إنه من سليمان وإنه

بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه زنجان

دانشکده علوم - گروه ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد

عنوان:

کدهای کامل و گراف‌ها

فریده کیانتاژ

استاد راهنما:

دکتر مژگان امامی

شهریور ۱۳۸۹

قدردانی و تشکر

در ابتدا، خداوند مهربان را شاکرم که در تنهاترین لحظات زندگی‌ام مرا تنها نگذاشته و هیچ گاه مرا به حال خودم وانمی‌گذارد.

در اینجا لازم میدانم از کلیه کسانی که در انجام این پایان نامه به نحوی مرا یاری نمودند سپاسگزاری کنم. از استاد راهنمای گرامی جناب خانم دکتر مژگان امامی، که در همه زمینه‌ها همکاری لازم را مبذول داشته‌اند و همیشه با صبر و حوصله مرا یاری نموده‌اند کمال تشکر و قدردانی را دارم و برای ایشان موفقیت و سربلندی در همه عرصه‌های زندگی‌شان را از درگاه ایزد منان خواستارم. هم‌چنین از آقای دکتر مسعود آرین نژاد و آقای دکتر رشید زارع نهندی که داوری پایان‌نامه اینجانب را بر عهده گرفتند سپاسگزارم. از پدر و مادر عزیزم که در تمام مراحل زندگی مشوق من بوده‌اند کمال تشکر را دارم. از برادر و خواهران مهربانم که در انجام هر چه بهتر این امر، مرا یاری نمودند تشکر می‌کنم. هم‌چنین از دوستان و هم کلاسی‌های عزیزم کمال تقدیر و تشکر را دارم .

به پاس تعبیر عظیم و انسانی‌شان از کلمه ایثار و از خودگذشتگان

به پاس عاطفه سرشار و گرمای امید بخش وجودشان که در این سردترین روزگاران بهترین پشتیبان است

به پاس قلب‌های بزرگشان که فریادرس است و سرگردانی و ترس در پناهشان به شجاعت می‌گراید

و به پاس محبت‌های بی‌دریغشان که هرگز فروکش نمی‌کند

این مجموعه را به پدر و مادر عزیزم تقدیم می‌کنم.

چکیده

یک r—کد کامل از گراف $G=(V,E)$، مجموعه‌ای چون $C\subseteq V$ است که r—کره‌های به مرکز رئوس C، افرازی از مجموعه V تشکیل دهد. فرض کنید C یک کد کامل در یک گراف فاصله—متعدی و متقاطر باشد. نشان داده شده است که اگر $u\in C$ باشد آنگاه هر رأس در بیشترین فاصله از u، متعلق به C است.

به علاوه فرض کنید گراف $G=\prod_{i=۱}^{n} C_{l_i}$ ضرب مستقیم n دور باشد. ثابت شده است که برای هر ۱ $\geqslant r$ و ۲ $\geqslant n$، هر مولفه همبند از G شامل یک r—کد کامل است به طوری که هر l_i مضربی از $r^n+(r+۱)^n$ است. به عبارت دیگر، اگر کدی از G شامل یک رأس و رئوس موضعی کانونی آن باشد، آنگاه هر l_i مضربی از $r^n+(r+۱)^n$ است. هم چنین ثابت شده است که یک r—کد کامل $(r\geqslant ۲)$ از G به طور یکتا با n رأس تعیین می‌شود.

فهرست مندرجات

مقدمه

نظریه کدگذاری یکی از بخش‌های مهم آنالیز ترکیبی است و کدهای ناشی از گراف‌ها یکی از جالب‌ترین مباحث در این زمینه می‌باشند که مطالعه آن‌ها ابتدا توسط بیگز[۱] در سال ۱۹۷۳ شروع شد[٦].

در این پایان نامه در مورد کدهای کامل ناشی از گراف‌ها بحث خواهیم کرد. بیگز به مطالعه کدهای ناشی از گراف‌های فاصله—متعدی پرداخت و کراتوچویل [۲] در سال ۱۹۸٦ مطالعه کدهای کامل ناشی از گراف‌ها را ادامه داده [۱٦, ۱۷]، و ثابت کرد که ۱—کدهای کامل غیربدیهی ناشی از گراف‌های دوبخشی کامل با حداقل سه رأس وجود ندارند.

