دانشكده علوم رياضي و كامپيوتر

پايان نامة كارشناسي ارشد

رشته :
رياضي محض ، گرايش آناليز

عنوان پايان نامه :

ابر بازتابي بودن زير فضاهاي با بعد متناهي

نگارنده :
مهرداد جاويدنيا

استاد راهنما :
دكتر عبدالجبار بديع الزمان

استاد مشاور :
دكتر عبدالمحمد امين پور

شهريورماه 1387

چكيدة پايان نامه

نام خانوادگي : جاويد نيا **نام :** مهرداد
عنوان پايان نامه : ابر بازتابي بودن زير فضاهاي با بعد متناهي
استاد راهنما : دكتر عبدالجبار بديع الزمان **استاد مشاور :** دكتر عبدالمحمد امين پور

درجه تحصيلي : كارشناسي ارشد **رشتة :** رياضي محض **گرايش :** آناليز

محل تحصيل : دانشگاه شهيد چمران اهواز

دانشكده : علوم رياضي وكامپيوتر

تاريخ فارغ التحصيلي : شهريورماه 1387

تعداد صفحه : 88

كليد واژه ها : زير فضاهاي بازتابي ، زير فضاهاي ابر بازتابي ، ثابت ابر بازتابي ، k- ابر بازتابي

چكيده : اين رساله جهت اخذ درجه كارشناسي ارشد رشته رياضي ارائه شده و مشتمل بر چهار فصل است . در اين رساله مفهوم بازتابي براي زير فضاهاي شامل عملگرها معرفي شده است .

مفهوم قوي تري به نام ابر بازتابي را تعريف كرده و نشان مي دهيم هر زير فضاي ابر بازتابي ، بازتابي است اما عكس آن در حالت كلي برقرار نيست . اما در حالتي كه زير فضا داراي بعد متناهي باشد . اين دو مفهوم معادل هستند . هم چنين نشان مي دهيم كه هر زير فضاي n بعدي از عملگرها بر فضاي هيلبرت ، $\left[\sqrt{2n}\right]$- ابر بازتابي است .

فهرست مندرجات

1 مقدمه و مروری بر مطالب 1

1.1 فضاهای متری 3
1.2 فضای برداری 6
1.3 نرم و فضاهای نرم دار 8
2 جبرهای بازتابی و زیر فضاهای بازتابی 25
2.1 جبرهای بازتابی 25
2.2 بازتابی بودن زیر فضاهایی از تبدیلات خطی 35
3 اثبات لم های مقدماتی 45

4 بر بازتابی بودن زیرفضاهای با بعد متناهی
70

A واژه نامه فارسی به انگلیسی
77

B واژه نامه انگلیسی به فارسی
82

C مراجع 87

مقدمه

این مقاله پیرامون بررسي تعیین شرطي براي معادل بودن مفاهیم بازتابي و ابر بازتابي براي زیر فضاهاي متناهي البعد شامل عملگرها از فضاي باناخ $B(X,Y)$مي باشد . مطالب اصلي این مقاله با نماد گذاري و تعریف هاي اولیه ، از فصل دوم آغاز مي شود .

موضوع اصلي فصل دوم این رساله که خود مشتمل بر دو قسمت است ، ارائه مفهوم بازتابي براي زیر جبرهاي $B(X)$ ، مي باشد که در آن Xفضاي باناخ است . سپس مفهوم بازتابي براي زیر فضاهاي بسته $B(X,Y)$ ، که در آن X و Y باناخ هستند ، مطرح مي شود . در واقع موضوع اصلي این مقاله بررسي بازتابي بودن زیر فضاهاي شامل عملگرهاست .

