وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
دانشگاه تحصیلات تکمیلی علوم پایه
گاوازنگ - زنجان

گراف‌های مقسوم علیه صفر حلقه‌ها و نیم‌حلقه‌ها

پایان‌نامهٔ کارشناسی ارشد

رمضان مرادی

استاد راهنما: **دکتر بهنام خسروی**

شهریور ۱۳۹۲

بسم الله الرحمن الرحیم

تقدیم به

مادرم که زندگیم را مدیون مهر و عطوفت آن می دانم.

پدر، مهربانی مشفق، بردبار و حامی.

همسرم که نشانه لطف الهی در زندگی من است.

دخترم که بهترین بهانه ی زیستن من است.

خدای متعال را شاکرم که نعمت دیگری از هزاران نعمت‌های بی‌پایانش را در اختیارم قرار داد، تا پای در راهی بگذارم که بر دانسته‌هایم بیفزایم و از آنچه نادانسته‌هایم است بکاهم هر چند قدر این نعمت بدرستی ندانستم.

سپاس از اساتید گرانقدری که قریب به دو سال از محضرشان بهره جستم. و تشکر از دوستانی که بودن در کنارشان انگیزه‌ام را بر ادامه راهم افزود.

سپاس ویژه خود را به استاد عزیزم جناب آقای دکتر بهنام خسروی تقدیم می‌کنم که آشنایی با ایشان یکی از تحولات بزرگ زندگی‌ام بود ایشان از هیچ تلاشی در طی راه دشوارم دریغ نورزیدند. و شادمانم که مرا بدین راه رهنمون شد.

چکیده

در این پایان‌نامه به بررسی گراف‌های مقسوم علیه صفر حلقه‌ها و نیم‌حلقه‌ها می‌پردازیم و گراف‌های مقسوم علیه صفر k-بخشی کامل و منتظم را مطالعه خواهیم کرد. همچنین همه‌ی حلقه‌های جابجایی و نیم حلقه‌های حذف‌پذیر جمعی را که گراف مقسوم علیه صفر آن‌ها دارای فقط یک ۳-دور و حداقل یک n-دور برای $n \geq ۴$ باشد را مشخص سازی خواهیم کرد و در ادامه به مطالعه‌ی ویژگی‌های حلقه‌ها و نیم‌حلقه‌ها و گراف مقسوم علیه صفر آن‌ها می‌پردازیم و همه‌ی حلقه‌ها و نیم‌حلقه‌های حذف‌پذیر جمعی جابجایی که گراف مقسوم علیه صفر آن‌ها دارای فقط یک ۳-دور، یک ۴-دور، دو ۴-دور و سه ۴-دور هستند را مشخص سازی خواهیم کرد.

فهرست

پیش‌گفتار

هدف اصلی این پایان نامه بررسی گراف‌های مقسوم علیه صفر حلقه‌ها و نیم‌حلقه‌ها است. در فصل یک به یادآوری برخی تعاریف اولیه از نظریه‌ی حلقه‌ها و نظریه‌ی گراف خواهیم پرداخت. در فصل دوم پس از بیان برخی ویژگی‌های گراف‌های مقسوم علیه صفر نیم‌حلقه‌ها، به بررسی گراف‌های دارای دور و فاقد دور خواهیم پرداخت. همچنین به مشخص سازی نیم‌حلقه‌هایی که گراف‌های مقسوم علیه صفر آن‌ها دارای تنها یک دور به طول ۳ و حداقل یک n-دور که $n \geq ۴$ هستند، می‌پردازیم. در فصل سوم نیم‌حلقه‌هایی را بررسی خواهیم کرد که گراف مقسوم علیه صفر آن‌ها دارای حداکثر سه دور به طول چهار هستند.

