

الله الرحمن الرحيم

دانشگاه یزد

دانشکده فیزیک

پایان نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد

فیزیک - اتمی و مولکولی

شبیه‌سازی حرکت الکترون در میدان‌های هدایت‌کننده

لیزر الکترون آزاد

استاد راهنما: دکتر محسن حاتمی

استاد مشاور: دکتر محمدکاظم توسلی

پژوهش و نگارش: ایمان رفیعی

مهرماه ۱۳۸۸

تقدیم به :

همسر عزیزم

و فرزندان ایران زمین

سپاس بی‌پایان خدایی را که چگونگی و چرایی را نخستین سوال ذهنم قرار داد و برای یافتن

جواب‌ها خود چراغ راهم شد.

" آن کس است اهل بشارت که اشارت داند

نکته‌ها هست بسی محرم اسرار کجاست "

تشکر و تقدیر از تمامی معلمانم از ابتدای راه تحصیل تا کنون و سپاسی که نه در وصف آید و

نه در کلام گنجد از استاد بزرگوار، جناب آقای دکتر محسن حاتمی به پاس تمام

روشنگری‌ها و تلاش‌های بی‌پایان‌شان و با تشکر از جناب آقای دکتر توسلی مشاور پایان‌نامه

به خاطر دقت نظر و همراهیشان . سپاسی همگام با لحظه لحظه زندگیم از همه اساتید.

تشکری همیشگی نثار پدر فداکار و مادر عزیزم

و یار و یاور زندگی همسر مهربانم

و با تقدیر و سپاس از تمامی دوستانم، تشکری بی‌پایان از همراه همیشگی

جناب آقای پشمان خورشید.

چکیده

تجزیه و تحلیل مسیره‌های پایای الکترون در لیزر الکترون آزاد با ویگلر مارپیچی با میدان مغناطیسی محوری، کانال یونی راهنما و ویگلر تخت با کانال یونی راهنما با استفاده از دینامیک تک ذره‌ای بررسی شده است. حالت‌های پایداری مدار الکترون به دست آمده و ناحیه‌های پایدار و ناپایدار تعیین می‌شود. هم‌چنین تابع Φ برای تعیین رژیم‌های مثبت و منفی مورد بررسی قرار می‌گیرد. ملاحظه می‌شود که ویگلر مارپیچی واقعی با کانال یونی راهنما نسبت به ویگلر مارپیچی ایده‌آل متفاوتند و این دو حالت با هم مقایسه می‌شوند. هم‌چنین مسیر الکترون در لیزر الکترون آزاد با ویگلر تخت واقعی و کانال یونی راهنما بررسی شده و با ویگلر تخت ایده‌آل مقایسه می‌شوند. با استفاده از تابع Φ نرخ تغییرات انرژی الکترون که باعث تغییر سرعت محوری و بهره می‌شود، بررسی گردیده است.

هم‌چنین رفتار الکترون تحت اثر میدان ویگلر باریک‌شونده با بهره‌گیری از معادلات حرکت سه بعدی ذره و معادلات گسیل تابشی شبیه‌سازی شد. در این راستا پرتو الکترون فرودی با استفاده از مولد عددی اتفاقی گوسی تولید گردید. برای جلوگیری از آثار سه بعدی الکترون خارج از محور و افزایش بازدهی در مقایسه با روش‌های متداول از میدان راهنمای محوری و ویگلر پیچشی باریک‌شونده استفاده گردید.

هم‌چنین دیدیم دامنه میدان تابشی وابسته به کیفیت پرتو الکترونی فرودی است. بنابراین برای به دست آوردن دامنه میدان بالاتر، پرتو الکترونی فرودی می‌بایست تشعشع، پراکندگی انرژی و شعاع پرتو کم‌تری داشته باشد. مقدار بهینه پارامتر میدان راهنمای محوری و ویگلر پیچشی باریک‌شونده با استفاده از مطالعات عددی به دست آمده است. با به کار بردن مقادیر بهینه، دامنه میدان تابشی $2/5$ برابر نسبت به حالت متداول افزایش داشته است. در مجموع در حال حاضر اکثر مطالعات بر روی این نوع میدان‌های پیچشی باریک‌شونده به همراه میدان راهنما متمرکز بوده است.