نشان مي دهيم هر زير فضاي ابر بازتابي ، بازتابي است و رابطه اي ميان زير جبرهاي بازتابي و زير فضاهاي بازتابي ارائه مي كنيم .
در ادامه مفهوم بازتابي را براي زير فضاهايي از تبديلات خطي ارائه كرده و اين فصل را با تعريف بازتابي براي زير فضاي شامل عملگرها بر فضاي هيلبرت به پايان مي رسانيم.
فصل سوم اين رساله به اثبات سه لم مقدماتي براي نشان دادن موضوع اصلي مقاله اختصاص دارد .
در فصل سوم ، ابتدا نمادي را تعريف كرده و ويژگي آن ها را بررسي مي كنيم .
سپس چند لم را ثابت كرده و به عنوان نتيجه اي از لم هاي مقدماتي ، نشان مي دهيم كه اگر M زير فضايي از عملگرها داراي بعد متناهي باشد به طوري كه شامل هيچ عملگر نا صفر با رتبه متناهي نباشد ، آن گاه M ابر بازتابي است .
آخرين فصل اين رساله ، به اثبات قضيه اصلي مقاله اختصاص دارد و نشان مي دهيم كه اگر زير فضايي از عملگرها با بعد متناهي ، بازتابي باشد آن گاه M ابر بازتابي است سرانجام به عنوان آخرين نتيجه ، نشان مي دهيم كه اگر $M \subset B(H)$ ، n بعدي باشد ، آن گاه M ، $\lfloor\sqrt{2n}\rfloor$- ابربازتابي است

فصل اول

مقدمه و مروري بر مطالب

فصل آغازين را به بيان مفاهيم اساسي مورد نياز اختصاص مى دهيم. اثبات قضيه ها اغلب به كتب يا مقالات راهنما ارجاع داده شده است. در بخش نخست مفاهيم اوليه فضاهاى مترى و در بخش دوم فضاهاي برداري معرفي مي شوند. در بخش سوم مطالبي در مورد فضاهاي نرمدار و فضاهاي هيلبرت مطرح مي شود. در سراسر اين رساله C نمايش مجموعه اعداد مختلط و R مجموعه اعداد حقيقي مي باشد.

1.1 فضاهاي متري

هر گاه Xیک مجموعه ناتهي باشد، هر تابع مانند $d:X\times X\to R$ را که به ازاء هر $x,y,z\in X$ واجد 4 خاصيت زير باشد، يك متر در مجموعه X مي ناميم:

الف) $d(x,y)\geq 0$ ،

ب) $d(x,y)=0$ اگر و تنها اگر $x=y$ ،

ج) $d(x,y)=d(y,x)$ ،

د) $d(x,z)\leq d(x,y)+d(y,z)$

مجموعه X با متر d را يك فضاي متري ناميده و با (X,d) نشان مي دهيم.

مثال 1-1.1 فضاي متري R^n از مجموعه n تايي هاي مرتب مانند $x=(x_1,x_2,...,x_n)$ به همراه متر زير تشكيل شده است ،

$$x=(x_1,x_2,...,x_n), y=(y_1,y_2,...,y_n),$$

$$d(x,y)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+...(x_n-y_n)^2}$$

همگرايي دنباله ، دنباله هاي نزولي و صعودي ، دنباله كراندار ،دنباله كوشي

دنباله (x_n) از فضاي متری (X,d) را همگرا گوييم هرگاه $x\in X$ موجود باشد كه

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n,x)=0$$

xرا حد دنباله (x_n) ناميده و مي نويسيم

$$\lim_{n\to\infty} x_n=x$$

يا به صورت خلاصه

$$x_n\to x$$

دنباله (x_n) در فضاي متري (X,d) كراندار است هرگاه عدد حقيقي $M>0$ و نقطه اي مانند $x\in X$ وجود داشته باشند به طوري كه به ازاء هر $n\in N$ ،

$$d(x_n,x)\leq M$$

دنباله حقيقي (x_n) را از پايين كراندار گوييم هرگاه $M\in R$ وجود داشته باشد كه به ازاء هر $n\in N$

$$M\leq x_n$$

به همين ترتيب دنباله حقيقي (x_n) را از بالا كراندار ناميم هرگاه $M\in R$ باشد كه به ازاي هر $n\in N$،

$$x_n\leq M.$$

دنباله (x_n) از فضاي متري (X,d) را يك دنباله كوشي مي ناميم ، هرگاه براي هر $\varepsilon>0$، عدد طبيعي N موجود باشد كه اگر $m,n\geq N$ آن گاه $d(x_n,x_m)<\varepsilon$.