مطالعه کدهای ناشی از گراف‌ها، بخشی از مسئله بزرگ کدهای تصحیح کننده خطا است. در این پایان نامه، برای گراف داده شده G، زیر مجموعه C از رئوس G را، که r—کره‌ها به مرکز رئوس C، افرازی از رئوس G باشند بررسی می‌کنیم. کدهای کامل ناشی از گراف‌ها از شبکه‌های متصل به هم به وجود می‌آیند که در مرجع [۱۸] مطالعه شده‌اند.

ضرب مستقیم گراف‌ها، یکی از چهار ضرب استاندارد گراف است [۱۰]. این ضرب با نام‌های مختلف بسیاری مانند ضرب کاردینال، ضرب کرونکر و ضرب کاتگوری شناخته شده است. این ضرب یکی از پرکاربردترین ضرب‌های گراف‌ها است. برای مثال شبکه قطری مطالعه شده توسط پادیوبیردی [۳] و تانگ [۴] در [۲۰]، یک شبکه پردازش قابل نمایش به صورت ضرب مستقیم از دو دور فرد است، زمانی که گراف اصلی از یک آرایه خطای—مجاز محاسبه‌ای [۱۹] از یک مولفه همبند از ضرب مستقیم دو مسیر با طول یکسان باشد.

در بخش اول این پایان نامه تعاریف و قضایای کلی در رابطه با کدها و گراف‌ها را بیان کرده و در بخش‌های بعدی به مطالعه کدهای کامل ناشی از گراف‌ها می‌پردازیم. در بخش دوم کدهای کامل ناشی از گراف‌های فاصله—متعدی و

[۱] Biggs
[۲] Kratochvil
[۳] Padubirdi
[۴] Tang

متقاطر را بیان کرده و در بخش سوم و چهارم به بررسی کدهای کامل ناشی از حاصل ضرب مستقیم دورها می‌پردازیم. جا[5][۱۴]، $r-$کدهای کامل ناشی از حاصل ضرب مستقیم دو دورهای $C_{l_۱} \times C_{l_۲}$ که هر دوی $l_۱$ و $l_۲$ مضربی از $(r+۱)^۲ + r^۲$ هستند را ساخت. در مقاله دیگری [۱۳]، او $r-$کدهای کامل ناشی از ضرب مستقیم سه دورهای $C_{l_۱} \times C_{l_۲} \times C_{l_۳}$ که هر l_i مضربی از $(r+۱)^۳ + r^۳$ باشند را دنبال کرد.

در ادامه پایان نامه نتایج جا برای حاصل ضرب مستقیم هر تعداد دور ادامه داده شده است[۱۵].

[5] Jha

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم اولیه

در این فصل به مفاهیم اساسی که در این پایان نامه با آن‌ها برخورد خواهیم کرد می پردازیم. این مطالب عمدتاً از مراجع کلاسیک [۹, ۲۲] تهیه گردیده‌اند.

۱.۱ گراف

در این بخش به معرفی گراف و بیان چند مفهوم از نظریه گراف می‌پردازیم.
یک گراف G عبارت است از زوج $(V(G), E(G))$ به گونه‌ای که $V(G)$ مجموعه‌ای متناهی و غیرتهی از عناصر است که رئوس نامیده شده و $E(G)$ مجموعه‌ای از زوج‌های نامرتب از عناصر مجزای $V(G)$ است که یال نامیده می‌شوند. یالی که رأس ابتدا و انتهایش یکسان باشد حلقه نامیده می شود. دو یال را موازی می نامیم اگر رئوس ابتدا و انتهایشان یکسان باشد.

گراف ساده گرافی است که حلقه و یال موازی نداشته باشد. گراف ساده‌ای را که بین هر دو رأس آن یالی وجود داشته باشد گراف کامل نامیده و گراف کامل با n رأس را با K_n نشان می‌دهند.

گشت در G، دنباله ناتهی $W = v_۰e_۱v_۱e_۲v_۲...e_kv_k$ است که جمله‌های آن متناوباً رأس‌ها و یال‌ها هستند، به قسمی که برای $۱ \leqslant i \leqslant k$، دو انتهای e_i، $v_{i-۱}$ و v_i هستند. در این صورت گوییم W گشتی از $v_۰$ به v_k است.