فهرست مطالب

صفحه	عنوان
۱.....	فصل ۱ - مقدمه‌ای بر لیزر الکترون آزاد.....
۲.....	۱-۱- مقدمه.....
۴.....	۱-۲- اصول لیزر الکترون آزاد.....
۷.....	۱-۲-۱- انواع و بگرها.....
۷.....	۱-۲-۲- مزایا و محدودیت های لیزر الکترون آزاد.....
۷.....	۱-۲-۳- ابزار راهنما در لیزر الکترون آزاد.....
۹.....	فصل ۲- مسیر الکترون با ویگلر مارپیچی ایده‌آل و کانال یونی راهنما.....
۱۰.....	۱-۲- مقدمه.....
۱۴.....	۱-۲-۲- مسیر الکترون با ویگلر مارپیچی ایده‌آل و کانال یونی راهنما.....
۱۴.....	۱-۲-۲-۱- کانال یونی.....
۱۵.....	۱-۲-۲-۲- معادلات حرکت.....
۱۸.....	۱-۲-۲-۳- مسیرهای پایدار.....
۲۱.....	۱-۲-۲-۴- رژیم‌های جرم مثبت و منفی.....
۲۳.....	فصل ۳- مسیر الکترون با ویگلر مارپیچی واقعی و کانال یونی راهنما.....
۲۴.....	۱-۳- مقدمه.....
۲۹.....	۱-۳-۲- مسیر الکترون با ویگلر مارپیچی واقعی و کانال یونی راهنما.....
۲۹.....	۱-۳-۲-۱- معادلات حرکت.....
۳۱.....	۱-۳-۲-۲- مسیرهای پایدار.....
۳۴.....	۱-۳-۲-۳- رژیم‌های جرم مثبت و منفی.....
۳۶.....	فصل ۴- مسیر الکترون با ویگلر تخت واقعی و کانال یونی راهنما.....

عنوان	صفحه
۱-۴- مقدمه	۳۷
۴-۱-۱- مسیر الکترون با ویگلر تخت ایده‌آل و کانال یونی راهنما	۳۷
۴-۲- مسیر الکترون با ویگلر تخت واقعی و کانال یونی راهنما	۴۱
۴-۲-۱- معادلات حرکت	۴۱
۴-۲-۲- جابه‌جایی عرضی بسیار کوچک	۴۲
۴-۲-۳- مسیرهای پایدار	۴۳
۴-۲-۴- بدون در نظر گرفتن تقریب	۴۴
۴-۲-۵- مسیرهای پایدار	۴۶
۴-۲-۶- رژیم‌های جرم مثبت و منفی	۴۷
فصل ۵- شبیه‌سازی حرکت الکترون در میدان‌های ویگلر پیچشی باریک‌شونده با	
میدان راهنمای محوری	۴۹
۵-۱- مقدمه	۵۰
۵-۲- مدل تئوری	۵۰
۵-۳- تحلیل عددی	۵۲
فصل ۶- نتیجه‌گیری	
	۵۹