بديهي است كه هر دنباله همگرا يك دنباله كوشي است .

تعريف 1.1- 2 : (فضاي متري كامل)

فضاي متري (X,d) را كامل گوييم هر گاه هر دنباله كوشي در اين فضا همگرا باشد .

تعريف 1.1- 3 : (قطر يك مجموعه)

فرض كنيم E يك زير مجموعه ناتهي از فضاي متري X باشد . قطر مجموعه E را با $diam\ E$ نشان داده ، به صورت زير تعريف مي شود .

$$diam\ E=\sup\{d(x,y):x,y\in E\}$$

واضح است كه E در X كراندار است اگر و تنها اگر عدد حقيقي مانند M وجود داشته باشد به طوري كه

$$diam\ E\leq M$$

تعريف 1.1- 4 (فضاي متري فشرده)

فضاي متري X را فشرده مي ناميم هرگاه هر دنباله در X، شامل يك زير دنباله همگرا باشد. زير مجموعه M از X را فشرده مي ناميم هرگاه به عنوان زير فضايي از X ، فشرده باشد . يعني هر دنباله در M ، شامل زير دنباله اي همگرا باشد كه حد آن عضوي از M است .

لم 1.1- 5: فرض كنيم X فضاي متري و M زير مجموعه فشرده X باشد . آن گاه M بسته وكراندار است .

اثبات : فرض كنيم $x\in\overline{M}$. بنابراين دنباله مانند (x_n) در M وجود دارد به طوري كه $x_n\to x$. چون M فشرده است بنا به تعريف فشردگي $x\in M$. لذا $\overline{M}\subset M$ و M بسته است .

فرض كنيم M كراندار نباشد (برهان خلف) . بنابراين Mشامل دنباله اي بي كران مانند (y_n) است به طوري كه براي هر مقدار ثابت b ، $d(y_n,b)>n$. اين دنباله نمي تواند زير دنباله اي همگرا داشته باشد . و اين يك تناقض مي باشد. لذا M كراندار است.

عكس اين مطلب همواره برقرار نيست، امّا در صورتي كه X يك فضاي متناهي البعد باشد از كرانداري و بسته بودن يك مجموعه. فشردگي نتيجه مي شود .

2. 1 فضاهاي برداري

در اين بخش تعريفي براي يك فضاي برداري روي ميدان $F(=R$ يا $C)$ آورده و سپس تعريفي براي زير فضا ارائه مي كنيم . همچنين مفهوم « هم بعد » را براي يك زير فضا توضيح مي دهيم .

تعريف 2.1- 1: يك فضاي برداري (يا فضاي خطي) روي ميدان F عبارت است از :

1. يك مجموعه ناتهي V از اشيايي به نام بردارها،

2. يك قاعده (يا عمل) به نام جمع برداري كه به هر جفت از بردارهاي x و y از Vبردار $x+y$ از Vرا كه مجموع x و yناميده مي شود وابسته مي سازد با اين شرط كه

الف) جمع جابجائي است يعني $x+y=y+x$

ب) جمع شركت پذير است ، يعني $(x+y)+z=x+(y+z)$

پ) بردار يكتاي 0 به نام صفر در V موجود است به طوري كه به ازاء هر x در V ، $x+0=x$.

ت) به ازاء هر بردار x در V بردار يكتاي $-x$ در V موجود است به طوري كه $x+(-x)=0$

3. يك قاعده (يا عمل) به نام ضرب اسكالري كه به هر اسكالر α از Fو هر بردار xدر V را كه حاصل ضرب α در x ناميده مي شود وابسته سازد با اين شرايط كه

(الف) به ازاء هرxدر V، $1.x=x$

(ب) $(\alpha\beta)x=\alpha(\beta x)$

(پ) $\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y$

(ث) $(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x$

تعريف 2.1- 2 (زير فضا)

فرض كنيم X يك فضاي برداري بر ميدان Fباشد . يك زير فضاي X عبارت است از يك زير مجموعه Y از X كه خود با اعمال جمع برداري و ضرب اسكالري روي X ، يك فضاي برداري باشد.

