دانشگاه صنعتی اصفهان
دانشکده علوم ریاضی

ساختار ایدآل‌های ماکزیمال در رده خاصی از جبرهای باناخ

پایان نامه کارشناسی ارشد ریاضی محض (آنالیز)

مصطفی زالی‌پور

استاد راهنما

دکتر مهدی نعمتی

دی‌ماه ۱۳۹۳

کلیه‌ی حقوق مادی مرتبط بر نتایج مطالعات، ابتکارات
و نوآوری‌های ناشی از تحقیق موضوع این پایان‌نامه
متعلق به دانشگاه صنعتی اصفهان است.

فهرست مطالب

چکیده:

در این پایان‌نامه، به معرفی و مشخصه‌سازی ایدآل‌های چپ ماکزیمال مدولار در دوگان دوم جبرهای باناخ، بخصوص جبرهای باناخ جابه‌جایی می‌پردازیم. سپس برای یک گروه فشرده موضعی G، به بررسی ایدآل‌های چپ ماکزیمال در دوگان دوم جبرگروهی $L^1(G)$ می‌پردازیم. همچنین با قرار دادن شرایطی بر روی ایدآل‌های ماکزیمال در $L^1(G)^{**}$ ارتباط آن‌ها را با ساختار توپولوژیک G مانند فشردگی و گسستگی بررسی خواهیم کرد. در ادامه با معرفی تابعک‌های پایای توپولوژیک، ارتباط آن‌ها را با ایدآل‌های ماکزیمال و مینیمال در جبرهای گروهی مورد مطالعه و بررسی قرار می‌دهیم. در پایان به بررسی ایدآل‌های چپ ماکزیمال مدولار روی جبرهای باناخ $LUC(G)^*$ و $M(G)$ و $L_0^\infty(G)^*$ و همچنین ویژگی‌های طیفی روی جبر باناخ $L_0^\infty(G)^*$ می‌پردازیم.

کد رده‌بندی موضوعی ریاضی: اولیه $۴۶H۰۵, ۴۶H۲۵$ و ثانویه $۴۳A۱۵, ۴۳A۲۰$

کلمات کلیدی: ایدآل چپ ماکزیمال مدولار، جبر باناخ جابه‌جایی، توابع پیوسته و کران‌دار، جبر باناخ منظم قوی، جبر گروهی، گروه آبلی فشرده موضعی.

فصل ۱

مقدمه

۱.۱ پیش گفتار

فرض کنیم A یک جبر باناخ باشد. در این صورت ایدآل چپ I در A را مدولار نامیم هرگاه عنصر $u \in A$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که برای هر $a \in A$ داشته باشیم

$$au - a \in I.$$

عنصر u یک همانی راست مدولار برای I و I یک ایدآل چپ مدولار نامیده می‌شود.
در سال ۱۹۶۲ سیوین [۱] در مرجع [۷] برای یک گروه فشرده‌ی موضعی آبلی G برخی از خواص ایدآل‌های چپ ماکزیمال مدولار $L^{1}(G)^{**}$ را بررسی کرد و از آنجایی که $L^{1}(G)^{**}$ دارای همانی راست است به‌طور معادل به بررسی ایدآل‌های چپ ماکزیمال $L^{1}(G)^{**}$ پرداخت.
در سال ۱۹۹۲ فیلالی[۲] [۱۲] و همچنین در سال ۱۹۹۵ قهرمانی و لائو [۳۲] به فکر تعمیم بررسی خواص ایدآل‌های ماکزیمال مدولار در دوگان دوم جبرهای باناخ افتادند و نتایج جالب توجهی در این زمینه به‌دست آوردند. در نهایت با انتقال این نتایج روی جبرهای گروهی و همچنین با توجه به ویژگی‌های خاص

[۱] Civin

[۲] Filali

این جبرها ارتباط بسیار نزدیکی با خواص ایدآل‌های ماکزیمال مدولار و ساختار توپولوژیک گروه فشرده‌ی موضعی G به‌دست آمد. در این زمینه به طور مبسوط کارهای دیگری نیز انجام گرفته است که می‌توان به مراجع [۸]، [۹]، [۱۵] و [۱۳] اشاره کرد.

در ادامه مقصودی و نصر [۳۵] در سال ۲۰۱۱ برای گروه فشرده‌ی موضعی G برخی خواص ایدآل‌های جبر گروهی $L_0^\infty(G)^*$ بخصوص ایدآل‌های ماکزیمال آن را مورد مطالعه و بررسی قرار دادند.

هدف این پایان‌نامه، مشخصه‌سازی ایدآل‌های چپ ماکزیمال مدولار و همچنین ایدآل‌های چپ مینیمال در دوگان دوم جبرهای باناخ بخصوص جبرهای باناخ جابه‌جایی می‌باشد که در نهایت با بررسی این ایدآل‌ها در جبرهای گروهی مانند $L^1(G)^{**}$، $LUC(G)^*$، $L_0^\infty(G)^*$ و $M(G)$ به مشخصه‌سازی این نوع از ایدآل‌ها در جبرهای گروهی و ارتباط آن با خواص توپولوژیک G پی می‌بریم.

به عنوان مثال نشان می‌دهیم اگر M یک ایدآل چپ منظم در A^{**} باشد، آن‌گاه یا $A \subseteq M$ یا عنصر یکتای $x \in X$ وجود دارد به طوری‌که $I_x \subseteq M$.