به زبان ساده و غیر دقیق، یک نیم‌حلقه، حلقه‌ای است که فرض وارون جمعی داشتن هر عضو ناصفر را از آن حذف کرده‌ایم. بدیهی‌ترین مثال از نیم‌حلقه‌ای که حلقه نیست، همان ساختار جبری روزمره یعنی اعداد طبیعی به همراه جمع و ضرب معمولی است. به طور مشابه اعداد حقیقی مثبت نیز با جمع و ضرب معمولی یک نیم‌حلقه است. مثال‌های غیر بدیهی نیم‌حلقه‌ها نخستین بار در کارهای ریاضی‌دان معروف آلمانی ریچارد ددکیند در [۸] در سال ۱۸۹۴ ظاهر شد. او در این مقاله، به مطالعه‌ی ارتباط بین جبر ایده‌آل‌های یک حلقه‌ی جابجایی پرداخت (توجه کنید که جمع هر دو ایده‌آل و ضرب هر دو ایده‌آل یک ایده‌آل است ولی به‌وضوح تفاضل دو ایده‌آل نمی‌تواند همیشه یک ایده‌آل باشد). بعدها این ساختار توسط ریاضی‌دانان معروف دیگری که اکثر آن‌ها آمریکایی بودند مثل وندیور [۱] مورد مطالعه و بررسی قرار گرفتند.

---

[۱] $Vandiver$

در واقع شاید بتوان وندیور را یکی از اصلی‌ترین کسانی دانست که با تلاش‌هایش توانست این ساختار ریاضیاتی را به عنوان یک ساختار بسیار کاربردی و با ارزش به جهان معرفی کند. اهمیت این ساختار را می‌توان از این حیث دانست که شامل حلقه‌ها و مشبکه‌های توزیع‌پذیر کراندار است [۱۷]. البته متاسفانه با تمام تلاش‌های وندیور، این ساختار تا دهه‌ی ۱۹۶۰ از توجه زیادی برخوردار نشد تا زمانی که کاربردهای مهم و واقعی آن شناخته شد. در واقع در این دهه بود که ساموبل ایلنبرگ [۱] به زبان نظریه‌ی زبان‌ها و اتوماتا علاقه‌مند شد و با استفاده از کارهای کسانی مانند سالوما [۲]، مارسل شوزنبرگ [۳] و جس رایت [۴] موفق به ارایه‌ای نظریه‌ای جبری شد که در سال ۱۹۷۴ به چاپ رسید. این ساختار جبری در واقع همان نیم‌حلقه‌ها بود که از میان آن‌ها شاید با ارزش‌ترین‌شان که حتی تا به امروز، جز به‌روزترین و کاربردی‌ترین ساختارهای جبری نیم‌حلقه‌ی است که اولین بار به طور مبسوط توسط اریک پین [۵] معرفی شد. این نیم‌حلقه از آن جهت بسیار با ارزش است که دارای کاربردهای بسیار عمیقی در بهینه‌سازی و بیوشیمی است. البته شایان ذکر است که بحث کاربرد نیم‌حلقه‌ها به صورت جدی در بهینه‌سازی، اولین بار توسط ریاضی‌دان انگلیسی، ریموند کانیگهام گرین [۶] در سال ۱۹۷۹ مطرح شد که اساس مطالعاتش بر پایه‌ی نتایج ریاضی‌دان معروف آمریکایی گیفلر [۷] بود. اگرچه قسمت اعظم کارهای گیفلر در مورد مسایل نظامی بود و به همین دلیل بیشتر کارهای او منتشر نشده‌اند.

---

[۱] $SamuelErlenberg$

[۲] $Salomaa$

[۳] $MarcelSchutzenberger$

[۴] $JessWright$

[۵] $EricPin$

[۶] $RaymondCuninghameGreen$

[۷] $Giffler$

زمینه کاربرد سوم نیم‌حلقه‌ها، در سال ۱۹۸۰ در کارهای برگسترا [۱] و همکارانش با ارایه‌ی مفهوم جبر فرآیندهای مراوده‌ای شناخته شد(مرجع [۶]). زمینه دیگر در سال ۱۹۶۹ توسط هوآر [۲] با معرفی سیستم معروفش موسوم به منطق هوآر [۳] در مطالعات برنامه های کامپیوتری مطرح شد که البته این بحث بعدها در دهه‌ی ۱۹۸۰ ، توسط ریاضی‌دانان دیگری مثل کوزن‌دنتر [۴] در [۱۴] و دیویدهارد [۵] در [۱۲] با معرفی ساختار جبر دینامیک [۶] و جبر کلین [۷] ادامه پیدا کرد.