مسیر در گراف G دنباله‌ای متناهی از یال‌ها از یک رأس u به یک رأس v است به طوری که تمام رئوس میانی مجزا باشند. تعداد یال‌ها در یک مسیر را طول مسیر گویند.

دور در G مسیری از v به v است. فاصله بین دو رأس u و v را که با $d(u,v)$ نمایش می دهند عبارت است از کوتاه‌ترین مسیر بین این دو رأس. بیشترین فاصله ممکن بین رئوس گراف G را قطر G گوییم و از علامت $diam(G)$ استفاده می‌کنیم.

یک گراف را همبند گویند اگر برای هر دو رأس دلخواه $v \in V(G)$ و w مسیری از v به w وجود داشته باشد. در غیر این صورت، گراف را ناهمبند گویند.

درجه رأس v برابر است با تعداد یال‌هایی که از رأس v می گذرد و با نماد $deg(v)$ نشان داده می‌شود. گراف G را منتظم گویند هرگاه درجه تمام رئوس مساوی باشد. گراف G، k−منتظم گفته می‌شود اگر برای هر$v \in V(G)$ داشته باشیم $deg(v) = k$.

دو رأس $u \in V(G)$ و v را مجاور گوییم اگر بین آن‌ها یالی وجود داشته باشد در این صورت آن را با علامت $u \sim v$ مشخص می‌کنیم. هم چنین دو یال مجاورند اگر در یک رأس مشترک باشند.

گرف دوبخشی گرافی است که مجموعه رأس‌ها را بتوان به دو زیر مجموعه X و Y طوری افراز کرد که هر یال دارای یک انتها در X و یک انتها در Y باشد. چنین افراز (X,Y) را دوبخشی کردن گراف می‌نامند. گراف دو بخشی است اگر و تنها اگر شامل دور فرد نباشد.

تعریف ۱.۱.۱ یک یکریختی از یک گراف G به یک گراف Δ، یک تابع دوسویی $\varphi : V(G) \to V(\Delta)$ است به طوری‌که برای $u \in V(G)$ و v، $\varphi(u) \sim \varphi(v)$ اگر و فقط اگر $u \sim v$. در این صورت G و Δ را یکریخت گویند و از نماد$G \cong \Delta$ استفاده می کنند.

تعریف ۲.۱.۱ یک یکریختی از یک گراف G به خودش را، یک خودریختی از G گویند. گروه تمام خودریختی‌های یک گراف G را گروه خودریختی G گویند و با $Aut(G)$ نشان می‌دهند.

تعریف ۳.۱.۱ مجموعه همه جایگشت‌ها از مجموعه V را با $sym(V)$ نشان می‌دهند. یک گروه تبدیل روی V زیرگروهی از $sym(V)$ است.

تعریف ۴.۱.۱ گروه‌جایگشت G روی V متعدی است اگر برای هر $x \in V$ و y، یک $g \in G$ وجود داشته باشد به طوری که $g(x) = y$.

تعریف ۵.۱.۱ گراف G فاصله‌-متعدی گفته می‌شود هرگاه برای رئوس دلخواه $u \in V(G)$، v، u' و v' که در شرط $d(u,v) = d(u',v')$ صدق کنند یک $g \in Aut(G)$ وجود داشته باشد به طوری که $g(v) = v'$ و $g(u) = u'$.

تعریف ۶.۱.۱ فرض کنید $u \in V(G)$ باشد. تعریف می‌کنیم

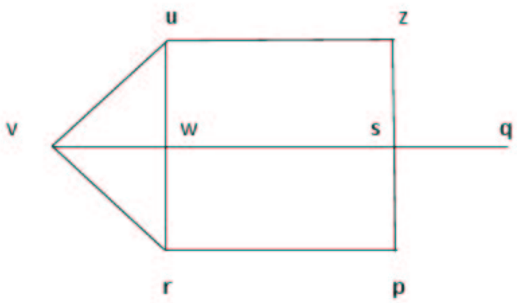
$$\Gamma_i(u) = \{v \in V(G) | d(u,v) = i\}.$$

عناصر $\Gamma_\circ(u)$، $\Gamma_1(u)$، ... و $\Gamma_d(u)$ یک افراز فاصله از G را تشکیل می‌دهند. لازم به ذکر است که

$$\forall v \in V(G) \qquad \Gamma_\circ(v) = v.$$

روشن است که همواره می‌توانیم یک افراز فاصله برای هر گراف همبند به دست آوریم.