یکی از نتایج مهم که برای یک گروه آبلی G بر اساس ایدآل‌های چپ مدولار در جبر گروهی $L_0^\infty(G)^*$ ثابت خواهیم کرد این است که اگر G یک گروه آبلی فشرده‌ی موضعی و M یک ایدآل چپ در $L_0^\infty(G)^*$ باشد، آن‌گاه M یک ایدآل چپ منظم در $L_0^\infty(G)^*$ است اگر و تنها اگر عنصر یکتایی مانند γ در $\hat{G}$، مجموعه همه توابع ضربی کران‌دار و پیوسته روی G، وجود داشته باشد به‌طوری‌که $M = ker\, \psi_\gamma$، که در این‌جا ψ_γ یک تابعک خطی ضربی روی $L_0^\infty(G)^*$ متناظر با γ می‌باشد. در این راستا نیز نشان خواهیم داد که جبر $L_0^\infty(G)^*$ جابجایی است اگر و تنها اگر G گسسته و آبلی باشد. نتایج مشابه‌ای برای ایدآل‌های مینیمال جبرهای گروهی مانند $L^1(G)^{**}$، $LUC(G)^*$، $L_0^\infty(G)^*$ و $M(G)$ به‌دست خواهیم آورد.

این پایان‌نامه براساس مراجع [۱۲]، [۳۲]، [۷] و [۳۵] تنظیم شده است. ترتیب مطالب این پایان‌نامه به صورت زیر است.

در فصل ۱، برخی تعاریف، مفاهیم اولیه و نتایجی را که در ادامه‌ی پایان‌نامه استفاده می‌شود ارائه می‌دهیم.

در فصل ۲، به معرفی و مطالعه‌ی ایدآل‌های چپ ماکزیمال مدولار در دوگان دوم جبرهای باناخ جابه‌جایی می‌پردازیم و شرایط را برای بررسی این ایدآل‌ها روی رده‌ی خاصی از جبرهای باناخ فراهم می‌کنیم که در فصل‌های بعد بیان خواهیم کرد. بیشتر مطالب این فصل مبتنی بر کار لائو–قهرمانی در مرجع [۳۲] و فیلالی در مرجع [۱۲] است.

در فصل ۳، ابتدا مفاهیمی از دوگان دوم جبرهای باناخ را بیان می‌کنیم. سپس برای یک گروه آبلی و فشرده موضعی G ایدآل‌های چپ ماکزیمال روی $L^1(G)^{**}$ را بررسی می‌کنیم. در ادامه وجود ایدآل‌های چپ ماکزیمال را تحت شرایط خاص مورد مطالعه قرار می‌دهیم. به عنوان مثال نشان می‌دهیم که ایدآل‌های چپ ماکزیمال M در $L^1(G)^{**}$ وجود دارد به طوری که برای هر $\gamma \in \hat{G}$، داریم $M \not\supseteq L^1(G)$ و

$M \neq M_\gamma$ اگر و تنها اگر G فشرده نباشد. در پایان ایدآل‌های چپ ماکزیمال $L^1(G)^{**}$ را با در نظر گرفتن پوچ‌سازهای فضای خطی آن‌ها بررسی خواهیم کرد.

در فصل ۴، ابتدا به طور مختصر تعاریف و قضایایی از جبرهای باناخ روی گروه‌های فشرده‌ی موضعی را می‌آوریم، سپس به بررسی تابع پایای توپولوژیک و کاربردهای آن می‌پردازیم. در ادامه ایدآل‌های چپ ماکزیمال مدولار روی جبرهای باناخ $LUC(G)^*$، $L_0^\infty(G)^*$ و $M(G)$ همچنین ویژگی‌های طیفی روی جبر باناخ $L_0^\infty(G)^*$ می‌پردازیم. بیشتر مطالب این فصل مبتنی بر کار فیلالی در مرجع [۱۲] و مقصودی-نصر در مرجع [۳۵] است.

در بخش‌های بعدی این فصل، برخی مفاهیم اولیه و نتایجی را ارایه می‌دهیم که در ادامه‌ی پایان‌نامه استفاده می‌شود.

۲.۱ مقدمه‌ای بر توپولوژی و فضای باناخ

تعریف ۱.۲.۱. مجموعه‌ی X همراه با خانواده‌ی $\mathcal{U}$ از زیر مجموعه‌هایش یک فضای توپولوژیک نامیده می‌شود اگر

(الف) X و $\emptyset$ در $\mathcal{U}$ باشند؛

(ب) اشتراک تعداد متناهی از اعضای $\mathcal{U}$ در $\mathcal{U}$ قرار داشته باشد؛

(ج) اجتماع تعداد دلخواه از اعضای $\mathcal{U}$ در $\mathcal{U}$ قرار داشته باشد.

فضای توپولوژیک متشکل از X و $\mathcal{U}$ را با جفت $(X,\mathcal{U})$ نمایش می‌دهیم. اعضای $\mathcal{U}$ را زیرمجموعه‌های باز X می‌نامیم.

تعریف ۲.۲.۱. فضای توپولوژیک X را

(الف) هاسدورف می‌نامیم اگر برای هر $x, y \in X$ که $x \neq y$، مجموعه‌های باز و مجزای U و V در X وجود داشته باشند به طوری که

$$x \in U \ , \ y \in V.$$

(ب) منظم می‌نامیم اگر برای هر زیر مجموعه‌ی بسته‌ی C از X و هر نقطه‌ی x از X که $x \notin C$، مجموعه‌های باز و مجزای U و V در X وجود داشته باشند به طوری که

$$x \in U \ , \ C \subseteq V.$$

(ج) نرمال می‌نامیم اگر برای هر دو زیرمجموعه‌ی بسته C_1 و C_2 از X، دو زیرمجموعه‌ی باز و مجزای U_1 و U_2 در X وجود داشته باشند به طوری که

$$C_1 \subset U_1 \ , \ C_2 \subset U_2.$$

(د) فشرده‌ی موضعی می‌نامیم اگر هر نقطه از آن دارای یک همسایگی مانند U باشد به طوری که $\overline{U}$ فشرده است.