فهرست اشکال

عنوان	صفحه
شکل (۱-۱): نمونه‌ای از لیزر الکترون آزاد.....	۲
شکل (۱-۲): حرکت الکترون در میدان ویگلر.....	۳
شکل (۱-۲): نمودار β_{\parallel} بر حسب بسامد بهنجار شده در لیزر الکترون آزاد با ویگلر ایده‌آل.....	۱۲
شکل (۲-۲): تابع Φ بر حسب بسامد بهنجار شده‌ی میدان محوری.....	۱۳
شکل (۳-۲): کانال یونی.....	۱۴
شکل (۴-۲): نمودار β_{\parallel} بر حسب ω_i با ویگلر ایده‌آل.....	۳۱
شکل (۵-۲): نمودار تابع Φ بر حسب بسامد بهنجار شده‌ی کانال یونی.....	۲۲
شکل (۱-۳): نمودار β_{\parallel} بر حسب Ω_0 در ویگلر واقعی و میدان محوری.....	۲۸
شکل (۲-۳): نمودار Φ بر حسب Ω_0 با ویگلر واقعی و میدان محوری.....	۲۸
شکل (۳-۳): نمودار β_{\parallel} بر حسب ω_i در ویگلر واقعی و کانال یونی راهنما.....	۳۴
شکل (۴-۳): نمودار Φ بر حسب ω_i با ویگلر واقعی و کانال یونی.....	۳۵
شکل (۱-۴): نمودار (ω_i و β_{\parallel}) با ویگلر تخت ایده‌آل.....	۴۰
شکل (۲-۴): نمودار تابع بر حسب ω_i با ویگلر تحت ایده‌آل.....	۴۱
شکل (۳-۴): نمودار β_{\parallel} بر حسب $\bar{\omega}_i$ با ویگلر تخت واقعی.....	۴۷
شکل (۴-۴): نمودار بر حسب $\bar{\omega}_i$ با ویگلر واقعی تخت.....	۴۸
شکل (۱-۵): پروفیل پرتو الکترون فرودی در مورد پرتو سرد.....	۵۰
شکل (۲-۵): دامنه میدان گسیلی به ازای پارامترهای مختلف ویگلر.....	۵۰
شکل (۳-۵): دامنه میدان گسیلی به ازای پارامترهای مختلف.....	۵۲
شکل (۴-۵): دامنه میدان گسیلی به ازای پارامترهای مختلف.....	۵۵
شکل (۵-۵): ماکزیمم دامنه میدان گسیلی به ازای شدت های مختلف.....	۵۶

عنوان

صفحه

شکل (۵-۶): پروفیل های $F(t)$ در مورد پارامترهای خطی و غیرخطی ۵۷

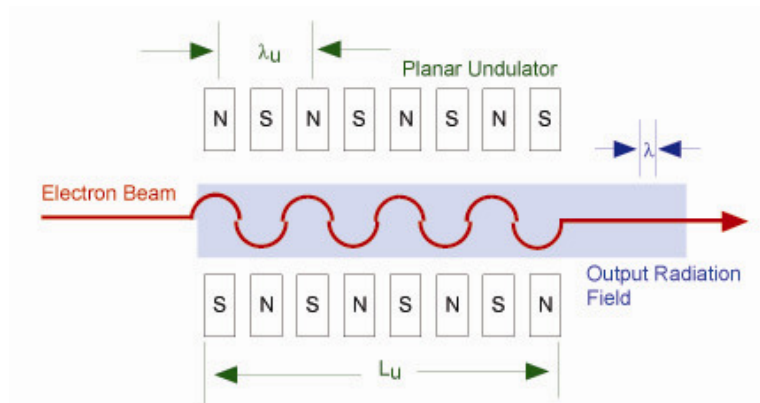
شکل (۵-۷): بیشینه دامنه میدان گسیلی به ازای پارامترهای مختلف ۵۷

فصل اول

مقدمه ای بر لیزر الکترون آزاد

۱-۱- مقدمه

در سال ۱۹۵۱، هانس موتز^۱ از دانشگاه استنفورد^۲ برای اولین بار طیف گسیل ناشی از بیم الکترونی را در یک میدان مغناطیسی ویگلر^۳ محاسبه کرد [۱]. این میدان مغناطیسی موجب حرکت نوسانی الکترون می‌شود. در اواسط دهه ۱۹۷۰ اصطلاح لیزر الکترون آزاد^۴ توسط جان مادی^۵ در آزمایشی در دانشگاه استنفورد بیان شد [۲]. این آزمایش فقط طیف‌های خاصی را در برداشت، ولی آزمایش‌های سال‌های اخیر همه طیف‌های الکترومغناطیسی را شامل می‌شود. یک نمونه از لیزر الکترون آزاد در شکل (۱-۱) نشان داده شده است [۳].



شکل (۱-۱): نمونه ای از لیزر الکترون آزاد

لیزر الکترون آزاد می‌تواند طیف وسیعی از امواج الکترومغناطیسی را بر خلاف سایر لیزرها که تنها طیف خاصی را شامل می‌شوند تولید کند. محاسبات نظری نشان می‌دهد که لیزر الکترون آزاد دارای بازده ۶۰ تا ۶۵ درصد، و در آزمایشگاه دارای بازده ۴۰ تا ۴۵ درصد است [۱]، که در مقایسه با لیزرهای رایج دارای بازده خیلی بالاتری است. این نوع لیزر در اهداف پزشکی، زیست‌شناسی مولکولی، مخابراتی و غیره کاربرد دارد.