قضيه2.1- 3 : يك زير مجموعه ناتهي ، زير فضاي X است اگر وتنها اگر براي هر دو بردار $y_1,y_2\in Y$ و اسكالرهاي B ، α از F ، بردار $\alpha y_1+\beta y_2$ در Yباشد.

اثبات : [18] 1.2- 2

براي زير مجموعه ناتهي M از فضاي برداري X، مجموعه همه تركيب هاي خطي بردارهاي M را با $Span\ M$ نمايش مي دهيم. بنابراين

$$span\ M = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, x_i : \alpha_i \in F\ ,\ x_i \in M \right\}$$

بديهي است كه $span\ M$ زير فضاي X است.در صورتی كه $Y = span\ M$، گوييم Yبه وسيله M توليد شده است.

تعريف 2.1- 4: هم بعد زير فضا

فرض كنيم Y زير فضاي Xباشد . هم مجموعه $x \in X$ نسبت به Y را با $x+Y$ نشان داده و به صورت زير تعريف مي كنيم:

$$x + Y = \{x + y \ \ : y \in Y\}$$

در اين صورت مجموعه فوق تحت دو عمل زير تشكيل يك فضاي برداري مي دهد

$$(x+Y)+(w+Y)=(x+w)+Y \qquad : \forall x, w \in X$$

$$\alpha(x+Y) = \alpha\, x + Y$$

اين فضا را فضاي خارج قسمتي از X بوسيلة Yمي ناميم و با $\frac{X}{Y}$ نشان مي دهيم .

بعد اين فضا را هم بعد Y مي ناميم و با $co\dim Y$نشان مي دهيم بنابراين

$$co\dim Y = \dim(\frac{X}{Y}) \qquad : Y \subset X$$

1-3 نرم و فضاهاي نرم دار

در اين بخش ابتدا نرم و فضاهاي نرمدار را معرفي كرده، سپس فضاي باناخ را تعريف مي كنيم. عملگرهاي خطي و تابعك خطی موضوع بعدي اين بخش مي باشد. در پايان فضاي حاصل ضرب داخلي، فضاي هيلبرت و ويژگي هاي آن ها را مورد بررسي قرار مي دهيم.

فرض کنیم X یك فضاي برداري روي میدان حقیقي یا مختلط F باشد. تابع $\|.\|: X \to R$ را یك نرم می نامیم در صورتي که براي هر $x,y \in X$ و هر اسکالر α داشته باشیم:

(الف) $\|x\| \geq 0$

(ب) $\|x\| = 0$ اگر و تنها اگر $x = 0$

(پ) $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|$

(ت) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

اگر فضاي برداري X داراي نرم $\|.\|$ باشد آن گاه گوییم X یك فضاي نرم دار است و به طور معمول با جفت $(X, \|.\|)$ نشان مي دهیم.

توجه: اگر در تعریف نرم، شرط (ب) برقرار نباشد آن را شبه نرم مي نامیم.

تذکر: 1- اگر X یك فضاي نرمدار باشد و براي هر $x,y \in X$ قرار دهیم $d(x,y) = \|x - y\|$، آن گاه به سادگي دیده مي شود که d یك متر روي X است. درنتیجه هر فضاي نرم دار یك فضاي متري است. d را متر تولید شده به وسیله نرم $(\|.\|)$ مي نامیم.

2- نرم $(\|.\|)$ تابعي پیوسته بر X است. این مطلب به سادگي و با به کار بردن تعریف پیوستگي و این که $\big|\|x\| - \|y\|\big| \leq \|x - y\|$ ثابت مي شود.