(ه) σ-فشرده می‌نامیم اگر X اجتماع تعداد شمارایی از زیر فضاهای فشرده‌ی آن باشد.

تعریف ۳.۲.۱. فرض کنیم X یک فضای توپولوژیک باشد.

(الف) مجموعه‌ی تمام توابع پیوسته‌ی مختلط-مقدار روی X را با $C(X)$ نشان می‌دهیم. $C(X)$ همراه با اعمال نقطه‌ای توابع، یک فضای برداری است. به‌علاوه برای $f \in C(X)$ محمل f به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\text{supp}(f) = \overline{\{x \in X : f(x) \neq 0\}}.$$

(ب) مجموعه‌ی تمام توابع پیوسته‌ی مختلط-مقدار کران‌دار روی X را با $C_b(X)$ نمایش می‌دهیم. بنابراین $C_b(X)$ یک زیرفضای $C(X)$ است و همراه با نرم $\|.\|_\infty$ یک فضای باناخ است

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| : x \in X\} \quad (f \in C_b(X)).$$

(ج) مجموعه‌ی تمام توابع پیوسته‌ی مختلط-مقدار f روی X که در بی‌نهایت صفر می‌شوند را با $C_0(X)$ نشان می‌دهیم؛ یعنی برای هر $\epsilon > 0$، زیرمجموعه‌ی فشرده‌ی K_ϵ از Xوجود دارد به طوری که $|f(x)| < \epsilon$ برای هر $x \in X \setminus K$. بنابراین $C_0(X)$یک زیرفضای $C(X)$ و ایدآل $C_b(X)$ است که همراه $\|.\|_\infty$ یک فضای باناخ است.

(د) مجموعه‌ی تمام توابع پیوسته‌ی مختلط-مقدار f روی X با محمل فشرده را با $C_{00}(X)$ یا $C_c(X)$ نشان می‌دهیم، که زیرفضای $C(X)$ و یک ایدآل $C_b(X)$ است. به‌علاوه همراه $\|.\|_\infty$ یک فضای باناخ است. همچنین $C_c(X)$ در $C_0(X)$، چگال است.

(ه) فرض کنیم X فشرده‌ی موضعی هاسدورف باشد. در این صورت

$$C_c(X) \subseteq C_0(X) \subseteq C_b(X) \subseteq C(X).$$

و اگر X فشرده باشد، آن‌گاه

$$C_c(X) = C_\circ(X) = C_b(X) = C(X).$$

تعریف ۴.۲.۱. فرض کنیم A یک مجموعه‌ی ناتهی باشد به طوری که رابطه‌ی دلخواه "$\geq$" برای عناصر آن تعریف شود و دارای شرایط زیر باشد

(الف) رابطه‌ی "$\geq$" بازتابی باشد؛ یعنی، برای هر $a \in A$ داشته باشیم $a \geq a$؛

(ب) رابطه‌ی "$\geq$" ترایایی باشد؛ یعنی، برای هر $a, b, c \in A$ اگر $a \geq b$ و $b \geq c$ آن‌گاه داشته باشیم $a \geq c$؛

(ج) اگر $a, b \in A$ آن‌گاه وجود داشته باشد $c \in A$ به طوری که $c \geq a$ و $c \geq b$.

در این صورت $(A, \geq)$ یا به طور ساده A را مجموعه‌ی جهت‌دار می‌نامیم.

تعریف ۵.۲.۱. منظور از یک تور در مجموعه‌ی X تابعی است مانند $f : A \longrightarrow X$ که در آن A یک مجموعه‌ی جهت‌دار است. با فرض $f(\alpha) = x_\alpha$ برای هر $\alpha \in A$، تور f را با $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ یا به اختصار با x_α نمایش می‌دهیم.

تعریف ۶.۲.۱. فرض کنیم A و B مجموعه‌های جهت‌دار و $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ یک تور در X باشد. در این‌صورت تور $(t_\beta)_{\beta \in B}$ را یک زیرتور $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ نامیم اگر تابعی مانند $g : B \longrightarrow A$ موجود باشد، به طوری که

(الف) $t_\beta = s_{g_{(\beta)}}$ برای هر $\beta \in B$.

(ب) برای هر $\alpha \in A$، $\beta \in B$ موجود باشد که $g(\gamma) > \alpha$ برای هر $\gamma \in B$ با شرط $\gamma > \beta$.

تعریف ۷.۲.۱. تور $(x_\alpha)_\alpha$ را در فضای توپولوژیک X، همگرا به $x \in X$ می‌نامیم اگر برای هر همسایگی U از x، وجود داشته باشد $\beta \in A$ به طوری که برای هر $\alpha \geq \beta$ داشته باشیم $x_\alpha \in U$.

قضیه ۸.۲.۱. برای هر $A \subseteq S$، اگر $\overline{A}$ بستار A در S را نشان دهد، آن‌گاه

(الف) $s \in \overline{A}$ اگر و تنها اگر یک تور (s_α) در A موجود باشد که $s_\alpha \longrightarrow s$.

(ب) A فشرده است اگر و تنها اگر هر تور در A، دارای یک زیرتور همگرا باشد.