مثال ۱.۱.۱

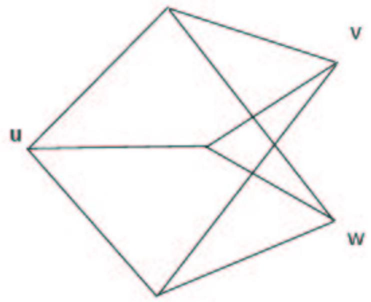


شکل ۱.۱: افراز فاصله یک گراف همبند

$$\Gamma_\circ(v) = v, \qquad \Gamma_1(v) = \{u,w,r\}, \qquad \Gamma_2(v) = \{z,s,p\}, \qquad \Gamma_3(v) = \{q\}.$$

تعریف ۷.۱.۱ یک گراف فاصله–متعدی G با قطر d متقاطر گفته می‌شود اگر برای عناصر متمایز $v \in \Gamma_0(u) \cup \Gamma_d(u)$ و w داشته باشیم $d(v,w) = d$. اگر $\Gamma_d(u)$ از رأس تنهای v تشکیل شده باشد، آنگاه گراف متقاطر است زیرا برای $\{u,v\} = \Gamma_0(u) \cup \Gamma_d(u)$ داریم $d(u,v) = d$. در این صورت، گراف را به طور بدیهی متقاطر گویند.

مثال ۲.۱.۱



شکل ۲.۱: گراف $K_{3,3}$

$G = K_{3,3}$ متقاطر است زیرا $d = 2$ و برای $w \in \Gamma_2(u)$ و v داریم $d(v,w) = 2$.

۲.۱ اعداد مقطع

در این بخش با استفاده از یک افراز فاصله از گراف G، اعداد مقطع و سپس با استفاده از آن، آرایه مقطع را معرفی کرده و ویژگی‌های آن‌ها را بیان می‌کنیم.

تعریف ۱.۲.۱ برای هر گراف G و $u \in V(G)$ و v اعداد مقطع را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$S_{hi}(u,v) = \{w \in V(G) |\ d(u,w) = h,\ d(v,w) = i\} = |\Gamma_h(u) \cap \Gamma_i(v)|$$

که اگر قطر گراف G برابر d باشد آنگاه $i \in \{0, 1, ..., d\}$، j و h. در یک گراف فاصله–متعدی، اعداد مقطع به رئوس u و v وابسته نبوده و فقط به $d(u,v) = j$ وابسته هستند. چون طبق تعریف گراف فاصله–متعدی، یک

$g \in Aut(G)$ وجود دارد که هر جفت از رئوس با فاصله j از هم را به جفت u و v می‌نگارد. بنابراین اگر $d(u,v) = j$ باشد، به جای $S_{hi}(u,v)$، S_{hij} را قرار می‌دهیم

$$S_{hij} = \{w \in V(G) \mid d(u,w) = h, d(v,w) = i, d(u,v) = j\}.$$

اگر $h = ۱$ و $d(u,v) = j$ باشد، داریم $S_{۱ij} = |\Gamma_۱(u) \cap \Gamma_i(v)|$ که این، تعداد همسایه‌هایی از u است که فاصله آن‌ها از رأس v برابر i می‌باشد. از نامساوی‌های مثلثی

$$d(u,v) \leqslant d(u,w) + d(w,v),$$

$$d(v,w) \leqslant d(v,u) + d(u,w)$$

نتیجه می‌گیریم $j \leqslant i + ۱$ و $i \leqslant j + ۱$ و لذا $j - i \leqslant ۱$ و $i - j \leqslant ۱$ پس $|i - j| \leqslant ۱$. پس برای این که $S_{۱ij}$ غیرصفر شود باید یکی از حالات $i = j - ۱$، $i = j$ و $i = j + ۱$ برقرار باشد[۶].

