بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه پیام نور

مرکز بابل

پایان‌نامه:

جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد ریاضی کاربردی

گرایش (آنالیز عددی)

موضوع:

حل عددی معادلات انتگرال دو بعدی غیر خطی با استفاده از توابع هار گویا

مؤلف:

رضوانه نورانی قادی

استاد راهنما:

دکتر سیامک فیروزیان

دکتر حسین جعفری

استاد مشاور:

دکتر جواد وحیدی

بهمن ۱۳۹۰

بسمه تعالی

شماره :.....................

جمهوری اسلامی ایران

تاریخ :......../........./.....۱۳

دانشگاه پیام نور مرکز بابل

وزارت علوم ،تحقیقات و فناوری

پیوست :.........................

صورتجلسه دفاع از پایان نامه دوره کارشناسی ارشد

جلسه دفاع از پایان نامه دوره کارشناسی ارشدخانم /آقای **رضوانه نورانی قادی** دانشجوی رشته : **ریاضی کاربردی** گرایش **آنالیز عددی** به شماره دانشجویی**۸۸۰۳۲۱۹۶۶** تحت عنوان : **حل عددی معادلات انتگرالی دو بعدی غیرخطی توسط توابع هار** با حضور هیات داوران در روز شنبه مورخ۱۳۹۰/۱۱/۸ ساعت ۸ صبح در محل ساختمان دانشگاه پیام نور بابل برگزار شد و هیات داوران پس از بررسی،پایان نامه مذکور را شایسته و **نمره به عدد** ۱۹،۵ **به حروف** نوزده و نیم **با درجه** عالی تشخیص داد.

پایان نامه مورد قبول می باشد ☑ پایان نامه با اصلاحات مورد قبول می باشد ☐ پایان نامه مورد قبول نمی باشد ☐

تعداد واحد پایان نامه ۶ نمره نهایی پایان نامه ۱۹،۵ درجه پایان نامه عالی

ردیف	نام و نام خانوادگی	هیات داوران	مرتبه دانشگاهی	دانشگاه	امضا
۱	دکتر سیامک فیروزیان	استاد راهنما	استادیار	دانشگاه پیام نور بابل	فیروزیان
۲	دکتر حسین جعفری	استادراهنمای همکار	دانشیار	دانشگاه مازندران	
۳	دکتر جواد وحیدی	استاد مشاور	استادیار	دانشگاه علم وصنعت	
٤	دکتر ماشااله متین فر	استاد داور	استادیار	دانشگاه مازندران	
۵	دکتر سیامک فیروزیان	نماینده تحصیلات تکمیلی	استادیار	دانشگاه پیام نوربابل	فیروزیان

نماینده گروه آموزشی : دکتر سیامک فیروزیان فیروزیان مسئول اداره آموزش مرکز بابل : نادر بابائی

کارشناس تحصیلات تکمیلی : ایرانتاج باباجان تبار سرپرست/ رئیس دانشگاه پیام نور مرکز بابل: جعفر رضا تبار

نشانی : مازندران - بابل - جاده قائمشهر - کوی اویس قرنی

صندوق پستی ٥٤٨٤٩ - ٤٧١٦٦ تلفن : ۲۲۵۰۹۰۷- ۲۲٥٤٣٤٧ - ۲۲٥۰٦٦۱ فاکس : ۲۲۵۷۷۹۳

اینجانب **رضوانه نورانی قادی** دانشجوی ورودی سال **۹۰-۱۳۸۸** مقطع کارشناسی ارشد رشته **ریاضی کاربردی (آنالیز عددی)** گواهی می نمایم چنانچه در پایان نامه خود از فکر، ایده و نوشته دیگری بهره گرفته ام با نقل قول مستقیم یا غیر مستقیم منبع و ماخذ آن را نیز در جای مناسب ذکر کرده ام. بدیهی است مسئولیت تمامی مطالبی که نقل قول دیگران نباشد بر عهده خویش می دانم و جوابگوی آن خواهم بود.

دانشجو تایید می نماید که مطالب مندرج در این پایان نامه نتیجه تحقیقات خودش می باشد و در صورت استفاده از نتایج دیگران مرجع آن را ذکر نموده است.

نام و نام خانوادگی دانشجو **رضوانه نورانی قادی**

تاریخ و امضاء

اینجانب **رضوانه نورانی قادی** دانشجوی ورودی سال **۹۰-۱۳۸۸** مقطع کارشناسی ارشد رشته **ریاضی کاربردی (آنالیز عددی)** گواهی می نمایم چنانچه بر اساس مطالب پایان نامه خود اقدام به انتشار مقاله، کتاب و ... نمایم ضمن مطلع نمودن استاد راهنما، با نظر ایشان نسبت به نشر مقاله، کتاب و ... و به صورت مشترک و با ذکر نام استاد راهنما مبادرت نمایم.