در لیزر الکترون آزاد می‌توان از معادلات کلاسیکی الکترومغناطیسی استفاده کرد و نیاز به بررسی کوانتومی نیست [۱]. در این پایان نامه برای محاسبات از دیدگاه کلاسیکی استفاده شده است.

-
- 1-Hans Motz
 - 2-Stanford
 - 3- Wiggler
 - 4-Free Electron Laser
 - 5-John Mady

لیزر الکترون آزاد از سه قسمت تشکیل شده است:

الف- باریکه الکترونی،

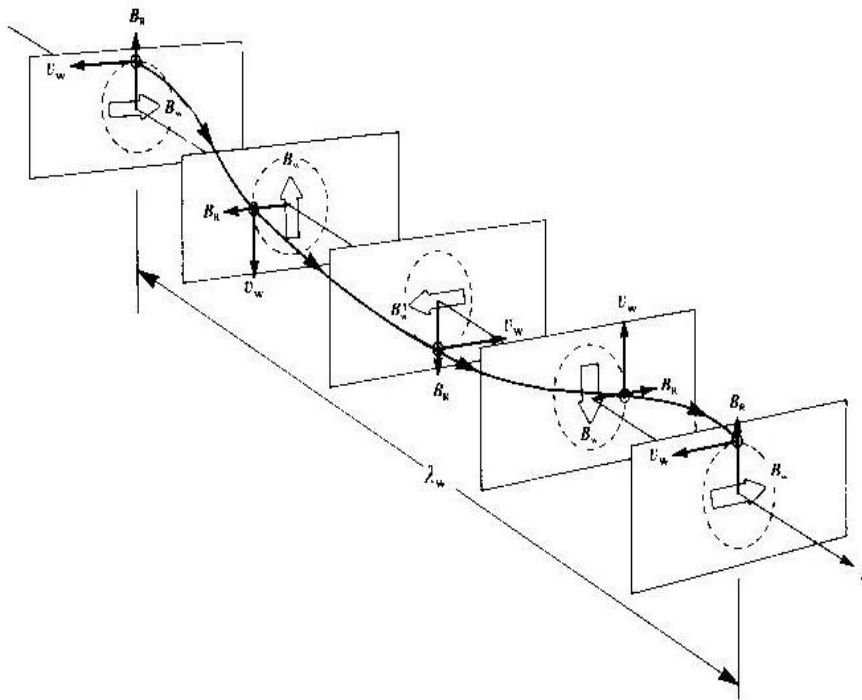
ب - موج الکترومغناطیسی،

ج - میدان مغناطیسی ساکن تناوبی که به آن میدان مغناطیسی ویگلر می گویند.

میدان مغناطیسی ویگلر باعث حرکت تناوبی الکترون شده که بعداً در مورد آن بحث می شود. شکل

(۲-۱) حرکت الکترون در میدان مغناطیسی ویگلر را نشان می دهد [۱]. در شکل زیر B_w میدان

مغناطیسی ویگلر، v_w سرعت عرضی الکترون و λ_w طول موج ویگلر است.



شکل (۱-۲): حرکت الکترون در میدان مغناطیسی ویگلری

۱-۲- اصول لیزر الکترون آزاد

وقتی الکترون در یک میدان مغناطیسی ویگلر قرار می‌گیرد، میدان مغناطیسی باعث حرکت مارپیچی (در فضا) و یا تناوبی (در صفحه) آن می‌شود. با فرض این که الکترون نسبیتی \bar{v} با موج الکترومغناطیسی $E(z, t)$ و $B(z, t)$ برهم‌کنش انجام دهد و با استفاده از معادله‌ی نیروی لورنتس خواهیم داشت [۴]:

$$\frac{d}{dt}(\gamma\vec{\beta}) = -\frac{e}{mc}(\vec{E} + \vec{\beta} \times \vec{B}) \quad (1-1)$$