مثال3.1- 1: فضاي l^p: فرض کنیم p عددي حقیقي و $P \geq 1$ باشد. فضاي l^p، شامل دنباله اي از اعداد مانند $x = (\xi_j) = (\xi_1, \xi_2, \ldots..)$ به طوري که $|\xi_1|^P + |\xi_2|^P + \ldots..$ همگرا باشد. بنابراین براي $P \geq 1$ داریم:

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j|^P < \infty$$

اگر $y=(\eta_j)=(\eta_1,\eta_2,....)$ آن گاه فضاي l^p با متر تعريف شده در زير تبديل به يك فضاي متري مي شود.

$$d(x,y)=\left(\sum_{j=1}^{\infty}\left|\xi_j-\eta_j\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

براي هر $x\in l^p$ ، قرار مي دهيم :

$$\|x\|=\left(\sum_{j=1}^{\infty}\left|\xi_j\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

با اين تعريف ، فضاي l^p به يك فضاي نرمدار تبديل مي شود.

تعريف 3.1- 2 (فضاهاي باناخ)

فضاي نرم دار $(X,\|.\|)$ را يك فضاي باناخ گوييم هرگاه تحت متري توليد شده توسط نرم كامل باشد.

مثال3.1- 3: فضای l^p با نرم تعريف شده در مثال قبل فضای باناخ است.

قضيه3.1- 4: فرض كنيم $\{x_1,...,x_n\}$ يك مجموعه مستقل خطي در فضاي نرمدار X باشد . در اين صورت : $c>0$ وجود دارد به طوري كه براي هر انتخاب از اسكالرهايي $\alpha_1,...,\alpha_n$:

$$\|\alpha_1x_1+....+\alpha_nx_n\|\geq c(|\alpha_1|+......|\alpha_n|)$$

اثبات : [17] 4.2- 1

تعريف 3.1- 5: فرض كنيم X يك فضاي نرمدار و M زيرمجموعه آن باشد. M را كراندار گوييم هرگاه عدد مثبتي مانند c وجود داشته باشد به طوري كه براي هر $x\in M$:

$$\|x\|\leq c$$

در مطالب قبلي ، تعريف مجموعه فشرده را ارائه كرديم و همچنين نشان داده شد هر مجموعه فشرده ، بسته و كراندار است اما عكس اين قضيه در حالت كلي برقرار نيست .

اما در صورتي كه X يك فضاي متناهي البعد باشد ، از بسته بودن و كرانداري مي توان فشردگي را نتيجه گرفت .

قضيه 3.1- 6 : فرض كنيم X يك فضاي نرمدار با بعد متناهي باشد . آن گاه هر زير مجموعه $M \subset X$ فشرده است اگر و تنها اگر M بسته وكراندار باشد .

اثبات : از فشردگي ، بسته بودن و كرانداري نتيجه مي شود . حال فرض كنيم M بسته، كراندار و $\dim X = n$ و $\{e_1,...e_n\}$ پايه اي براي X باشد .

فرض كنيم (x_m) دنباله‌ي دلخواهی در M باشد . نشان مي دهيم (x_m) داراي زير دنباله اي همگرا است. هر x_m داراي نمايشي به صورت زير است:

$$x_m = \xi_1^{(m)} e_1 + ... + \xi_n^{(m)} e_n$$

چون M كراندار است لذا عددي مثبت مانند k وجود دارد به طوري كه : $\|x_m\| \leq k \ : \forall m \in N$

با توجه به قضيه قبل داريم :

$$k \geq \|x_m\| = \left\| \sum_{j=1}^{n} \xi_j^{(m)} e_j \right\| \geq c \sum_{j=1}^{n} \left| \xi_j^{(m)} \right|$$

كه در آن $c > 0$. بنابراين دنباله اعداد $(\xi_j^{(m)})$ كه در آن j ثابت است ، يك دنباله كراندر است . زيرا

$$\left|\xi_j^{(m)}\right| \leq \sum_{j=1}^{n} \left|\xi_j^{(m)}\right| \leq \frac{k}{c}$$

بنا به قضيه بولتزانو- واير اشتراس دنباله ی $(\xi_j^{(m)})$ دارای زير دنباله ی همگراست. فرض كنيم حد آن دنباله ξ_j باشد. قرار مي دهيم $z = \sum \xi_j e_j$.بنابراين (x_m) داراي زير دنباله اي مانند (z_m) است كه همگرا به z است. چون M بسته است لذا $z \in M$ و اين نشان مي دهد كه دنباله

دلخواه (x_m) در M داراي زير دنباله‌اي همگراست كه حد آن در M است. بنابراين M فشرده است.