به علاوه اگر T نیز یک فضای توپولوژیک و $\varphi : S \longrightarrow T$ یک تابع باشد، آنگاه φ پیوسته است اگر و تنها اگر برای هر تور s_α همگرا به s در S داشته باشیم $\varphi(s_\alpha) \longrightarrow \varphi(s)$.

تعریف ۹.۲.۱. فرض کنیم X یک فضای برداری توپولوژیک محدب موضعی باشد. در این صورت دوگان X را با X^* نشان می‌دهیم و برابر مجموعه‌ی همه‌ی تابعک‌های خطی و پیوسته‌ی $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ تعریف می‌کنیم.

تعریف ۱۰.۲.۱. فرض کنیم X یک فضای خطی نرم‌دار باشد.

(الف) منظور از توپولوژی ضعیف روی X، کوچک‌ترین توپولوژی روی X است که تحت آن هر $f \in X^*$ پیوسته است. این توپولوژی را با $\sigma(X, X^*)$ نمایش می‌دهیم. همگرایی تور (x_α) به x در X در توپولوژی ضعیف را همگرایی ضعیف (x_α) به x می‌نامیم و با نماد $x_\alpha \xrightarrow{w} x$ یا $x = w - \lim_\alpha x_\alpha$ نمایش می‌دهیم. توجه کنیم که $x_\alpha \xrightarrow{w} x$ اگر و تنها اگر $f(x_\alpha) \longrightarrow f(x)$ برای هر $f \in X^*$.

(ب) نگاشت $\varphi : X \longrightarrow X^{**}$ را با ضابطه‌ی $x \longmapsto \hat{x}$ تعریف می‌کنیم که در آن، $\hat{x}(f) = f(x) \quad (f \in X^*)$. توجه کنیم که φ خطی و طولپاست. لذا یک به یک نیز هست. منظور از توپولوژی ضعیف* روی X^*، کوچک‌ترین توپولوژی روی X^* است که تمام اعضای خانواده‌ی $\varphi(X)$ را پیوسته می‌سازد. این توپولوژی را با $\sigma(X^*, X)$ نمایش می‌دهیم. همگرایی تور (f_α) به f در این توپولوژی را همگرایی ضعیف*، f_α به f می‌نامیم و با نمادهای $f_\alpha \xrightarrow{w^*} f$ یا $f = w^* - \lim_\alpha f_\alpha$ نمایش می‌دهیم که معادل است با این که $f_\alpha(x) \longrightarrow f(x)$ برای هر $x \in X$.

تذکر ۱۱.۲.۱. توپولوژی ضعیف، کوچک‌ترین توپولوژی بر X با این خاصیت است که هر $f \in X^*$ تحت آن پیوسته شود. لذا به وضوح می‌توان گفت که توپولوژی ضعیف، ضعیف‌تر از توپولوژی حاصل از نرم روی فضای باناخ X است. یعنی اگر توپولوژی حاصل از نرم فضای باناخ X را با $\mathcal{T}$ و توپولوژی ضعیف روی X را با $\mathcal{T}_w$ نمایش دهیم آن‌گاه $\mathcal{T}_w \subseteq \mathcal{T}$.

در ادامه، به بیان چند قضیه مشهور و نتایج آن‌ها در فضاهای خطی نرم‌دار می‌پردازیم.

قضیه ۱۲.۲.۱ (هان-باناخ). فرض کنیم X یک فضای برداری نرم‌دار و Y یک زیرفضای خطی X باشد و $g \in Y^*$. در این صورت $f \in X^*$ وجود دارد که $g = f\big|_Y$ و $\|g\| = \|f\|$.

برهان . به قضیه‌ی ۵.۳ از [۴۳] رجوع کنید. ■

نتیجه ۱۳.۲.۱. فرض کنیم X یک فضای برداری نرم‌دار باشد. در این صورت گزاره‌های زیر برقرارند.

(الف) برای $x_0 \in X - \{0\}$، تابعک $f \in X^*$ موجود است که $f(x_0) = \|x_0\|$ و $\|f_0\| = 1$.

(ب) اگر Y یک زیرفضای بسته‌ی سره از X باشد، آن‌گاه $f \in X^*$ موجود است که $f \neq 0$ و $f \big|_Y = 0$.

قضیه ۱۴.۲.۱ (گلدشتاین). فرض کنیم X یک فضای برداری نرم‌دار باشد. در این صورت X در X^{**} ضعیف*-چگال است.

برهان . به قضیه‌ی ۱۶.۲ از [۴] رجوع کنید. ■

قضیه ۱۵.۲.۱ (باناخ-آلاغلو). فرض کنیم X یک فضای نرم‌دار باشد. در این صورت گوی یکه‌ی B_{X^*} از X^*، ضعیف*-فشرده است.

برهان . به قضیه‌ی ۳.۱۵ از [۴] رجوع کنید. ■

تعریف ۱۶.۲.۱. فرض کنیم X یک فضای خطی و $A \subseteq X$ ناتهی باشد. منظور از غلاف محدب A که با $\text{co}(A)$ نمایش داده می‌شود؛ اشتراک همه‌ی زیرمجموعه‌های محدب X است که شامل A هستند. در واقع،

$$\text{co}(A) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} t_i x_i : n \geq 1, \sum_{i=1}^{n} t_i = 1, t_i \geq 0, \forall i, x_i \in A \right\}.$$

قضیه ۱۷.۲.۱ (مازور). اگر X یک فضای نرم‌دار و $(x_\alpha)_{\alpha \in D}$ یک تور در X باشد به طوری که $x_\alpha \xrightarrow{w} x$، آن‌گاه $x \in \overline{\text{co}(\{x_\alpha : \alpha \in D\})}$.