یا به عبارتی:

$$\frac{d\gamma}{dt} = -\frac{e}{mc}\vec{\beta} \cdot \vec{E} \quad (2-1)$$

که در آن داریم:

$$\vec{\beta} = \bar{v}/c \quad (3-1)$$

$$\gamma^{-2} = 1 - \vec{\beta} \cdot \vec{\beta} \quad (4-1)$$

$$E_c = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4} = \gamma mc^2 \quad (5-1)$$

$$\vec{p} = m\vec{v}\gamma \quad (6-1)$$

c سرعت نور در خلاء، γ عامل نسبیتی، m جرم سکون الکترون و p تکانه‌ی آن است. با توجه به معادله (۲-۱) اگر سرعت الکترون دارای مؤلفه‌ای در جهت E باشد می‌تواند با الکترون تبادل انرژی انجام دهد و اگر انتشار موج الکترومغناطیسی در جهت z باشد $E_z = 0$ و $E_{x,y} = 0$ خواهند بود. با توجه به این که سرعت الکترون در راستای z از سرعت امواج الکترومغناطیسی کم‌تر است، در هر دوره تناوب به اندازه:

$$\tau = \frac{\lambda}{c - v_z} \quad (7-1)$$

ثانیه نسبت به امواج عقب می‌افتد که λ طول موج الکترومغناطیسی است [۴]. بنابراین فاصله عقب‌افتادگی الکترون نسبت به امواج برابر مقدار زیر خواهد بود:

$$\lambda_w = \frac{\lambda v_z}{c - v_z} \quad (۸-۱)$$

با اعمال میدان مغناطیسی ایستا می‌توان طول موج عقب‌افتادگی الکترون را جبران کرد و با حرکت موج الکترومغناطیسی هم‌زمان کرد، در نتیجه الکترون و موج الکترومغناطیسی با هم برهم‌کنش انجام می‌دهند. برای حالتی که سرعت محوری (در راستای Z) الکترون تقریباً برابر سرعت نور است می‌توان نوشت:

$$1 + \beta_z \approx 2 \quad (۹-۱)$$

با استفاده از رابطه زیر:

$$\gamma^{-2} = 1 - \beta_z^2 - \beta_x^2 - \beta_y^2 \quad (۱۰-۱)$$

و معادله‌ی (۹-۱) خواهیم داشت:

$$1 - \beta_z \approx \frac{1}{2}(\gamma^{-2} + \beta_z^2) \quad (۱۱-۱)$$

که در آن β_{\perp} سرعت عرضی الکترون است و به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\beta_{\perp}^2 = \beta_x^2 + \beta_y^2 \quad (۱۲-۱)$$

با جایگزینی معادله (۱۱-۱) در معادله (۸-۱) شرط هم‌زمان بودن به صورت زیر نوشته می‌شود [۴]:

$$\lambda_w = \frac{\beta_z \lambda}{\frac{1}{2}(\gamma^{-2} + \beta_{\perp}^2)} \quad (۱۳-۱)$$

و یا

$$\lambda = \lambda_w \frac{1}{2} (\gamma^{-2} + \beta_{\perp}^2) \quad (14-1)$$

که در آن λ_w طول موج ایستای ویگلر، β_{\perp} سرعت عرضی الکترون و λ طول موج نور است. با توجه به رابطه بالا، طول موج، با مربع سرعت عرضی الکترون متناسب است. پس با افزایش سرعت عرضی بهره افزایش پیدا می کند. نحوه عملکرد لیزر به این صورت است که امواج الکترومغناطیسی با میدان ویگلر برهم کنش انجام داده و موج زنش را ایجاد می کنند. با توجه به این که میدان ویگلر ایستا بوده، بنابراین نوسان ندارد، در نهایت خصوصیات موج زنش به این صورت خواهد بود:

الف - بسامد موج زنش برابر مجموع بسامدهای موج الکترومغناطیس و موج ویگلر بوده بنابراین:

$$\omega_b = \omega + 0 \quad (15-1)$$

که ω بسامد موج الکترومغناطیس و ω_b بسامد موج زنش است.

ب - عدد موج زنش، به صورت زیر است،

$$k_b = k + k_w \quad (16-1)$$

که k عدد موج الکترومغناطیس، k_b عدد موج زنش و k_w عدد موج ویگلر است.