مثال3.1- 7: هر زير مجموعه بسته و كراندر فضاي $C^n \approx R^{2n}$، فشرده است.

تعريف3.1- 8 (عملگر خطي)

هر نگاشت در فضاي برداري (به خصوص در فضاي نرمدار) يك عملگر ناميده مي شود . عملگر T را خطي گويند هرگاه

1) دامنه T (D(T)) يك فضاي برداري و برد T (R (T)) زيرمجموعه يك فضاي برداري روي همان ميدان باشد.

2) براي هر $x,y \in D(T)$ و اسكالر $\alpha \in F$:

الف) $T(x+y) = Tx + Ty$

ب) $T(\alpha x) = \alpha Tx$

عملگر هماني : فرض كنيم X يك فضاي نرمدار باشد در اين صورت عملگر $I: X \to X$ تعريف شده با $Ix = x$ را عملگر هماني مي گوييم.

عملگر $T: D(T) \to R(T)$ را يك به يك مي گوئيم هر گاه براي هر $x_1, x_2 \in D(T)$ از $Tx_1 = Tx_2$ نتيجه شود $x_1 = x_2$

تعريف3.1- 9: فرض كنيم X و Y دو فضاي نرمدار و $T: D(T) \to Y$ يك عملگر خطي باشد كه $D(T) \subset X$. عملگر Tرا كراندار مي ناميم هرگاه عددي حقيقي$c \geq 0$ وجود داشته باشد به طوري كه:

$$\forall x \in D(T) \qquad \Rightarrow \quad \|Tx\| \leq c\|x\|$$

كه در آن در سمت چپ نامساوي فوق ، نرم مربوط به فضاى Y و در سمت راست نرم مربوط به فضاي X است.

فرض كنيم $T: D(T) \to Y$ عملگر خطي باشد. در اين صورت نرم Tرا با $\|T\|$ نشان داده و به صورت زير تعريف مي كنيم:

$$\|T\| = \sup_{\substack{x \in D(T) \\ x \neq 0}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}$$

اگر $D(T)=\{0\}$ آن گاه $\|T\|=0$. همچنین برای عملگر همانی I داریم $\|I\|=1$

با توجه به تعریف $\|T\|$:

$$\|Tx\| \le \|T\| \, \|x\|$$

تعریف معادل برای $\|T\|$ به صورت زیراست :

$$\|T\| = \sup_{\substack{x \in D(T) \\ \|x\| = 1}} \|Tx\|$$

زیرا فرض کنیم $x \neq 0$ و $\|x\|=\alpha$. قرار می دهیم $y=(1/a)x$. در این صورت $\|y\|=\|x\|/a=1$

از این که T خطی است داریم:

$$\|T\| = \sup_{\substack{x \in D(T) \\ x \neq 0}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \sup_{\substack{x \in D(T) \\ x \neq 0}} \frac{1}{a}\|Tx\| = \sup_{\substack{x \in D(T) \\ x \neq 0}} \left\|T\left(\frac{1}{a}x\right)\right\| = \sup_{\substack{y \in D(T) \\ \|y\| = 1}} \|Ty\|$$

تعریف3.1- 10 (تحدید یک عملگر) : فرض کنیم $T:D(T)\to Y$ یک عملگر خطی باشد. در این صورت تحدید عملگرT بر زیر مجموعه $B\subset D(T)$ را با $T_{|B}$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می کنیم :

$$T_{|B} : B \to Y$$
$$T_{|B}(x) = Tx \quad : \quad \forall x \in B$$

تعریف3.1- 11 (تابعک خطی) : اگر X یک فضای برداری روی میدان Fباشد آن گاه عملگر $T:D(T)\subset X\to F$ را تابعک می گوییم معمولاً به جای T ، از حرف f برای نمایش