برهان . به بخش ۳-۳ از [۴] رجوع کنید. ■

تعریف ۱۸.۲.۱. فرض کنیم X و Y دو فضای نرم‌دار باشند. $B(X,Y)$ فضای همه‌ی عملگرهای خطی و کران‌دار T از X به Y را نشان می‌دهد که در آن $\|T\| = \sup\{\|Tx\| : \|x\| \leq 1\}$. در حالت $Y = \mathbb{C}$، $B(X,Y)$ همان X^* و مقدار $f \in X^*$ را در $x \in X$ با $f(x)$ یا $\langle f, x \rangle$ نشان می‌دهیم. توجه کنیم که $B(X,Y)$ کامل است اگر و تنها اگر Y کامل باشد.

تعریف ۱۹.۲.۱. فرض کنیم X و Y فضاهای نرم‌دار باشند. منظور از توپولوژی عملگری قوی روی $B(X,Y)$، توپولوژی حاصل از پایه‌ی همسایگی صفر متشکل از مجموعه‌ی $\{T \in B(X,Y) : \|Tx\| < \epsilon, x \in A\}$ است که در آن $A \subseteq X$ متناهی و $\epsilon > 0$ است. این توپولوژی را با so نمایش می‌دهیم. در واقع تور $(T_\alpha) \subseteq B(X,Y)$ در توپولوژی عملگری قوی همگرا به صفر است اگر و تنها اگر برای هر $x \in X$، تور $(T_\alpha x)$ در Y به صفر همگرا باشد. بدیهی است که اگر $Y = \mathbb{C}$، آن‌گاه توپولوژی عملگری قوی روی $X^* = B(X, \mathbb{C})$ بر توپولوژی ضعیف* منطبق است.

تعریف ۲۰.۲.۱. فرض کنیم X یک فضای باناخ باشد. در این صورت

(الف) برای زیرمجموعه‌ی M از X، فضای متعامد M در X^* را با نماد $M^{\perp}$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$M^{\perp} = \Big\{ f \in X^* : f(x) = ۰,\ \forall x \in M \Big\}.$$

(ب) برای زیرمجموعه‌ی N از X^*، فضای متعامد N در X را با نماد $N^{\top}$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$N^{\top} = \Big\{ a \in X : f(a) = ۰,\ \forall f \in N \Big\}.$$

قضیه ۲۱.۲.۱. فرض کنیم X یک فضای باناخ و M زیرفضایی از X و N زیرفضایی از X^* باشند. در این صورت

(الف) $(M^{\perp})^{\top} = \bar{M}$.

(ب) $(N^{\top})^{\perp} = \bar{N}^{w^*}$.

برهان . به مرجع [۴۲] رجوع شود. ■

۳.۱ فضاهای اندازه‌پذیر

تعریف ۲۲.۳.۱. فرض کنیم X یک مجموعه باشد. خانواده‌ی Σ از زیرمجموعه‌های X را یک σ-جبر در X گوییم هرگاه Σ دارای خواص زیر باشد.

(الف) $X \in \Sigma$.

(ب) اگر $E \in \Sigma$، آن‌گاه $E^c \in \Sigma$ که در آن E^c متمم E نسبت به X است.

(ج) اگر $E_۱, E_۲, \ldots \in \Sigma$، آن‌گاه $\bigcup_{i=۱}^{\infty} E_i \in \Sigma$.

منظور از یک فضای اندازه‌پذیر (X, Σ)، مجموعه‌ی X مجهز به σ-جبر Σ است. در این صورت اعضای Σ را مجموعه‌های اندازه‌پذیر در X می‌نامیم.

هرگاه (X,Σ) یک فضای اندازه‌پذیر باشد و تابع $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ به گونه‌ای باشد که برای هر مجموعه‌ی باز V در $\mathbb{C}$، $f^{-1}(V) \subseteq X$، اندازه‌پذیر باشد گوییم f اندازه‌پذیر است.

برای یک فضای اندازه‌پذیر (X,Σ)، یک اندازه مثبت تابعی مانند $\mu : \Sigma \longrightarrow [0,\infty]$ است به طوری که $\mu(\emptyset) = 0$ و μ جمعی شمارش‌پذیر باشد؛ یعنی برای دنباله‌ی (E_n) از عناصر دوبه‌دو مجزای Σ داشته باشیم

$$\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i).$$

در این حالت، (X,Σ,μ) یا به طور ساده (X,μ) را یک فضای اندازه می‌نامیم. به علاوه، اندازه‌ی مثبت μ یک اندازه‌ی متناهی است هرگاه $\mu(X) < \infty$. منظور از یک اندازه‌ی مختلط روی X، تابعی جمعی شمارشی مانند $\mu : \Sigma \longrightarrow \mathbb{C}$ است. برای هر اندازه‌ی مختلط μ روی Σ، تابع $|\mu| : \Sigma \longrightarrow [0,\infty]$ را با دستور زیر تغییر کلی μ می‌نامیم

$$|\mu|(E) = \sup \sum_{i=1}^{n} |\mu(E_i)| \qquad (E \in \Sigma),$$

که در آن سوپریمم روی همه‌ی افرازهای متناهی $\{E_i\}_{i=1}^{n}$ از E متشکل از عناصر Σ تغییر می‌کند و $|\mu|$ یک اندازه‌ی مثبت متناهی روی X است.