در نهایت سرعت موج زنش (v_b) به این شکل خواهد بود:

$$v_b = \frac{\omega_b}{k_b} = \frac{\omega}{k + k_w} \quad (17-1)$$

با توجه به رابطه بالا مشاهده می شود که سرعت موج زنش از سرعت نور کم تر است. حال اگر الکترون سرعتی برابر سرعت موج زنش پیدا کند یعنی:

$$v_z = v_b \quad (18-1)$$

شرط تشدید برای برهم کنش بین الکترون و موج زنش ایجاد خواهد شد که دقیقاً همان شرط هم زمان بودن معادله (18-1) است.

۱-۲-۱- انواع ویگلرها

۱- ویگلر مارپیچی (Helical)

لیزر الکترون آزاد با این ویگلر دارای بهره زیاد است ولی ساختار آن مشکل و حجم بزرگی را اشغال می‌کند. چون در این جا از سیم‌پیچ برای ایجاد میدان مغناطیسی استفاده می‌شود.

۲- ویگلر تخت (Planar)

لیزر الکترون آزاد با این ویگلر دارای بهره کم‌تری نسبت به ویگلر مارپیچی است، ولی از نظر اقتصادی نسبت به لیزر الکترون آزاد با ویگلر مارپیچی بیش‌تر مقرون به صرفه است.

۳- ویگلر باریک شونده (Tapered)

نوعی میدان الکترومغناطیسی که در امتداد محور، غیریکنواخت است و به منظور افزایش بازدهی در لیزرهای الکترون آزاد به کار می‌رود. اغلب به صورت ترکیبی از میدان ویگلر مارپیچی و میدان مغناطیسی باریک شونده می‌باشد.

۱-۲-۲- مزایا و محدودیت های لیزر الکترون آزاد

مزایای لیزر الکترون آزاد نسبت به سایر لیزرها به شرح زیر است: قابل تنظیم بودن بسامد، توان بالا، بازدهی. ضمن این که محدودیت‌های زیر را دارد: نیاز به شتاب دهنده، که همه جا در دسترس نمی‌باشد و بزرگی دستگاه نسبت به سایر لیزرها به ویژه لیزرهای نیمه هادی.

۱-۲-۳- ابزار راهنما در لیزر الکترون آزاد

به منظور بالابردن بهره ابزار راهنما را به لیزر اضافه می‌کنند [۹، ۱۲]. این ابزار باعث جلوگیری از پخش شدن باریکه الکترون و برخورد با دیواره‌های دستگاه می‌شود. پخش شدگی باریکه الکترون و برخورد با دیواره‌های دستگاه سبب کاهش بازدهی لیزر الکترون آزاد می‌شود، بنابراین ابزار راهنما سبب افزایش بازدهی لیزر الکترون آزاد می‌شود. ابزار راهنما عبارتند از [۱، ۶] ۱- میدان مغناطیسی راهنمای محوری ۲- کانال یونی

ابتدا میدان مغناطیسی محوری را به عنوان ابزار راهنما اعمال می‌کردند. در سال‌های اخیر از کانال یونی به جای میدان مغناطیسی راهنمای محوری به علت ساختار ساده‌تر استفاده می‌شود. هم‌اکنون مطالعه در این مورد ادامه دارد و بررسی مسیرهای الکترون در ویگلرهای واقعی ماریچی و تخت با کانال یونی راهنما و ویگلر باریک شونده در این پایان‌نامه بررسی شده است. هم‌چنین ابزار راهنما باعث افزایش سرعت عرضی الکترون شده، با توجه به رابطه زیر با افزایش سرعت عرضی، بهره افزایش پیدا می‌کند [۱]:

$$G \cong 0.59 \frac{\omega_b (k_w z)^3}{\gamma_b c^2 k_w^2} v_w^2 \quad (1-19)$$

که v_w سرعت عرضی الکترون است و بهره بدون بعد می‌باشد.