نیم‌حلقه‌ها همچنین از اهمیت بسیار بالایی در محاسبات فازی برخوردارند و به این دلیل نیم‌حلقه‌هایی با همین رویکرد خاص معرفی شده‌اند (مرجع [۱۱] و [۱۹] راببینید) اما اگر بخواهیم از کاربردهای اخیر این ساختار نیز چند مورد را ذکر کنیم قطعا کاربرد نیم‌حلقه‌ها در بهینه‌سازی ترکیبیاتی که نخستین بار در سال ۱۹۹۳ توسط باروینک [۸] در [۵] مطرح شد مثالی بسیار مناسب است چون از کاربردهای بسیار زیادی در کامپیوترهای موازی برخوردار است ([۱۶] را ببینید).

---

۱ *Bergstra*

۲ *Hoare*

۳ *Hoarelogic*

۴ *DenterKozen*

۵ *DavidHared*

۶ *Dynamicalgebra*

۷ *Kleenealgebra*

۸ *Barvinok*

فصل اول

تعاریف و مقدمات

در این فصل نخست به یادآوری برخی تعاریف از نظریه‌ی حلقه‌ها می‌پردازیم و سپس به یادآوری برخی مطالب مورد نیاز از نظریه‌ی گراف‌ها خواهیم پرداخت در نهایت در بخش پایانی به کمک این مطالب، تعریف گراف مقسوم علیه صفر نیم‌حلقه‌ها را ارایه خواهیم داد.

۱.۱ مقسوم علیه صفر

تعریف ۱.۱.۱. مجموعه‌ی S به همراه عمل دوتایی $*$ یک تکواره با عنصر همانی ۱ است، یعنی

- برای هر $a, b, c \in S$ داریم $(a * b) * c = a * (b * c)$،
- برای هر $a \in S$ داریم $a * 1 = 1 * a = a$.

تعریف ۲.۱.۱. مجموعه‌ی S به همراه اعمال دوتایی $+$ و $\cdot$ را *نیم‌حلقه*[۱] می‌گویند، اگر

[۱] *Semiring*

۱. مجموعه S به همراه عمل دوتایی $+$ یک تکواره جابجایی با عنصر همانی 0 است، یعنی

- برای هر $a,b,c \in S$ داریم $(a+b)+c = a+(b+c)$،
- برای هر $a \in S$ داریم $a+0 = 0+a = a$،
- برای هر $a,b \in S$ داریم $a+b = b+a$.

۲. مجموعه S به همراه عمل دوتایی $\cdot$ یک تکواره با عنصر همانی ۱ است، یعنی

- برای هر $a,b,c \in S$ داریم $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$،
- برای هر $a \in S$ داریم $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$.

۳. قانون توزیع پذیری برای هر $a,b,c \in S$ داریم.

$$a \cdot (b+c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$$

$$(a+b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c)$$

۴. تکواره $(S, \cdot)$ دارای عضو پوچ ساز باشد.

- برای هر $a \in S$ داریم $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$.

مثال ۳.۱.۱. هر حلقه، یک نیم‌حلقه است.

مثال ۴.۱.۱. مجموعه‌ی اعداد صحیح (حقیقی) نامنفی با اعمال جمع و ضرب معمولی، یک نیم‌حلقه است.

مثال ۵.۱.۱. اعداد گویای نامنفی $\mathbb{Q}^{\circ} = \mathbb{Q}^{+} \cup \{0\}$ با اعمال جمع و ضرب معمولی، یک نیم‌حلقه است که حلقه نیست.