تابعك استفاده مي شود. در صورتي كه f خطي باشد آن را تابعك خطي مي گوييم.
مجموعه متشكل از همه تابعك هاي خطي بر فضاي برداري X را، فضاي دوگان X مي ناميم و با X^* نشان مي دهيم.
مجموعه X^* با دو عمل جمع و ضرب زير تشكيل يك فضاي برداري مي دهد:

$$i)\ (f_1+f_2)(x)=f_1(x)+f_2(x)\ \ :\ \ \forall f_1,f_2\in X^*$$

$$ii)\ (\alpha f)(x)=\alpha f(x)$$

فرض كنيم X يك فضاي برداري، $\dim X=n$ و $\{e_1,e_2,...e_n\}$ پايه اي براي X باشد. در اين صورت براي هر $x\in X$ ، $x=\sum_{j=1}^{n}\xi_j e_j$.
اگر $f\in X^*$ آن گاه می توان نوشت:

$$f(x)\equiv f(\sum_{j=1}^{n}\xi_j e_j)\equiv\sum_{j=1}^{n}\xi_j f(ej)=\sum_{j=1}^{n}\xi_j\alpha_j$$

كه در آن $f(e_j)=\alpha_j$

بنابراين هر تابعك خطي f به وسيله α_jها يعنی مقدار آن به ازاء بردارهای يک پايه X به صورت منحصر به فرد مشخص مي‌شود و به عكس هر n تايي از اسكالرهاي $\alpha_1,...,\alpha_n$، يك تابعك خطي را مشخص مي كند.
مي توان n تابعك $f_1,.....f_n$ را طوري مشخص كرد كه داراي خاصيت زير باشد:

$$f_k(e_j)=\delta_{k,j}=\begin{cases}1 & j=k\\ 0 & j\neq k\end{cases}\qquad (1)$$

در اين صورت $\{f_1,...f_n\}$را پايه دوگان نسبت به پايه $\{e_1,...e_n\}$براي X مي گوييم.
قضيه زير بعد X^*را مشخص مي كند.

قضیه 3.1-12 : فرض کنیم X یک فضای n بعدی و $E=\{e_1,...,e_n\}$ پایه ای برای X باشد. آن گاه $F=\{f_1,...,f_n\}$ تعریف شده در (1) پایه ای برای X^* است و $\dim X^* = \dim X = n$.

اثبات : F یک مجموعه مستقل خطی است، زیرا فرض کنیم $x \in X$ و

$$\sum_{k=1}^{n} \beta_k f_k(x) = 0$$

چون $e_j \in X$ لذا می توان نوشت:

$$0 = \sum_{k=1}^{n} \beta_k f_k(e_j) = \sum_{k=1}^{n} \beta_k \delta_{kj} = \beta_j$$

نتیجه می شود که β_k ها همگی صفر هستند لذا F مستقل خطی است.

حال نشان می دهیم که هر $f \in X^*$ را می توان به صورت ترکیب خطی از اعضای F نوشت .

با توجه به مطالب قبلی و برای هر $x \in X$

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} \xi_j \alpha_j$$

که در آن $f(e_j)=\alpha_j$.

از طرف دیگر

$$f_j(x) = f_j(\xi_1 e_1 + ... + \xi_n e_n) = \xi_j$$

با ترکیب دو تساوی فوق نتیجه می شود که برای هر $x \in X$

: $f(x)=\sum_{j=1}^{n}\alpha_j f_j(x)$ پس $f = \alpha_1 f_1 + ... + \alpha_n f_n$.