فصل دوم

مسیر الکترون با ویگلر مارپیچی ایده آل و کانال یونی راهنما

۲-۱- مقدمه

در این جا به عنوان مقدمه اشاره‌ای به لیزر الکترون آزاد با میدان محوری راهنما می‌شود. میدان مغناطیسی ویگلر ماریچی ایده‌آل به صورت زیر است [۲۱]:

$$\vec{B}_w = B_w(\hat{e}_x \cos k_w z + \hat{e}_y \sin k_w z) \quad (1-2)$$

که \vec{B}_w دامنه‌ی میدان ویگلر است. در حضور میدان مغناطیسی محوری معادله حرکت به صورت زیر می‌شود:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = -e \left(B_0 \hat{e}_z + \frac{1}{c} \vec{v} \times \vec{B}_w \right) \quad (2-2)$$

که در آن B_0 میدان مغناطیسی محوری است که در جهت z اعمال شده است. برای سادگی، معادلات حرکت را بر حسب مختصات ویگلر می‌نویسیم. مختصات ویگلر به صورت زیر است:

$$\hat{e}_1 = \hat{e}_x \cos k_w z + \hat{e}_y \sin k_w z$$

$$\hat{e}_2 = -\hat{e}_x \sin k_w z + \hat{e}_y \cos k_w z$$

$$\hat{e}_3 = \hat{e}_z$$

معادلات حرکت در این دستگاه مختصات به این صورت نوشته می‌شوند:

$$\frac{dv_1}{dt} = -(\Omega_0 - k_w v_3) v_2 \quad (3-2)$$

$$\frac{dv_2}{dt} = -(\Omega_0 - k_w v_3) v_1 - k_w v_1 v_3 \quad (4-2)$$

$$\frac{dv_3}{dt} = v_2 \Omega_w \quad (5-2)$$

که $\Omega_0 \equiv \frac{eB_0}{\gamma mc}$ ، v_1 ، v_2 و v_3 مؤلفه‌های سرعت الکترون در چارچوب ویگلر است. با حل معادلات حرکت در حالت پایا، جواب معادلات به صورت زیر خواهد بود:

$$v_2 = 0 \quad (6-2)$$

$$v_1 = \frac{\Omega_w v_{\parallel}}{\Omega_0 - k_w v_{\parallel}} \equiv v_w \quad (7-2)$$

$$v_3 = v_1 \quad (8-2)$$

که v_w سرعت عرضی القا شده توسط میدان ویلگر و v_1 سرعت محوری است. با توجه به معادلات بالا، هنگامی که $\Omega_0 = k_w v_{\parallel}$ باشد، سرعت عرضی تکینه شده و یا به عبارت دیگر تشدید به وجود می‌آید و سرعت عرضی مقدار بیشینه خود را خواهد داشت، با توجه به رابطه آن‌ها (معادله‌ی (۱-۲۱)) ملاحظه می‌شود که بهره لیزر الکترون آزاد در حالت تشدید به شدت افزایش می‌یابد.

برای بررسی پایداری مسیرها اختلال‌های زیر را وارد می‌کنیم:

$$V_1 = V_w + \delta V_1$$

$$V_2 = \delta V_2$$

$$V_3 = V_{\parallel} + \delta V_3$$

معادلات به این صورت تبدیل می‌شوند:

$$\frac{d\delta v_1}{dt} = (\Omega_0 - k_w v_{\parallel}) \delta v_2 \quad (9-2)$$

$$\frac{d\delta v_2}{dt} = -(\Omega_0 - k_w v_{\parallel}) \delta v_1 - \Omega_0 \beta_w \delta v_3 \quad (10-2)$$

$$\frac{d\delta v_3}{dt} = \delta v_2 \Omega_w \quad (11-2)$$

با مشتق‌گیری از معادلات (۹-۲) و (۱۱-۲) و جایگزینی در معادله‌ی (۱۰-۲)، این معادله به

صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + \Omega_r^2 \right) \delta v_2 = 0 \quad (12-2)$$

که Ω_r به صورت زیر تعریف شده است:

$$\Omega_r^2 = (\Omega_0 - k_w v_{\parallel})(\Omega_0(1 + \beta_w^2) - k_w v_{\parallel})$$

با توجه به معادله‌ی بالا اگر $\Omega_r^2 \geq 0$ باشد مدار الکترون پایدار و در غیر این صورت ناپایدار است.

بنابراین: