.۱: چانگ

تعریف ۱.۱.۱. جبر ـ MV دستگاهی به صورت $\langle A, \oplus, \odot, ^*, ۰, ۱\rangle$ می‌باشد، به‌طوری‌که A یک مجموعه غیرتهی، $\langle A, \oplus, ۰\rangle$ یک تک‌واره تعویض‌پذیر با عنصر همانی ۰، $\langle A, \odot, ۱\rangle$ یک تک‌واره ضربی با عنصر همانی ۱، * عمل یکتایی روی عناصر A و $۰, ۱ \in A$ می‌باشد.

هر جبر ـ MV از اصول موضوع زیر پیروی می‌کند.

Ax.۱. $x \oplus y = y \oplus x$	Ax.۲. $x \odot y = y \odot x$
Ax.۳. $x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z$	Ax.۴. $x \odot (y \odot z) = (x \odot y) \odot z$
Ax.۵. $x \oplus x^* = ۱$	Ax.۶. $x \odot x^* = ۰$
Ax.۷. $x \oplus ۱ = ۱$	Ax.۸. $x \odot ۰ = ۰$
Ax.۹. $x \oplus ۰ = x$	Ax.۱۰. $x \odot ۱ = x$
Ax.۱۱. $(x \oplus y)^* = x^* \odot y^*$	Ax.۱۲. $(x \odot y)^* = x^* \oplus y^*$

هم‌چنین در جبر ـ MV، A برای هر $x \in A$ داریم

$$(x^*)^* = x$$

و هم‌چنین

$$۰^* = ۱.$$

مثال ۲.۱.۱. فرض کنیم $\mathcal{G}$ زیرمجموعه‌ای از اعداد حقیقی فاصله $[۰, ۱]$ باشد، به‌طوری‌که $۰, ۱ \in \mathcal{G}$. اگر $x, y \in \mathcal{G}$، آن‌گاه

$$x \oplus y = min\,(۱, x + y) \in \mathcal{G},$$

$$x \odot y = max\,(۰, x + y - ۱) \in \mathcal{G},$$

$$x^* = ۱ - x \in \mathcal{G},$$

به‌طوری‌که $+$ و $-$ نشان دهنده جمع و تفریق معمولی اعداد حقیقی است. در این صورت دستگاه $\langle \mathcal{G}, \oplus, \odot, ^*, ۰, ۱\rangle$ به صورت یک جبر ـ MV است. که به آن جبر ـ MV استاندارد می‌گوییم.

۲.۱ مشبکه

تعریف ۱.۲.۱. رابطه انعکاسی، پادمتقارن و متعدی روی مجموعه X را یک رابطه ترتیب جزئی روی مجموعه X می‌نامیم.

تعریف ۲.۲.۱. مجموعه X همراه با یک رابطه ترتیب جزئی را یک مجموعه مرتب جزئی (Poset) [۲] می‌نامیم. اگر X یک مجموعه‌ی مرتب جزئی با رابطه ترتیب جزئی $\leq$ باشد، آن‌گاه می‌نویسیم $(X, \leq)$.

تعریف ۳.۲.۱. مجموعه مرتب جزئی $(X, \leq)$ را یک مجموعه مرتب خطی یا یک زنجیر می‌نامیم هرگاه به ازای هر $x, y \in X$، $x \leq y$ یا $y \leq x$. بنابراین یک مجموعه مرتب خطی یا یک زنجیر، یک مجموعه مرتب جزئی است هرگاه هر دو عنصر آن مقایسه‌پذیر باشند.

تعریف ۴.۲.۱. فرض کنیم $(X, \leq)$ یک مجموعه مرتب جزئی و $\{a, b\}$ زیر مجموعه‌ای از آن باشد. عنصر $c \in X$ را یک کران بالای مجموعه $\{a, b\}$ می‌نامیم هرگاه $a \leq c$ و $b \leq c$.
عنصر $d \in X$ را کوچکترین کران بالای مجموعه $\{a, b\}$ می‌نامیم هرگاه

الف) d یک کران بالا برای مجموعه $\{a, b\}$ باشد.

ب) اگر $c \in S$ یک کران بالای مجموعه $\{a, b\}$ باشد، آن‌گاه $d \leq c$.