تعریف ۶.۱.۱. نیم‌حلقه‌ی S را *جابجایی* گوییم، هرگاه تکواره $(S,\cdot)$جابجایی باشد، یعنی برای هر $a,b\in S$ داشته باشیم

$$a\cdot b=b\cdot a$$

در غیر این‌صورت نیم‌حلقه‌ی S را ناجابجایی می‌نامیم.

مثال ۷.۱.۱. نیم‌حلقه‌ی *دوتایی بولین* روی مجموعه $\{۰,۱\}$ که اعمال دوتایی در آن به صورت جداول زیر است.

$+$	۰	۱
۰	۰	۱
۱	۱	۱

$\cdot$	۰	۱
۰	۰	۰
۱	۰	۱

توجه کنید که نیم‌حلقه‌ی دوتایی بولین و $(\mathbb{Z},+,\cdot)$ یکی نیستند زیرا $۱+۱\neq ۰$.

تعریف ۸.۱.۱. نیم‌حلقه‌ی S را با کاردینال متناهی گوییم هرگاه تعداد اعضای نیم‌حلقه‌ی S متناهی باشد و در غیر این‌صورت S را با کاردینال نامتناهی می‌گوییم. توجه کنید که کاردینال S را با $|S|$ یا $o(S)$ نمایش می‌دهیم.

مثال ۹.۱.۱. نیم‌حلقه‌ی دوتایی بولین که در مثال (۷.۱.۱) معرفی کردیم مثالی از یک نیم‌حلقه‌ی جابجایی با کاردینال متناهی است و نیم‌حلقه‌های ارایه شده در مثال‌های (۴.۱.۱) و (۵.۱.۱)، مثال‌هایی از نیم‌حلقه‌های جابجایی با کاردینال نامتناهی هستند.

واضح است که نیم‌حلقه‌های ارائه شده در هر یک از مثال‌های (۴.۱.۱) و (۵.۱.۱) جابجایی هستند. در زیر ساده‌ترین مثال از یک نیم‌حلقه‌ی جابجایی را ارایه می‌دهیم که در ادامه بحث به عنوان یک مثال کاربردی به آن نیازمندیم. البته توجه داریم که با استفاده از تعریف نیم‌حلقه‌ها، واضح است که هر حلقه‌ی ناجابجایی، یک نیم‌حلقه‌ی ناجابجایی است.

مثال زیر همچنین نیم‌حلقه‌ای با کاردینال نامتناهی است.

مثال ۱۰.۱.۱. فرض کنیم

$$S = M_{۲\times ۲} = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{Z}^+ \cup \{۰\} \right\}$$

مجموعه‌ی ماتریس‌های ۲×۲ با درایه‌هایی در $\mathbb{Z}^+ \cup \{۰\}$ باشد. در این‌صورت $(S, +, \cdot)$ با اعمال جمع و ضرب ماتریس‌ها، نیم‌حلقه‌ی ناجابجایی با کاردینال نامتناهی است و $\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ عضو همانی عمل ضرب نیم‌حلقه‌ی S است (توجه کنید که S نیز مثالی از یک نیم‌حلقه است که حلقه نیست).

تعریف ۱۱.۱.۱. نیم‌حلقه‌ی S را *کامل* گوییم، هرگاه به ازای هر $a, b \in S$، فرض $ab = ۰$ نتیجه دهد، $a = ۰$ یا $b = ۰$.

مثال ۱۲.۱.۱. توجه داریم که هر دامنه‌ی صحیح R مثالی از یک نیم‌حلقه‌ی کامل جابجایی است.

تذکر ۱۳.۱.۱. نیم‌حلقه‌های ارایه شده در مثال‌های (۴.۱.۱) و (۵.۱.۱)، همگی مثال‌هایی از نیم‌حلقه‌هایی جابجایی و کامل هستند که حلقه نیستند. همچنین نیم‌حلقه‌ی ارایه شده در مثال (۱۰.۱.۱) مثالی از یک نیم‌حلقه‌ی غیر کامل ناجابجایی است. از طرفی هر حلقه‌ی تقسیم R که میدان نباشد، مثالی از یک نیم‌حلقه‌ی ناجابجایی است که کامل است.