مثال ۱.۲.۱ برای $i = j - ۲$ داریم

$$s_{۱ij} = s_{۱(j-۲)j} = \{w \in V(G) \mid d(u,w) = ۱,\ d(v,w) = j - ۲,\ d(u,v) = j\}.$$

پس اگر رأسی از همسایه‌های u وجود داشته باشد که فاصله‌اش از رأس v برابر $j - ۲$ باشد در این صورت فاصله v و u کمتر از j خواهد شد.

برای $i = j + ۲$ داریم

$$s_{۱ij} = s_{۱(j+۲)j} = \{w \in V(G) | d(u,w) = ۱,\ d(v,w) = j + ۲,\ d(u,v) = j\}.$$

پس با فرض این که فاصله v و u برابر j باشد، فاصله همسایه‌های u از رأس v کمتر از $j + ۲$ خواهد شد.

این مقادیر را در $s_{۱ij}$ جای گذاری می‌کنیم. برای ساده کردن نماد گذاری فرض می‌کنیم

$$s_{۱(j-۱)j} = c_j, \quad s_{۱jj} = a_j, \quad s_{۱(j+۱)j} = b_j.$$

این مقادیر را در آرایه مقطع از G، که به صورت زیر تعریف می‌کنیم قرار می‌دهیم.

$$L(G)=\left\{\begin{array}{ccccc} * & c_1 & \dots & c_{d-1} & c_d \\ a_0 & a_1 & \dots & a_{d-1} & a_d \\ b_0 & b_1 & \dots & b_{d-1} & * \end{array}\right\}$$

توجه کنید که c_0 و b_d تعریف نشده‌اند، به همین خاطر آن را با $*$ نشان داده‌ایم.

آسان‌ترین راه برای فهمیدن اعداد مقطع فکر کردن در مورد یک افراز فاصله از G است. اگر u را رأس ثابتی در نظر بگیریم و فرض کنیم $v \in \Gamma_j(u)$، آنگاه c_j، a_j و b_j تعداد همسایه‌های u را نشان می‌دهند که فاصله آن‌ها از رأس v به ترتیب برابر $j-1$، j و $j+1$ است. پس c_j، a_j و b_j را به صورت زیر نیز می‌توان نوشت

$$c_j = |\{w \in V(G)|d(u,w)=1, d(v,w)=j-1\}| = |\Gamma_1(u) \cap \Gamma_{j-1}(v)|,$$

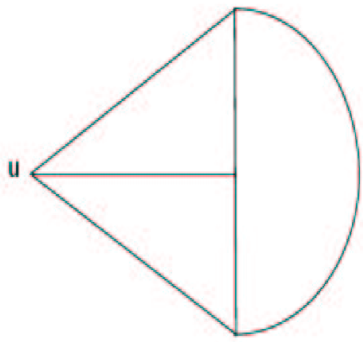
$$a_j = |\{w \in V(G)|d(u,w)=1, d(v,w)=j\}| = |\Gamma_1(u) \cap \Gamma_j(v)|,$$

$$b_j = |\{w \in V(G)|d(u,w)=1, d(v,w)=j+1\}| = |\Gamma_1(u) \cap \Gamma_{j+1}(v)|.$$

فرض می کنیم $k_i = |\Gamma_i(v)|$ باشد. حال اگر درجه رأس v برابر k_1 باشد، داریم

$$a_i + b_i + c_i = k_1.$$

مثال ۲.۲.۱



شکل ۳.۱: گراف کامل K_4

$d = ۱ \Rightarrow d(u,v) = j \in \{۰, ۱\},$

$$c_۱ = |\Gamma_۱(u) \cap \Gamma_۰(v)| = ۱, \quad a_۰ = |\Gamma_۱(u) \cap \Gamma_۰(v)| = ۰,$$

$$a_۱ = |\Gamma_۱(u) \cap \Gamma_۱(v)| = ۲, \quad b_۰ = |\Gamma_۱(u) \cap \Gamma_۱(v)| = ۳.$$

پس خواهیم داشت

$$L(K_۴) = \left\{ \begin{array}{cc} * & c_۱ \\ a_۰ & a_۱ \\ b_۰ & * \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{cc} * & ۱ \\ ۰ & ۲ \\ ۳ & * \end{array} \right\}$$

تعریف ۲.۲.۱ اگر گراف G دارای آرایه مقطع باشد آنگاه G را فاصله-منتظم گوییم. پس هر گراف فاصله-متعدی، یک گراف فاصله-منتظم است.

نتیجه ۱.۲.۱ به طور کلی برای هر گراف فاصله-متعدی داریم

۱) $a_۰ = ۰$. چون در $a_۰$ فاصله رئوس v و u برابر صفر است پس $a_۰ = |\Gamma_۱(u) \cap \Gamma_۰(v)| = ۰$ خواهد بود.

۲) $b_۰ = k$. زیرا در $b_۰$ فاصله رئوس v و u برابر صفر است و تعداد همسایه‌های u برابر درجه رأس u می‌باشد و چون هر گراف فاصله-متعدی، k-منتظم است پس $b_۰ = |\Gamma_۱(u) \cap \Gamma_۱(v)| = k$ خواهد بود.

۳) $c_۱ = ۱$. زیرا در $c_۱$ فاصله رئوس v و u برابر یک است، پس طبق رابطه تعداد همسایه‌های u که فاصله آن‌ها از رأس v برابر صفر باشد برابر خود رأس v است

$$c_۱ = |\Gamma_۱(u) \cap \Gamma_۰(v)| = ۱.$$

۴) چون هر گراف فاصله-متعدی k-منتظم است، پس جمع درایه‌های هر ستون از $L(G)$ همیشه برابر k است. پس اگر سطرهای بالایی و پایینی را داشته باشیم، با تفریق آن‌ها از k می‌توانیم سطر میانی را به دست آوریم.

به طور مثال اگر سطر بالایی به صورت $\left\{\begin{matrix} * & c_1 & \dots & c_{d-1} & c_d \end{matrix}\right\}$ و سطر پایینی به صورت $\left\{\begin{matrix} b_0 & b_1 & \dots & b_{d-1} & * \end{matrix}\right\}$ باشد داریم

$$
\begin{aligned}
a_0 &= k - b_0 = k - k = 0, \\
a_1 &= k - (c_1 + b_1), \\
a_2 &= k - (c_2 + b_2), \\
&\vdots \\
a_{d-1} &= k - (c_{d-1} + b_{d-1}), \\
a_d &= k - c_d.
\end{aligned}
$$

پس می‌توانیم آرایه مقطع را به صورت زیر بنویسیم

$$\left\{\begin{matrix} k & b_1 & \dots & b_{d-1}; 1 & c_2 & \dots & c_d \end{matrix}\right\}.$$

قضیه ۱.۲.۱ فرض کنید G یک گراف فاصله–متعدی و k–منتظم با قطر d باشد. فرض کنید G دارای آرایه مقطع $L(G) = \left\{\begin{matrix} k & b_1 & \dots & b_{d-1}; 1 & c_2 & \dots & c_d \end{matrix}\right\}$ و k_i رأس در $\Gamma_i(v)$ برای هر $v \in V(G)$ باشد. داریم

۱) برای هر $1 \leq i \leq d$ $\quad$ $k_{i-1}b_{i-1} = k_i c_i$،

۲) $1 \leq c_2 \leq \dots \leq c_d$،

۳) $k \geq b_1 \geq \dots \geq b_{d-1}$.

برهان . ۱) فرض می‌کنیم u رأس دلخواهی از $\Gamma_{i-1}(v)$ باشد. u با رئوسی از $\Gamma_i(v)$ مجاور است که فاصله آن‌ها از v برابر i و از u برابر یک باشد. پس هررأس دلخواهی مثل u از $\Gamma_{i-1}(v)$ با $|\Gamma_1(u) \cap \Gamma_i(v)| = b_{i-1}$ رأس از $\Gamma_i(v)$ مجاور است و چون طبق فرض، k_{i-1} رأس در $\Gamma_{i-1}(v)$ وجود دارد، پس تعداد کل یال‌هایی که رئوس $\Gamma_{i-1}(v)$ را به رئوس $\Gamma_i(v)$ وصل می کنند برابر $k_{i-1}b_{i-1}$ است.