تعریف ۲۳.۳.۱. فرض کنیم (X,Σ,μ) یک فضای اندازه باشد. در این صورت

(الف) هر تابع مختلط - مقدار s بر X که دارای برد متناهی است یک تابع ساده نام دارد. در واقع، اگر $t_1, ..., t_n$ مقادیر متمایز تابع ساده‌ی s باشند و قرار دهیم $E_i = \{x \in X : s(x) = t_i\}$، آنگاه $s = \sum_{i=1}^{n} t_i \chi_{E_i}$ که در آن χ_{E_i} تابع مشخصه‌ی E_i تعریف شده روی X است.

(ب) فرض کنیم $s : X \longrightarrow [0,\infty)$ یک تابع ساده‌ی اندازه‌پذیر باشد و $E \in \Sigma$. در این صورت تعریف می‌کنیم

$$\int_E s d\mu = \sum_{i=1}^{n} \mu(E_i \cap E).$$

و

$$\int_E f d\mu = \sup_{0 \leqslant s \leqslant f} \int_E s d\mu.$$

که در آن $f: X \longrightarrow [0,\infty]$ تابعی اندازه‌پذیر است.

(ج) برای هر تابع حقیقی-مقدار f روی X، توابع نامنفی f^+ و f^- را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$f^+ = \max\{f, 0\}, \quad f^- = -\min\{f, 0\}.$$

بدیهی است که $f = f^+ - f^-$ و $|f| = f^+ + f^-$. حال اگر $\int_X f^+ d\mu$ و $\int_X f^- d\mu$ متناهی باشند، آن‌گاه قرار می‌دهیم

$$\int_X f d\mu = \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu.$$

لذا برای هر تابع مختلط-مقدار $f = f_1 + i f_2$ روی X، اگر برای $i = 1, 2$ انتگرال $\int_X f_i d\mu$ تعریف شده و متناهی باشد، آن‌گاه تعریف می‌کنیم

$$\int_X f d\mu = \int_X f_1 d\mu + i \int_X f_2 d\mu.$$

(د) برای هر $1 \leqslant p < \infty$، خانواده‌ی همه‌ی توابع اندازه‌پذیر f روی X با شرط

$$\|f\|_p = (\int_X |f(x)|^p d\mu(x))^{1/p} < \infty.$$

را با $L^p(X,\mu)$ نمایش می‌دهیم. در $L^p(X,\mu)$ توابع تقریبا همه جا یکسان را یکی می‌گیریم؛ در این صورت $L^p(X,\mu)$ با اعمال جمع و ضرب اسکالر توابع و نرم $\|.\|_p$ یک فضای باناخ است. اگر μ اندازه‌ی شمارشی باشد؛ یعنی اندازه‌ای که به مجموعه‌های متناهی، تعداد عضوها و به مجموعه‌های نامتناهی، بی‌نهایت را نظیر می‌کند، آن‌گاه $L^p(X,\mu)$ را با $\ell^p(X)$ نیز نمایش می‌دهیم. در واقع، $\ell^p(X)$ فضای همه‌ی توابع $f: X \longrightarrow \mathbb{C}$ است به طوری که

$$\|f\|_p = (\sum_{x\in X} |f(x)|^p)^{1/p} < \infty.$$

که در آن

$$\sum_{x\in X} |f(x)|^p = \sup\Big\{ \sum \{f(x)\}^p : \text{متناهی } f \subseteq X \Big\}.$$

و برای هر مجموعه‌ی X همراه با توپولوژی گسسته داریم $c_0(X)^* \cong \ell^1(X)$.

تعریف ۲۴.۳.۱. فرض کنیم X یک فضای توپولوژیک باشد. در این صورت

(الف) کوچک‌ترین σ-جبر شامل تمام زیرمجموعه‌های بسته‌ی X را با $B(X)$ نمایش می‌دهیم و σ-جبر مجموعه‌های بورل X می‌نامیم. در ضمن، هر عضو $B(X)$ را یک مجموعه‌ی بورل گوییم. در واقع، $(X, B(X))$ یک فضای اندازه‌پذیر است.

(ب) اندازه‌ی مثبت یا مختلط μ روی X را بورل نامیم اگر روی $B(X)$ تعریف شده باشد.

(ج) اندازه‌ی مثبت بورل μ روی X را منظم بیرونی روی $E \in B(X)$ گوییم هرگاه

$$\mu(E) = \inf\{\mu(V) : \text{باز } V \supseteq E\}.$$

و μ را منظم درونی می‌نامیم اگر

$$\mu(E) = \sup\{\mu(K) : \text{فشرده } K \subseteq E\}.$$

بالاخره μ را منظم روی E گوییم هرگاه منظم درونی و منظم بیرونی باشد.

اندازه‌ی مختلط بورل μ را روی E منظم می‌نامیم اگر $|\mu|$ روی E منظم باشد.

(د) اندازه‌ی مثبت μ روی X را رادون می‌نامیم اگر روی مجموعه‌های فشرده مقدار متناهی، روی مجموعه‌های بورل، منظم بیرونی و روی مجموعه‌های باز منظم درونی باشد.

(ه) در حالتی که μ یک اندازه‌ی رادون روی X باشد، $A \subseteq X$ را به طور موضعی پوچ نامیم هرگاه برای هر زیرمجموعه‌ی فشرده‌ی $K \subseteq X$ داشته باشیم $\mu(A \cap K) = ۰$.

یک خاصیت وابسته به $x \in X$ به طور موضعی تقریبا در X برقرار است هرگاه مجموعه‌ی نقاطی که دارای آن خاصیت نیست، به طور موضعی پوچ باشد.

(و) $L^\infty(X, \mu)$ معرف خانواده‌ی همه‌ی توابع اندازه‌پذیر مختلط - مقدار f روی X است که

$$\|f\|_\infty = \inf\left\{t \in \mathbb{R} : t \geqslant ۰,\ |f(x)| \leqslant t \text{ تقریبا همه جا}\right\} < \infty.$$

در $L^\infty(X, \mu)$ نیز توابعی را که به طور موضعی تقریبا همه جا یکسان هستند، یکی می‌گیریم. در این صورت $L^\infty(X, \mu)$ همراه با اعمال نقطه‌ای و نرم $\|.\|_\infty$ یک فضای باناخ است.

(ز) برای هر $x \in X$، تابع $e_x : X \longrightarrow \mathbb{C}$، را با دستور زیر تعریف می‌کنیم

$$e_x(y) = \begin{cases} ۱ & x = y \\ ۰ & x \neq y \end{cases}$$

در این صورت چون برای هر $f \in \ell^p(X)$، مجموعه‌ی $\operatorname{coz}(f) = \{x \in X : f(x) \neq 0\}$ شماراست، $f \in \ell^p(X)$ را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$f = \sum_{x \in X} f(x) e_x.$$

در واقع می‌توان نوشت

$$f = \sum_{x \in X} c_i e_{x_i}.$$

که در آن x_iها تمام عناصر متمایز در $\operatorname{coz}(f)$ و c_iها اعدادی مختلط هستند.

(ح) فرض کنیم $M(X)$ مجموعه‌ی تمام اندازه‌های مختلط بورل منظم روی X باشد. در این صورت $M(X)$ همراه با جمع، ضرب اسکالر و نرم $(\mu \in X)\|\mu\| = |\mu|(X)$ یک فضای باناخ است.

اندازه‌ی $\delta_x \in M(X)$ روی X که برای هر زیرمجموعه‌ی بورل E از X به صورت $\delta_x(E) = \chi_E(x)$ تعریف می‌شود اندازه‌ی دیراک در x می‌نامیم، که در آن χ_E تابع مشخصه‌ی E روی X را نشان می‌دهد.

قضیه ۲۵.۳.۱ (نمایش ریس). فرض کنیم X یک فضای فشرده‌ی موضعی هاسدورف و P یک تابعک خطی مثبت روی $C_c(X)$ باشد. در این صورت یک اندازه‌ی رادون یکتا مانند μ روی X وجود دارد به طوری که $\|P\| = \|\mu\|$ و

$$P(f) = \int_X f d\mu \quad (f \in C_c(X)).$$

برهان . به مرجع [۲۰] رجوع کنید. ■

نتیجه ۲۶.۳.۱. فرض کنیم X یک فضای فشرده‌ی موضعی هاسدورف و P یک تابعک خطی کران‌دار روی $C_0(X)$ باشد. در این صورت یک اندازه‌ی یکتای $\mu \in M(X)$ وجود دارد به طوری که $\|P\| = \|\mu\|$ و

$$P(f) = \int_X f d\mu \quad (f \in C_0(X)).$$

برهان . به مرجع [۲۰] رجوع کنید. ■

۴.۱ جبرهای باناخ

تعریف ۲۷.۴.۱. فرض کنیم A یک فضای خطی روی میدان $\mathbb{C}$ باشد. در این صورت

(الف) اگر برای هر جفت a و b از عناصر A، ضرب ab تعریف شود به طوری که تحت این عمل A نیم گروه باشد و ضرب وابسته به عملگرهای خطی در A برای هر $a, b, c \in A$ و $t \in \mathbb{C}$ دارای ویژگی‌های زیر باشد

(۱) $a(b+c) = ab + ac$؛

(۲) $(a+b)c = ac + bc$؛

(۳) $(ta)b = a(tb) = t(ab)$؛

آن‌گاه A را یک جبر روی $\mathbb{C}$ می‌نامیم.

(ب) $B \subseteq A$ یک زیرجبر از جبر A است هرگاه همراه با اعمال A یک جبر باشد.

(ج) زیرجبر I از A یک ایدآل راست(چپ) A است هرگاه $IA \subseteq I$ $(AI \subseteq I)$. و ایدآل راست(چپ) I را دوری نامیم هرگاه یک $a \in I$ وجود داشته باشد به طوری که $I = aA$ $(I = Aa)$.

(د) جبر A نرم‌دار است هرگاه یک فضای خطی نرم‌دار باشد به طوری که برای هر $a, b \in A$ داشته باشیم

(۴) $\|ab\| \leqq \|a\|\|b\|$؛

در این حالت $\|\cdot\|$ را یک نرم جبری می‌نامیم. واضح است که این خاصیت نرم، باعث پیوستگی عمل ضرب جبر A می‌شود.

(ه) جبر نرم‌دار A یک جبر باناخ است هرگاه به عنوان یک فضای خطی نرم‌دار کامل(فضای باناخ) باشد.

(و) جبر نرم‌دار A را یکدار نامیم، هرگاه تحت ضرب عنصر همانی داشته باشد، یعنی عنصری یکتا مثل e در A وجود داشته باشد به طوری که برای هر $a \in A$ داشته باشیم

$$ae = ea = a.$$

به علاوه اگر $\|e\| = ۱$، آنگاه A را یک جبر یکانی نامیم.

(ز) جبر A را جابه‌جایی نامیم هرگاه برای هر $a, b \in A$ داشته باشیم

$$ab = ba.$$

(ح) فرض کنیم A یک جبر باناخ باشد. در این صورت ضرب دکارتی زیر را در نظر می‌گیریم

$$A^\sharp = A \times \mathbb{C}$$

به‌راحتی دیده می‌شود که $A^\sharp$ همراه با نرم و ضرب زیر یک جبر باناخ با عنصر همانی $(0, 1)$ می‌باشد.

$$(a, \lambda)(b, \mu) = (ab + \lambda b + \mu a, \lambda\mu)\ ,\ \| (a, \lambda) \| = \| a \| + | \lambda | \qquad (a, b \in A\ ,\ \mu, \lambda \in \mathbb{C}).$$

به‌وضوح $A^\sharp$ شامل $A \cong A \times \{0\}$ می‌باشد، که یک ایدآل بسته با همبعد یک است. $A^\sharp$ را یکدار شده A می‌نامیم.

(ط) به ازای یک جبر باناخ A، منظور از A- مدول باناخ، فضای باناخ X مجهز به نگاشت‌های $(a, x) \mapsto a \cdot x$ از $A \times X$ به X و $(x, a) \mapsto x \cdot a$ از $X \times A$ به X است به طوری که برای هر $a, b \in A$، $x, y \in X$ و $t \in \mathbb{C}$ داریم

(۱) $(tx + y) \cdot a = t(x \cdot a) + y \cdot a$ و $a \cdot (tx + y) = t(a \cdot x) + a \cdot y$،

(۲) $x \cdot (ab) = (x \cdot a) \cdot b$، $(ab) \cdot x = a \cdot (b \cdot x)$ و $a \cdot (x \cdot b) = (a \cdot x) \cdot b$،

(۳)یک مقدار ثابت و نامنفی c وجود دارد به طوری که برای هر $a \in A$ و $x \in X$،

$$\|a \cdot x\| \leq c\|a\|\|x\|\ ,\ \|x \cdot a\| \leq c\|a\|\|x\|.$$

تعریف ۲۸.۴.۱. فرض کنیم A یک جبر باناخ جابه‌جایی باشد. ایدآل I در جبر A را مدولار نامیم هرگاه عضوی چون u متعلق به A موجود باشد به طوری که برای هر $a \in A$،

$$a - ua \in I, \quad a - au \in I.$$

به‌وضوح با توجه به تعریف ایدآل مدولار در می‌یابیم که هر ایدآل شامل یک ایدآل مدولار نیز یک ایدآل مدولار است. همچنین به سادگی از لم زُرن می‌توان نتیجه گرفت که هر ایدآل محض و مدولار I در جبر باناخ A، درون یک ایدآل ماکزیمال مدولار مثل J قرار می‌گیرد. به این معنی که J یک ایدآل محض جبر A است که درون هیچ ایدآل محض و مدولار A، جز خودش قرار نمی‌گیرد.

مثال ۲۹.۴.۱. فرض کنیم $A = C[0, 1]$ جبر همه توابع پیوسته روی فاصله $[0, 1]$ باشد. در این صورت A همراه با ضرب نقطه‌ای و نرم یکنواخت یک جبر باناخ است. اگر $x \in [0, 1]$ را دلخواه انتخاب کنیم آن‌گاه،

به راحتی می‌توان دید که ایدآل بسته $I_x = \{f \in A : f(x) = 0\}$ یک ایدآل ماکزیمال مدولار در A می‌باشد به طوری که اگر $g \in A$ و $g(x) = 1$، آن‌گاه g یک همانی مدولار برای I_x می‌باشد.

قضیه ۳۰.۴.۱. فرض کنیم A یک جبر باناخ جابه‌جایی باشد. در این صورت هر ایدآل ماکزیمال و مدولار جبر A، فضای پوچ یک تابعک خطی ضربی است.

برهان . به صفحه‌ی ۷۹ از [۵] رجوع کنید. ∎

تذکر ۳۱.۴.۱. اگر J یک ایدآل بسته‌ی جبر نرم‌دار A باشد، آن‌گاه فضای A/J همراه با ضرب برداری

$$(a+J)(b+J) = ab + J \quad (a, b \in A)$$

و نرم $\|a+J\| = \inf\{\|a+b\| : b \in J\}$ یک جبر نرم‌دار است. در حالتی که A کامل باشد، آن‌گاه A/J نیز کامل است.

تعریف ۳۲.۴.۱. فرض کنیم A یک جبر نرم‌دار باشد. گوییم تور $(e_\alpha) \subseteq A$ یک همانی تقریبی راست برای A است اگر برای هر $a \in A$،

$$\|ae_\alpha - a\| \longrightarrow 0.$$

همانی تقریبی چپ به طور مشابه تعریف می‌شود. منظور از یک همانی تقریبی برای A یک همانی تقریبی چپ و راست است.

قضیه ۳۳.۴.۱. فرض کنیم A یک جبر باناخ یکانی با عنصر همانی e و a عضوی متعلق به A باشد به طوری که $\|a\| < 1$. آن‌گاه $e - a$، در A معکوس‌پذیر است؛ یعنی عنصری چون b در A موجود باشد به طوری که $(e-a)b = b(e-a) = e$.

برهان . به صفحه‌ی ۷ از [۳۷] رجوع کنید. ∎

تعریف ۳۴.۴.۱. فرض کنیم A یک جبر باناخ جابه‌جایی دلخواه باشد. در این صورت طیف جبر A را با $\Delta(A)$ نمایش می‌دهیم و آن را برابر مجموعه‌ی همه‌ی تابعک‌های خطی ضربی ناصفر و پیوسته روی A تعریف می‌کنیم.