تعریف ۱۴.۱.۱. نیم‌حلقه‌ی S *حذف‌پذیر* جمعی است، اگر برای هر $a, b, c \in S$، فرض $a+c = b+c$ نتیجه دهد $a = b$.

مثال زیر نشان می‌دهد که به وضوح هر حلقه، یک نیم‌حلقه‌ی حذف‌پذیر جمعی است اگر چه مفهوم نیم‌حلقه‌های حذف‌پذیر جمعی، بسیار کلی‌تر از مفهوم حلقه‌ها است.

مثال ۱۵.۱.۱. فرض کنیم $R = \{(x, y) | x \in \mathbb{N}^{\circ}, y = ۰, ۱\}$ که در آن $\mathbb{N}^{\circ}$ مجموعه‌ی اعداد صحیح

نامنفی است. اعمال جمع و ضرب را روی مجموعه‌ی R به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$(x,y)+(x',y')=(x+x',r) \quad , \quad r \overset{۲}{\equiv} (y+y')$$
$$(x,y)\cdot(x',y')=(xx',s) \quad , \quad s \overset{۲}{\equiv} (xy'+yx')$$

می‌توان نشان داد $(R,+,\cdot)$ یک نیم‌حلقه‌ی جابجایی است که $(۰,۰)$ عضو همانی عمل جمع و $(۱,۰)$ عضو همانی عمل ضرب است. همچنین $(R,+,\cdot)$ نیم‌حلقه‌ای حذف‌پذیر جمعی است زیرا

$$(x,y)+(x',y')=(x'',y'')+(x',y') \Rightarrow (x+x',\overline{y+y'})=(x+x'',\overline{y''+y'})$$

در نتیجه داریم $x+x'=x''+x'$ چون $\mathbb{N}^{\circ}$ حذف‌پذیر جمعی است لذا داریم $x=x''$ از طرفی

$$\overline{y+y'}=\overline{y''+y'} \Rightarrow \overline{y-y'}=۰ \Rightarrow \overline{y}=\overline{y'}.$$

یکی از ساختارهایی که به صورت معمول می‌توان از آن در ساخت نیم‌حلقه‌ها استفاده کرد، مشبکه[۱]ها هستند که به دلیل خاصیت مرتب جزیی بودنشان در عمل از کارآیی بسیار بالایی در مطالعات ریاضی برخوردار هستند. در ادامه به اختصار به یادآوری مفهوم مشبکه می‌پردازیم. و سپس بحث مختصری درمورد نحوه‌ی کاربرد آن‌ها در نظریه‌ی نیم‌حلقه‌ها خواهیم کرد.

تعریف ۱۶.۱.۱. مشبکه $(L,\wedge,\vee)$ مجموعه‌ی ناتهی L با دو عمل دوتایی $\wedge$ و $\vee$ به قسمی که برای هر $x,y,z\in L$ شرایط زیر برقرار است.

۱. قانون *جابجایی* $x\vee y=y\vee x$ و $x\wedge y=y\wedge x$

۲. قانون *شرکت‌پذیری* $x\vee(y\vee z)=(x\vee y)\vee z$ و $x\wedge(y\wedge z)=(x\wedge y)\wedge z$

۳. قانون *جذب* $x\wedge(x\vee y)=x$ و $x\vee(x\wedge y)=x$

---

[۱] *Lattice*

۴. قانون *خودتوانی* $x \wedge x = x$ و $x \vee x = x$

می توان ثابت کرد که تعریف بالا از مشبکه، با تعریف زیر معادل است.

تعریف ۱.۱.۱۷. مجموعه‌ی مرتب $(L, \leq)$ را مشبکه می‌نامیم هرگاه برای هر $x, y \in L$، $sup\{x, y\} = x \vee y$ و $inf\{x, y\} = x \wedge y$ در L موجود باشند.

مثال ۱.۱.۱۸. $(\mathbb{N}, min.max)$ مجموعه اعداد طبیعی با اعمال min و max یک مشبکه است.

مثال ۱.۱.۱۹. اگر $L = \{0, 1, 3, 5, 7\}$، آنگاه L با اعمال inf وsup یک مشبکه است که زنجیر زیر نمودار آن است.

تذکر ۱.۱.۲۰. اگر $(L, \wedge, \vee)$ یک مشبکه باشد، در این صورت تعریف می‌کنیم $x \leq y$ اگر و تنها اگر $x \wedge y = x$ (یا $x \leq y$، اگر و تنها اگر $x \vee y = y$). در این صورت به سادگی می‌توان دید $(L, \leq)$ مجموعه مرتب جزئی است.

به وضوح برای هر مشبکه‌ی متناهی $(L, \wedge, \vee)$ که دارای کوچکترین عنصر ۰ و بزرگترین عنصر ۱ است به ازای هر $x \in L$ داریم $x \vee 0 = x$ و $x \wedge 1 = x$.

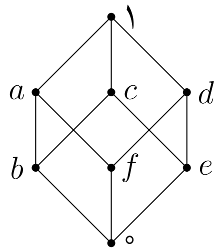
از آنجایی که هر مشبکه متناهی یک نیم‌حلقه است (عمل ضرب نیم‌حلقه را $\vee$ و عمل جمع آن را $\wedge$ تعریف می‌کنیم)، عضو ابتدایی زنجیر $(L, \leq)$، صفر نیم‌حلقه است. همچنین توجه کنید که هر مشبکه متناهی مرتب کلی، نیم‌حلقه‌ی کامل است.

اگرچه در تعریف نیم‌حلقه از تعریف مشابه (۱۶.۱.۱) استفاده نشده است و در عمل جای $\wedge$ و $\vee$ تغییر کرده است توجه کنید که برای مشبکه‌ی $(L, \wedge, \vee)$ می‌توان به سادگی دید که $(L, \vee, \wedge)$ (یعنی همان مجموعه‌ی زمینه‌ی L که جای اعمالش را عوض کرده‌ایم) نیز یک مشبکه است. این مشبکه را دوگان مشبکه‌ی $(L, \wedge, \vee)$ می‌نامیم. این مشبکه‌ها از این حیث حایز اهمیت هستند که ما را از تکرار بحث بی‌نیاز می‌کند زیرا در جبر جامع ثابت می‌شود که نتایج در مورد یک مشبکه را می‌توان در مورد دوگانش نیز ثابت کرد. لازم به ذکر است که مشبکه‌ها به روش بالا تبدیل به نیم‌حلقه‌هایی می‌شوند که لزوما حلقه نیستند.

تذکر ۲۱.۱.۱. مشبکه$(L, \wedge, \vee)$ نیم‌حلقه است و حلقه نیست، زیرا هر عنصر لزوما دارای وارون جمعی نیست.

$$\forall x \in L, \exists ! y : x \wedge y = ۱$$

مثال ۲۲.۱.۱. فرض کنیم نمودار مشبکه S به صورت زیر باشد.



در این‌صورت S نیم‌حلقه‌ی جابجایی با اعمال دوتایی کوچکترین کران بالای دو عضو و بزرگترین کران پایین دو عضو است. همچنین کاردینال S متناهی است و به علاوه S غیر کامل است زیرا $b \cdot f = b \wedge f = ۰$.