حال فرض می‌کنیم w رأس دلخواهی از $\Gamma_i(v)$ باشد. w با رئوسی از $\Gamma_{i-1}(v)$ مجاور است که فاصله آن‌ها از v برابر $i - 1$ و از w برابر یک باشد. پس هر رأس دلخواهی مثل w از $\Gamma_i(v)$ با $|\Gamma_1(w) \cap \Gamma_i(v)| = c_i$ رأس از $\Gamma_{i-1}(v)$

مجاور است و چون طبق فرض k_i رأس در $\Gamma_i(v)$ وجود دارد، پس تعداد کل یال‌هایی که رئوس $\Gamma_i(v)$ را به رئوس $\Gamma_{i-1}(v)$ وصل می کنند، برابر $k_i c_i$ می‌باشد و چون برای هر دو رأس دلخواه q و p، اگر $q \sim p$، آنگاه $p \sim q$، پس تعداد کل یال‌هایی که رئوس $\Gamma_i(v)$ را به رئوس $\Gamma_{i-1}(v)$ وصل می‌کنند، با تعداد کل یال‌هایی که رئوس $\Gamma_{i-1}(v)$ را به رئوس $\Gamma_i(v)$ وصل می‌کنند برابر است، پس داریم $k_i c_i = k_{i-1} b_{i-1}$.

۲) فرض می‌کنیم $v \in V(G)$ ثابت باشد. رأس $u \in \Gamma_i(v)$ را طوری انتخاب می‌کنیم که به ازای هر $1 \leq i \leq d-1$ داشته باشیم $d(u,v) = i$. مسیر $u \; ... \; x \; v$ به طول i را طوری انتخاب می‌کنیم که $d(x,u) = i-1$ باشد. سپس رئوس $w \in \Gamma_{i-2}(x) \cap \Gamma_1(u)$ را انتخاب می‌کنیم. بنابراین $w \in \Gamma_{i-1}(v) \cap \Gamma_1(u)$، پس داریم

$$(\Gamma_{i-2}(x) \cap \Gamma_1(u)) \subseteq (\Gamma_{i-1}(v) \cap \Gamma_1(u))$$

و بنابراین

$$|\Gamma_{i-2}(x) \cap \Gamma_1(u)| \leqslant |\Gamma_{i-1}(v) \cap \Gamma_1(u)|.$$

چون G یک گراف فاصله–متعدی است، پس طبق تعریف به ازای هر i خواهیم داشت

$$|\Gamma_{i-2}(x) \cap \Gamma_1(u)| = c_{i-1},$$

$$|\Gamma_{i-1}(v) \cap \Gamma_1(u)| = c_i.$$

بنابراین $c_{i-1} \leq c_i$. می دانیم c_0 تعریف نشده است و $c_1 = 1$. پس خواهیم داشت $1 \leq c_2 \leq \ldots \leq c_d$.

۳) فرض می‌کنیم $v \in V(G)$ ثابت باشد. برای $i = 0, 1, ..., d-2$ رئوس $w \in \Gamma_i(v)$، و z مجاور به v را در نظر می‌گیریم. با استفاده از تعریف آرایه مقطع برای هر $u \in \Gamma_{i+1}(v) \cap \Gamma_1(w)$ خواهیم داشت $d(z,u) = i$ یا $d(z,u) = i+1$ یا $d(z,u) = i+2$.

چون G یک گراف k–منتظم است، پس برای همه رئوس G، بیشترین فاصله هر رأس از رئوس دیگر، با هم برابر است. فرض می‌کنیم $d(z,u) = i+2$ باشد. چون فاصله v و u برابر $i+1$ است، پس طبق افراز فاصله، بیشترین فاصله v، از رئوس داده شده نیز برابر $i+1$ است. هر کوتاه‌ترین مسیر از z به u باید شامل رأس v باشد. در غیراین صورت فاصله u و z بیشتر از $i+1$ خواهد شد و چون بیشترین فاصله دو رأس v و z، از رئوس دیگر با هم برابر

نیست به تناقض می‌رسیم. پس داریم

$$(\Gamma_{i+2}(z) \cap \Gamma_1(w)) \subseteq (\Gamma_{i+1}(v) \cap \Gamma_1(w)),$$

و بنابراین

$$|\Gamma_{i+2}(z) \cap \Gamma_1(w)| \leqslant |\Gamma_{i+1}(v) \cap \Gamma_1(w)|.$$

چون G یک گراف فاصله–متعدی است، پس طبق تعریف به ازای هر i داریم

$$|\Gamma_{i+2}(z) \cap \Gamma_1(w)| = b_{i+1},$$

$$|\Gamma_{i+1}(v) \cap \Gamma_1(w)| = b_i.$$

بنابراین $b_i \geq b_{i+1}$. چون $b_0 = k$ و b_d تعریف نشده است، پس خواهیم داشت

$$k \geq b_1 \geq \ldots \geq b_{d-1}.$$

$\square$

۳.۱ ماتریس مجاورت

برای آن که بتوان خواص جبری یک گراف را مورد مطالعه قرار داد ماتریس مجاورت گراف را تعریف می‌کنیم. در ادامه خواهیم دید که تا چه حد می‌توان از آن اطلاعات جامعی در مورد گراف اولیه به دست آورد.

ماتریس مجاورت $A(G) = [a_{ij}]$ از گراف G یک ماتریس $n \times n$ است که سطر ها و ستون های آن با رئوس گراف G اندیس گذاری شده‌اند و در آن a_{ij} تعداد یال هایی است که v_i و v_j را به هم وصل می‌کند. اگر گراف ساده باشد چون حلقه ندارد، پس همه عناصر روی قطر اصلی $A(G)$ صفر خواهند بود. اگر v_i با v_j مجاور باشد آنگاه چون v_j نیز با v_i مجاور است، پس ماتریس مجاورت برای گراف ساده، یک ماتریس متقارن حقیقی با درایه های $0-1$ خواهد بود که به صورت زیر تعریف می‌شود

$$A_{ij} = \begin{cases} 1 & u \sim v, \\ 0 & o.w. \end{cases}$$

مثال ۱.۳.۱

$$A(k_۴) = \begin{pmatrix} ۰ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ & ۰ \end{pmatrix}$$

فرض می کنیم چندجمله‌ای مشخصه گراف G، چند جمله‌ای $\phi(G) = det(\lambda I - A(G))$ باشد که صفرهای این چندجمله‌ای، مقادیرویژه G را تعیین می‌کنند. به طور مشابه، بردارهای ویژه G، بردارهای ویژه$A(G)$ هستند.

استفاده از چندجمله‌ای مشخصه برای به دست آوردن مقادیرویژه ماتریس های با مرتبه بزرگ، کار آسانی نیست. بهتر است که ابتدا بردارهای ویژه G را به دست آورده و سپس با استفاده از رابطه $AX = \lambda X$، مقادیرویژه λ را حساب کنیم، یا از یک نرم افزار کامپیوتری مثل $Maple$ استفاده کنیم.

از آن جایی که $A(G)$ متقارن و حقیقی است، پس G دارای n مقدار ویژه است، اما این مقادیر ویژه لزوماً متمایز نیستند.

با استفاده از دو لم زیر، خواهیم دید که این مقادیر ویژه، حقیقی هستند[۷].

لم ۱.۳.۱ فرض کنید A یک ماتریس متقارن حقیقی باشد. اگر u و v بردارهای ویژه A، با مقادیر ویژه متفاوت باشند، آنگاه u و v متعامدند.

برهان . فرض می کنیم A یک ماتریس متقارن حقیقی باشد و $Au = \lambda u$ و $Av = \tau v$. می‌دانیم $u^tAv = (v^tAu)^t$. طرف چپ این معادله برابر τu^tv و طرف راست آن برابر λu^tv است، بنابراین اگر $\tau \neq \lambda$، آنگاه $u^tv = ۰$. □

لم ۲.۳.۱ مقادیرویژه یک ماتریس متقارن حقیقی A، اعداد حقیقی هستند.

برهان . فرض کنید u یک بردارویژه از A با مقدارویژه λ باشد. با در نظر گرفتن اعداد موهومی از معادله $Au = \lambda u$ خواهیم داشت $A\overline{u} = \overline{\lambda}\overline{u}$ و بنابراین $\overline{u}$ یک بردار ویژه از A خواهد بود. حال با تعریف یک بردارویژه غیر صفر داریم $u^t\overline{u} > ۰$. پس با استفاده از لم قبلی، $\overline{u}$ و u مقادیرویژه مختلفی ندارند، بنابراین $\lambda = \overline{\lambda}$. □