نمادگذاری: کوچکترین کران بالای $\{a, b\}$ را در $(X, \leq)$، در صورت وجود با $a \vee b$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۵.۲.۱. فرض کنیم $(X, \leq)$ یک مجموعه مرتب جزئی و $\{a, b\}$ زیرمجموعه‌ای از آن باشد. عنصر $c \in X$ را یک کران پایین مجموعه $\{a, b\}$ می‌نامیم هرگاه $c \leq a$ و $c \leq b$.
عنصر $d \in X$ را بزرگترین کران پایین مجموعه $\{a, b\}$ می‌نامیم هرگاه

الف) d یک کران پایین برای مجموعه $\{a, b\}$ باشد.

ب) اگر $c \in X$ یک کران پایین برای مجموعه $\{a, b\}$ باشد، آن‌گاه $c \leq d$.

نمادگذاری: بزرگترین کران پایین مجموعه $\{a, b\}$ را در $(X, \leq)$ در صورت وجود با $a \wedge b$ نشان می‌دهیم.

یک وسیله مفید در مطالعه مجموعه‌های مرتب جزئی، نمودار مجموعه‌ی مرتب جزئی است. فرض کنیم $(X, \leq)$ یک مجموعه مرتب جزئی و $x, y \in X$ باشد. در این صورت می‌گوییم y عنصر x را می‌پوشاند و آن را با نماد $y \succ x$ نشان می‌دهیم، هرگاه $x \leq y$، $x \neq y$ و هیچ $z \in X$ موجود نباشد به‌طوری‌که $x \leq z \leq y$، $z \neq x$ و $y \neq z$. عناصر X را به وسیله خودشان در صفحه نمایش می‌دهیم به‌طوری‌که هرگاه $x \leq y$، آن‌گاه y بالای x اتفاق می‌افتد و x و y به وسیله یک پاره‌خط به هم متصل می‌کنیم اگر و فقط اگر y عنصر x را بپوشاند. نمودار حاصل را نمودار مجموعه مرتب جزئی $(X, \leq)$ می‌نامیم. در نمودار مجموعه مرتب جزئی $(X, \leq)$ پایین‌ترین عنصر را در صورت وجود با ۰ نشان می‌دهیم، هم‌چنین بالاترین عنصر را با ۱ نشان می‌دهیم.

---
[۲] Partially ordered set

تعریف ۶.۲.۱. مجموعه مرتب جزئی $(L, \leq)$ را یک مشبکه می‌نامیم هرگاه به ازای هر $a, b \in L$، $a \vee b$ و $a \wedge b$ در L موجود باشند.

تعریف ۷.۲.۱. مشبکه $(L, \leq)$ را یک مشبکه کراندار می‌نامیم هرگاه مشبکه $(L, \leq)$ دارای هر دو عنصر 0 و 1 باشد.

تعریف ۸.۲.۱. اگر L_1 و L_2 دو مشبکه باشند، تابع $f : L_1 \longrightarrow L_2$ را یک همریختی بین مشبکه L_1 و L_2 می‌نامیم هرگاه به ازای هر $a, b \in L_1$ داشته باشیم

$$f\left(a \vee b\right) = f\left(a\right) \vee f\left(b\right)$$

و

$$f\left(a \wedge b\right) = f\left(a\right) \wedge f\left(b\right).$$

اگر همریختی f دوسویی باشد می‌گوییم تابع f یک یکریختی بین مشبکه L_1 و L_2 می‌باشد.

تعریف ۹.۲.۱. زیر مجموعه I از مشبکه $(L, \leq)$ را یک ایده‌آل مشبکه می‌نامیم هرگاه غیرتهی باشد و برای هر $x, y \in I$ به‌دست آوریم $x \vee y \in I$.

تعریف ۱۰.۲.۱. اگر L مشبکه‌ای متناهی و غیرتهی باشد. عنصر $0 < a \in L$ را یک اتم از مشبکه L می‌نامیم هرگاه عنصری چون $x \in L$ به‌طوری‌که $0 < x < a$ موجود نباشد. مجموعه اتم‌های L را با $\mathcal{A}\left(L\right)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۱۱.۲.۱. مشبکه L را اتمی می‌نامیم هرگاه برای هر $x \in L$ یک زیر مجموعه $A \subseteq \mathcal{A}\left(L\right)$ موجود باشد به‌طوری‌که x برابر با $\bigvee A$ شود، یعنی اگر $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$، آن‌گاه $x = a_1 \vee a_2 \vee \cdots \vee a_n$.

تعریف ۱۲.۲.۱. عنصر $a < 1$ از مشبکه L را یک کو - اتم می‌نامیم هرگاه عنصری چون $x \in L$ به گونه‌ای که $a < x < 1$، موجود نباشد.

تعریف ۱۳.۲.۱. مشبکه $(L, \leq)$ را تام می‌نامیم هرگاه برای هر مجموعه مرتب جزئی $S \subseteq L$ کوچکترین کران بالا و بزرگترین کران پایین وجود داشته باشد.

تعریف ۱۴.۲.۱. مشبکه $(L, \leq)$ را یک مشبکه توزیع‌پذیر می‌نامیم هرگاه برای هر $a, b, c \in L$ شرایط زیر برقرار باشند:

الف) $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$.

ب) $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$.

معمولاً چون ما مشبکه‌ها را به عنوان مجموعه‌های مرتب جزئی خاص در نظر می‌گیریم و مشبکه‌ها به صورت جبرهایی با دو عمل دوتایی $\vee$ و $\wedge$ هستند. از این‌رو $L = \langle L, \leq\rangle$ و $L = \langle L, \vee, \wedge\rangle$ دارای ساختار یکسانی می‌باشند.

به وسیله عملگرهای $\vee$ و $\wedge$ می‌توانیم به جبرهای ـ MV ساختار مشبکه‌ای بدهیم به این صورت که اگر $A = \langle A, \oplus, \odot, ^*, \circ, ۱\rangle$ یک جبر ـ MV باشد آن‌گاه عملگرهای $\vee$ و $\wedge$ را روی عناصر A به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$x \vee y = x \oplus (x^* \odot y)\,,$$

$$x \wedge y = x \odot (x^* \oplus y)\,.$$

با توجه به تعریف $\vee$ و $\wedge$ به صورت بالا می‌توانیم بگوییم، $\langle A, \vee, \wedge, \circ, ۱\rangle$ یک مشبکه کران‌دار، توزیع‌پذیر با کوچکترین عنصر $\circ$ و بزرگترین عنصر ۱ می‌باشد که آن را با $L(A)$ نشان می‌دهیم. رابطه ترتیب جزئی $\leq$ را روی عناصر جبر ـ MV، A این‌گونه تعریف می‌کنیم که $x \leq y$ اگر و فقط اگر $x \vee y = y$ اگر و فقط اگر $x \wedge y = x$.

در هر جبر ـ MV اصول موضوع زیر برقرار هستند:

Ax.۱۳.	$x \vee y = y \vee x$	Ax.۱۴.	$x \wedge y = y \wedge x$
Ax.۱۵.	$x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$	Ax.۱۶.	$x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$
Ax.۱۷.	$x \odot (y \vee z) = (x \odot y) \vee (x \odot z)$	Ax.۱۸.	$x \oplus (y \wedge z) = (x \oplus y) \wedge (x \oplus z)$

تعریف ۱.۲.۱۵. فرض کنیم S یک مجموعه غیرتهی باشد. گردایه $\mathcal{A}$ از زیر مجموعه‌های S را یک جبر می‌نامیم هرگاه $S \in \mathcal{A}$ و $\mathcal{A}$ تحت عمل‌های متمم‌گیری، تشکیل اجتماع‌های متناهی از عناصر $\mathcal{A}$ و تشکیل اشتراک‌های متناهی از عناصر $\mathcal{A}$ بسته باشد.

تعریف ۱.۲.۱۶. مجموعه S را یک جبر بولی می‌نامیم هرگاه شامل دو عنصر خاص $\circ$ و ۱ باشد و هم‌چنین دارای عمل‌های جمع $(+)$، ضرب $(\cdot)$ و متمم‌گیری $(\complement)$ باشد و در اصول موضوع زیر صدق کند:

قانون تعویض‌پذیری

$$x + y = y + x \qquad x \cdot y = y \cdot x$$

قانون توزیع‌پذیری

$$x + (y + z) = (x + y) + z \qquad x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$$

قانون شرکت‌پذیری

$$x + (y \cdot z) = (x + y) \cdot (x + z) \qquad x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$$

رفتار $\circ$ و ۱

$$x + \circ = x \qquad x \cdot ۱ = x$$

رفتار متمم‌ها

$$x + \acute{x} = ۱ \qquad x \cdot \acute{x} = ۱$$

مثال ۱.۲.۱۷. اگر M مجموعه‌ای ناتهی باشد، آن‌گاه $\langle \mathcal{P}(M), \bigcup, \bigcap, \complement, \emptyset, M\rangle$ یک جبر بولی است.

مثال ۱۸.۲.۱. هر جبر بولی یک جبر ـ MV است. فرض کنیم B یک جبر از زیرمجموعه‌های غیرتهی مجموعه X باشد، برای هر $E, F \in B$ قرار می‌دهیم

$$E \oplus F = E \cup F,$$

$$E \odot F = E \cap F,$$

$$E^* = X \diagdown E,$$

$$۱ = X,$$

$$\circ = \emptyset.$$

در این صورت $\langle B, \oplus, \odot, ^*, \circ, ۱ \rangle$ به صورت جبر ـ MV است، به‌طوری‌که رابطه $\leq$، رابطه شمول است.

در مثال (۲.۱.۱) عمل‌های $\vee$ و $\wedge$ را می‌توانیم به صورت زیر تعریف کنیم

$$x \vee y = max\,(x, y)\,,$$

$$x \wedge y = min\,(x, y)\,.$$

هم‌چنین رابطه $\leq$، ترتیب معمولی اعداد حقیقی است.

مثال ۱۹.۲.۱. فرض کنیم X مجموعه غیر تهی و $\mathcal{F} \subseteq [\circ, ۱]^X$ مجموعه‌ای از توابع $f : X \longrightarrow [\circ, ۱]$ باشد، به‌طوری‌که

الف) اگر برای هر $t \in X$ داشته باشیم، $۱ = (t)\,۱$ و $\circ = (t)\,\circ$، آن‌گاه $\circ \in \mathcal{F}$ و $۱ \in \mathcal{F}$.

ب) اگر $f, g \in F$ آن‌گاه

$$f \oplus g = min\,(۱, f + g) \in \mathcal{F},$$

$$f \odot g = max\,(\circ, f + g - ۱) \in \mathcal{F},$$

به‌طوری‌که برای هر $t \in X$،

$$(f + g)\,(t) = f\,(t) + g\,(t)\,.$$

پ) اگر $f \in \mathcal{F}$ آن‌گاه

$$f^* = (۱ - f) \in \mathcal{F}.$$

در این صورت دستگاه $\langle \mathcal{F}, \oplus, \odot, ^*, \circ, ۱ \rangle$ به صورت یک جبر ـ MV است. توجه داریم که عمل‌های $\vee$ و $\wedge$ روی $\mathcal{F}$ به صورت زیر هستند

$$f \vee g = \max\,(f, g)\,,$$

$$f \wedge g = \min\,(f, g)\,.$$

هم‌چنین برای هر $t \in X$، $f \leq g$ اگر و فقط اگر $f\,(t) \leq g\,(t)$.

گزاره ۱.۲.۲۰. *اگر A یک جبر- MV باشد، آن‌گاه برای هر $x, y \in A$ داریم*

الف) $x \vee ۱ = ۱$, $x \wedge ۰ = ۰$, $x \vee ۰ = x = x \wedge ۱$.

ب) $x \vee x = x = x \wedge x$.

پ) $(x \wedge y)^* = x^* \vee y^*$, $(x \vee y)^* = x^* \wedge y^*$.

ت) $x \wedge (x \vee y) = x = x \vee (x \wedge y)$.

ث) *اگر* $x \oplus y = ۰$*، آن‌گاه* $x = y = ۰$.

ج) *اگر* $x \odot y = ۱$*، آن‌گاه* $x = y = ۱$.

چ) *اگر* $x \vee y = ۰$*، آن‌گاه* $x = y = ۰$.

ح) *اگر* $x \wedge y = ۱$*، آن‌گاه* $x = y = ۱$.

برهان.

الف) با توجه به تعریف $\vee$ و $\wedge$ داریم

$$x \vee ۰ = (x \oplus ۰^*) \odot ۰ = (x \oplus ۱) \odot ۰ = ۱ \odot ۰ = ۰.$$

$$x \vee ۱ = (x \odot ۱^*) \oplus ۱ = (x \odot ۰) \oplus ۱ = ۰ \oplus ۱ = ۱.$$

$$x \vee ۰ = (x \odot ۰^*) \oplus ۰ = (x \odot ۱) \oplus ۰ = x \oplus ۰ = x.$$

$$x \wedge ۱ = (x \oplus ۱^*) \odot ۱ = (x \oplus ۰) \odot ۱ = x \odot ۱ = x.$$

ب) هم‌چنین

$$x \vee x = (x \odot x^*) \oplus x = ۰ \oplus x = x.$$

$$x \wedge x = (x \oplus x^*) \odot x = ۱ \odot x = x.$$

پ)

$$\begin{aligned}(x \vee y)^* &= ((x \odot y^*) \oplus y)^* \\ &= (x \odot y^*)^* \odot y^* \\ &= (x^* \oplus y^{**}) \odot y^* \\ &= (x^* \oplus y) \odot y^* \\ &= x^* \wedge y^*.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(x \wedge y)^* &= ((x \oplus y^*) \odot y)^* \\ &= (x \oplus y^*)^* \oplus y^* \\ &= (x^* \odot y) \oplus y^* \\ &= x^* \vee y^*.\end{aligned}$$

ت)

$$\begin{aligned} x \vee (x \wedge y) &= (x \wedge y) \vee x \\ &= (y \wedge x) \vee x \\ &= ((y \oplus x^*) \odot x) \vee x \\ &= (((y \oplus x^*) \odot x) \odot x^*) \oplus x \\ &= (y \oplus x^* \odot x \odot x^*) \oplus x \\ &= (y \oplus x^* \odot ٠) \oplus x \\ &= ٠ \oplus x \\ &= x. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x \wedge (x \vee y) &= (x \vee y) \wedge x \\ &= (y \vee x) \wedge x \\ &= ((y \odot x^*) \oplus x) \wedge x \\ &= (((y \odot x^*) \oplus x) \oplus x^*) \odot x \\ &= (y \odot x^* \oplus x \oplus x^*) \odot x \\ &= (y \odot x^* \oplus ١) \odot x \\ &= ١ \odot x \\ &= x. \end{aligned}$$

ث) اگر $x \oplus y = ٠$، آن‌گاه

$$\begin{aligned} ٠ &= x \wedge ٠ \\ &= x \wedge (x \oplus y) \\ &= (x \oplus ٠) \wedge (x \oplus y) \\ &= x \oplus (٠ \wedge y) \\ &= x \oplus ٠ \\ &= x. \end{aligned}$$

به همین ترتیب $y = ٠$.

ج) با استفاده از ث) به‌دست می‌آید.

چ) اگر $x \vee y = ۰$، آن‌گاه با استفاده از تعریف $\vee$ داریم $(x \odot y^*) \oplus y = ۰$. از این‌رو با توجه به ث) به‌دست می‌آوریم $y = ۰$ و هم‌چنین،

$$\begin{aligned} ۰ &= x \vee y \\ &= x \vee ۰ \\ &= x. \end{aligned}$$

ح) فرض کنیم $x \wedge y = ۱$. بنابراین با توجه به $(x \wedge y)^* = x^* \vee y^*$، به‌دست می‌آوریم $x^* \vee y^* = ۱^* = ۰$. از این‌رو با استفاده از قسمت چ) نتیجه می‌گیریم $x^* = ۰ = y^*$، لذا، $x = ۱ = y$. □

گزاره ۲۱.۲.۱. *فرض کنیم A یک جبر- MV و $x, y \in A$. در این صورت احکام زیر برقرار هستند:*

الف) $۰ \leq x \leq ۱$.

ب) $x \leq x$.

پ) اگر $x \leq y$ *و* $y \leq z$*، آن‌گاه* $x \leq z$.

ت) اگر $x \leq y$ *و* $y \leq x$*، آن‌گاه* $x = y$.

ث) $x \leq y$ *اگر و فقط اگر* $y^* \leq x^*$.

برهان. احکام الف) – ت) با استفاده از رابطه ترتیب جزئی $\leq$، تعریف $\vee$، $\wedge$ و اصول موضوع بیان شده به راحتی نتیجه می‌شوند.

ث) فرض کنیم $x \leq y$، طبق رابطه ترتیب جزئی $\leq$ خواهیم داشت $x \wedge y = x$ لذا

$$\begin{aligned} x^* &= (x \wedge y)^* \\ &= x^* \vee y^*. \end{aligned}$$

بنابراین با استفاده از رابطه ترتیب جزئی $\leq$، $y^* \leq x^*$. برعکس، فرض کنیم $y^* \leq x^*$. بنابراین $y^* \wedge x^* = y^*$. از طرفی $(y \vee x)^* = y^* \wedge x^*$. بنابراین $(y \vee x)^* = y^*$، لذا $y \vee x = y$، از این‌رو $x \leq y$. □

گزاره ۲۲.۲.۱. *فرض کنیم A یک جبر- MV باشد و $x, y \in A$. اگر $x \leq y$، آن‌گاه $x \vee z \leq y \vee z$ و هم‌چنین $x \wedge z \leq y \wedge z$.*