تعریف 3.1-13 : فرض کنیم X و Y دو فضای نرمدار باشد. در این صورت مجموعه همه عملگرهای خطی و کراندر از X به Y را با $B(X,Y)$ نشان می دهیم :

مجموعه $B(X,Y)$ با دو عمل زیر یک فضاي برداري تشکیل می دهد :

$$i)\ \ (T_1+T_2)(x)=T_1x+T_2x\ \ ,\ \ \forall\, T_1,T_2\in B(X,Y)$$

$$ii)\ \ (\alpha T)x=\alpha\, T(x)\ \ ,\ \ \ \alpha\in F\,,T\in B(X,Y)$$

برای هر T در $B(X,Y)$ ، $\|T\|$ را به صورت زیر تعریف مي کنیم :

$$\|T\|=\sup_{\substack{x\in X\\ x\neq 0}}\frac{\|Tx\|}{\|x\|}$$

بنابراین $B(X,Y)$ تبدیل به یك فضاي نرمدار مي شود .

قضیه 3.1- 14: اگر Y باناخ باشد آن گاه $B(X,Y)$ باناخ است .

اثبات : [17] 10.2- 2

تعریف 3.1- 15 (فضاي دوگان) : فرض کنیم X یك فضاي نرمدار باشد. در این صورت مجموعه همه تابعك هاي خطي و کراندار بر X را فضای دوگان X می گوییم و با X' نشان مي دهیم. بنابراین $X'=B(X,R$ یا $C)$

چون R,C باناخ هستند لذا X' باناخ است. بنابراین قضیه زیر را داریم.

قضیه 3.1- 16: فضاي دوگان X' از فضاي نرمدار X ، باناخ است بدون توجه به این که X باناخ باشد یا نباشد.

فضاي ضرب داخلي و فضاي هیلبرت :

فرض کنیم X یك فضاي برداري روي میدان $F(=R$ یا $C)$ باشد . یك ضرب داخلي روي X ، تابعي است مانند $<.,.>:X\times X\to F$ به قسمي که به ازاء هر $a,b\in F$ و هر $x,y,z\in X$ داشته باشیم :

الف) $<ax+by,z>=a<x,z>+b<y,z>$

ب) $<x,y>\geq 0$

پ) $<x,x>=0$ اگر و تنها اگر $x=0$

ت) $<x,y>=\overline{<y,x>}$

تذكر : (الف) تابع ضرب داخلي نسبت به متغير x خطي و نسبت به متغير yخطي مزدوج است. خطي مزدوج نسبت به y يعني به ازاء هر $x,y,z\in X$ و هر $a\in F$ داريم.

$$<x,y+z>=<x,y>+<x,z>,$$
$$<x,\alpha y>=\overline{\alpha}<x,y>.$$

(ب) $<x,y>$را ضرب داخلي x و y مي ناميم .

تعريف 3.1- 17: به فضاي برداري X همراه با ضرب داخلي $<.,.>$يك فضاي ضرب داخلي مي‌گوييم و به صورت $(X,<.,.>)$ نشان مي دهيم.

تعريف**3.1- 18 :** فرض كنيم $(X,<.,.>)$يك فضاي ضرب داخلي باشد. قرار مي دهيم:

$$\|x\|=\sqrt{<x,x>}$$

آن گاه

(الف) (نامساوی شوارتز) به ازاء هر $x,y\in X$ داريم:

$$|<x,y>|\leq\|x\|\,\|y\|$$

(ب) (نامساوي مثلثي) به ازاء هر $x,y\in X$ داريم $\|x+y\|\leq\|x\|+\|y\|$. لذا $\|x\|=\sqrt{<x,x>}$ يك نرم روي Xتعريف مي كند كه آن را نرم توليد شده به وسيله ضرب داخلي مي ناميم.

(پ) ضرب داخلي $<.,.>$ يك تابع پيوسته روي $X\times X$ است. زيرا اگر (x_n) و (y_n) دنباله هايي در X باشند كه $x_n\to x\in X$ و $y_n\to y\in X$ ، آن گاه داريم:

$$|<x_n,y_n>-<x,y>|=|<x_n,y_n>-<x_n,y>+<x_n,y>-<x,y>|$$