تعریف ۲۳.۱.۱. فرض کنیم $S_۱$ و $S_۲$ دو نیم‌حلقه باشند. در این‌صورت حاصل ضرب مستقیم $S_۱$ و $S_۲$ نیم‌حلقه‌ای است که مجموعه‌ی عناصرش عبارت است از $S_۱ \times S_۲ = \{(s_۱, s_۲) | s_۱ \in S_۱, s_۲ \in S_۲\}$

و اعمال دوتایی آن به صورت مولفه‌ای تعریف شده‌اند. به طور مشابه به ازای هر تعداد متناهی از نیم‌حلقه‌های $S_1, S_2, \cdots, S_n$، حاصل ضرب مستقیم این نیم‌حلقه‌ها نیز نیم‌حلقه است، که مجموعه‌ی راس‌هایش همان ضرب دکارتی S_iها و اعمال دوتایی‌اش مولفه‌ای هستند.

$$S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_n = \{(s_1, s_2, \cdots, s_n) | s_i \in S_i, i = 1, 2, \cdots n\}$$

تعریف ۲۴.۱.۱. فرض کنیم S یک نیم‌حلقه باشد و $P \subseteq S$. در این‌صورت P زیرنیم‌حلقه‌ای از S است اگر و تنها اگر P یک نیم‌حلقه با همان اعمال القایی از S باشد.

مثال ۲۵.۱.۱. اگر $\mathbb{Z}^{\circ} = \mathbb{Z}^{+} \cup \{0\}$ و $\mathbb{Z}^{\circ}[x] = \{f(x) \in \mathbb{Z}[x] |$ تمام ضرایب $f(x)$ نامنفی هستند $\}$، آنگاه $\mathbb{Z}^{\circ} \subseteq \mathbb{Z}^{\circ}[x]$ با اعمال جمع و ضرب معمولی توابع زیرنیم‌حلقه‌ای از $\mathbb{Z}^{\circ}[x]$ است.

به یاد داریم که اگر $\mathbf{R}$ یک حلقه باشد، عنصر $a \in \mathbf{R}$ را یک *مقسوم علیه صفر* گوییم در صورتی که عنصر ناصفر $b \in \mathbf{R}$ چنان موجود باشد که $ab = 0$ یا $ba = 0$. مجموعه‌ی همه‌ی مقسوم علیه‌های صفر حلقه‌ی $\mathbf{R}$ را با $Z(\mathbf{R})$ نمایش می‌دهیم. به طور مشابه می‌توان مفهوم مقسوم علیه صفر نیم‌حلقه‌ها را تعریف کرد.

تعریف ۲۶.۱.۱. فرض کنید S یک نیم‌حلقه باشد. مجموعه‌ی تمام مقسوم علیه‌های صفر S را با $Z(S)$ نماش می‌دهیم آنگاه

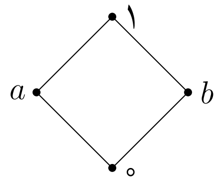
$$Z(S) = \{x \in S \mid \exists\, 0 \neq y \in S \text{ به قسمی که } xy = 0 \text{ یا } yx = 0\}$$

تعریف ۲۷.۱.۱. اگر S یک نیم‌حلقه باشد، عنصر $x \in S$ را *خودتوان* گوییم، اگر $x = x^2 = x \cdot x$.

مثال ۲۸.۱.۱. اگر X مجموعه‌ی ناتهی و $P(X)$ مجموعه‌ی توانی X باشد، اعمال $A \oplus B = A \cup B$ و $A \odot B = A \cap B$ را در $P(X)$ تعریف می‌کنیم. در این‌صورت $(P(X), \oplus, \odot)$ نیم‌حلقه‌ای است که $\emptyset$ عضو ۰ و X عضو ۱ آن است. در این نیم‌حلقه، کلیه‌ی اعضا خودتوان هستند، زیرا

$$\forall A \in P(X) : A \odot A = A \cap A = A.$$

مثال ۲۹.۱.۱. فرض کنیم S مشبکه‌ی توزیع‌پذیر باشد در این‌صورت S یک نیم‌حلقه است و نمودار آن به صورت زیر است.



می‌دانیم چون S مشبکه‌ی توزیع‌پذیر است در نتیجه S یک نیم‌حلقه است. توجه داریم که چون برای $a, b \in S$ داریم $a \cdot b = 0$ پس a و b دو مقسوم علیه صفر نیم‌حلقه‌ی S هستند. از طرفی نیم‌حلقه‌ی S دارای عناصر خودتوان a و b است زیرا $a^2 = a$ و $b^2 = b$.

تعریف ۳۰.۱.۱. فرض کنیم نیم‌حلقه‌ی S یکدار باشد. عنصر $x \in S$ دارای معکوس است اگر $y \in S$ ای وجود داشته باشد به طوری که $xy = yx = 1$.

مثال ۳۱.۱.۱. چون $\mathbb{Q}^{0}$ یک نیم‌حلقه است و حاصل ضرب مستقیم دو نیم‌حلقه خود نیم‌حلقه است، لذا $S = \mathbb{Q}^{0} \times \mathbb{Q}^{0}$ نیم‌حلقه‌ای است که $(1, 1)$ عضو همانی آن تحت عمل ضرب است. فرض کنیم $a = (\frac{5}{3}, \frac{2}{7}) \in S$ در این‌صورت $b = (\frac{3}{5}, \frac{7}{2}) \in S$ معکوس عنصر a است زیرا $ab = (1, 1)$.

به یاد داریم که هر میدان (حلقه‌ی تقسیم) یک نیم‌حلقه است که هر عنصرش وارون پذیر است.

۱.۱.۱ زیرنیم‌حلقه‌ی تولید شده توسط یک مجموعه

در این زیر بخش توضیح مختصری در خصوص تولید یک زیرنیم‌حلقه توسط یک مجموعه‌ی ناتهی را بیان می‌کنیم.

تعریف ۳۲.۱.۱. زیرحلقه‌ی تولید شده توسط مجموعه‌ی $X \subseteq S$ در نیم‌حلقه‌ی S عبارت است از

اشتراک تمام زیرنیم‌حلقه‌های S که شامل X هستند.

اگر چه این تعریف بسیار جامع است ولی در عمل نمی‌توان به راحتی آن را به کار گرفت و زیرنیم‌حلقه‌ی تولید شده توسط یک زیر مجموعه را محاسبه کرد زیرا برای محاسبه‌ی این نیم‌حلقه‌ها، بایستی تمام این زیر نیم‌حلقه‌هایی که شامل آن زیرمجموعه هستند را بشناسیم که در عمل محاسباتی بسیار طولانی و پیچیده را نیاز دارد، به این دلیل در زیر ابزاری برای محاسبه‌ی زیر نیم‌حلقه‌ی تولید شده ارایه می‌دهیم.

تذکر ۳۳.۱.۱. یادآوری می‌کنیم که بنابر قضایای جبر جامع، زیرنیم‌حلقه‌ی تولید شده توسط یک مجموعه ناتهی X عبارت است از مجموعه تشکیل شده از مجموع‌های متناهی از حاصل‌ضرب‌های متناهی روی مجموعه‌ی X (برای مطالعه‌ی بیشتر مرجع [۷] را ببینید).

مثال ۳۴.۱.۱. در مثال (۲۲.۱.۱) فرض کنیم $X = \{a, e\}$. در این‌صورت چون داریم

$$e \cdot e = e \quad , \quad a \cdot a = a \quad , \quad e \cdot a = 0$$
$$a \cdot 0 = 0 \quad , \quad e \cdot 0 = 0$$

لذا زیر نیم‌حلقه‌ی تولید شده توسط مجموعه‌ی $X = \{a, e\}$ در آن نیم‌حلقه، برابر با مجموعه‌ی $\{0, a, e\}$ است.

۲.۱ گراف

در این بخش پس از تعریف یک گراف و اجزای آن به بیان برخی مفاهیم همچون مسیر، فاصله‌ی بین دو راس، قطر، دور و کمر گراف می‌پردازیم و در ادامه گراف‌هایی همچون دوستاره و $\overline{K}_{m,n}^{\triangle(r_1,r_2,r_3)}$ را معرفی خواهیم کرد.

تعریف ۱.۲.۱. گراف ساده G را به صورت زوج مرتب $(V(G), E(G))$ تعریف می‌کنیم که در آن