نام و نام خانوادگی دانشجو **رضوانه نورانی قادی**

تاریخ و امضاء

بهمن ۱۳۹۰

تقدیم به محضر گرامی

پدر و مادرم

که «**آموختن**» **را به من آموختند**

تقدیر و تشکر

حمد و سپاس خداوند عزیزم را که توفیق بهره مندی از محضر اساتید را به بنده عطا فرمود و لذت آشنایی با علوم و معارف را، هر چند بسیار اندک، به اینجانب چشاند. با امید به این که خداوند یاریم نماید تا در آموختن علوم، انتقال و به کارگیری و بالندگی آن نقش به سزایی هر چند کوچک داشته باشم.

وظیفه خود می دانم از کسانی که در این راه مرا مورد لطف و حمایت های خود قرار داده اند سپاسگزاری نمایم، لذا:

از خداوند مهربانم که بی حس حضور او در تمام لحظاتم قادر به انجام کاری نیستم،

از پدر و مادر بزرگوارم که همه ی موفقیت ها و پیشرفت های زندگی ام مرهون زحمات آنهاست،

از اساتید ارجمندم جناب آقایان دکتر فیروزیان، دکتر جعفری و دکتر وحیدی که از راهنمایی های ارزشمندشان همواره بهره مند گردیده ام،

از استاد بزرگوار جناب آقای دکتر متین فر که داوری این پایان نامه را بر عهده داشتند،

و از دوستانی که همواره از حمایتهایشان برخوردار بوده ام،

نهایت تشکر و قدردانی به عمل می آورم.

رضوانه نورانی

بهمن ۱۳۹۰

چکیده

هدف از این پایان نامه استفاده از موجک هار برای حل معادلات انتگرالی دو بعدی غیر خطی می باشد. این پایان نامه مشتمل بر ٤ فصل است:

فصل اول را به معرفی معادلات انتگرال و بیان پیش نیازهای ریاضی این پایان نامه اختصاص می دهیم.

در فصل دوم به آنالیز موجک و نحوه ساخت موجک ها می پردازیم و به طور خاص موجک هار را معرفی می کنیم.

در فصل سوم انواع مختلف توابع هار و ویژگی های این نوع توابع را بررسی می کنیم.

در فصل چهارم، روش موجک هار را برای حل معادلات انتگرالی خطی و غیر خطی به کار می گیریم، این معادلات توسط روش کالوکیشن گسسته می شوند و در مورد معادلات انتگرالی غیر خطی از روش نیوتون برای حل سیستم غیر خطی بوجود آمده از معادلات جبری استفاده می کنیم.

کلمات کلیدی: معادلات انتگرال، معادلات انتگرال دو بعدی، معادلات انتگرال غیر خطی، موجک هار، روش کالوکیشن.

فهرست مطالب

فصل دوم: آنالیز موجک

فصل سوم: توابع هار

فصل چهارم: کاربرد تبدیل موجک هار برای حل معادلات انتگرالی

ضمائم

مقدّمه

معادلات انتگرالی به عنوان یکی از شاخه های علم ریاضی است که در بسیاری مباحث مانند فیزیک، بیولوژی، شیمی و مهندسی ظاهر می شوند. معادلات انتگرالی به دو دسته خطی و غیر خطی تقسیم می شوند که به شرح هر یک خواهیم پرداخت.

البته معادلات انتگرال به عنوان نمایش جواب معادلات دیفرانسیل هم به کار می روند به طوری که اگر معادله دیفرانسیل مورد نظر در قالب یک مسئله مقدار مرزی باشد، آنگاه معادلات انتگرالی که ظاهر می شود از نوع فردهلم خواهد شد و اگر معادله دیفرانسیل مورد نظر در قالب یک مساله مقدار اولیه باشد، آنگاه معادله حاصل یک معادله ولترا خواهد بود.

بر حسب اینکه معادله انتگرال از چه نوع مسئله ای ظاهر می شود، روش ها و ایده های مختلفی برای تعیین جواب معادله انتگرال به کار برده می شود. در این پایان نامه سعی داریم از روش موجک برای حل معادلات انتگرال استفاده کنیم.

روش موجک ها بر مبنای تقریب توسط موجک ها پایه ریزی شده است که بر اساس آن معادله انتگرال فردهلم و ولترا به یک دستگاه خطی یا غیرخطی تبدیل می شود که حل آن به مراتب ساده تر از حل مسئله اصلی است.

کلمه موجک به معنای «موج کوچک» است که از لغت فرانسوی آندلیت گرفته شده و به نوع خاصی از توابع ریاضی اشاره می کند، که ویژگی های هموار، موضعی و نوسانی بودن را دارا می باشد. موجک ها به عنوان یک دستگاه متعامد به دلیل قابلیت نمایش در سطوح مختلف تجزیه، جایگاه خاصی را در بین دستگاه های متعامد دیگر به خود اختصاص داده اند.

تا کنون موارد کاربرد موجک ها در زمینه های تحلیل سیگنال های گذرایی که سریعاً تغییر می کنند، صدا و سیگنالهای صوتی توسط افرادی چون مارلت[1] و گراسمن[2] در سال ۱۹۸۷ و مالات در سال ۱۹۸۹ و آنالیز عددی(تبدیل فوریه سریع) توسط بیلکین[3] و روخلین[4] در سال ۱۹۹۱ و همچنین در زمینه های فیزیولوژی عصب، مهندسی هسته ای، شیمی و پزشکی انجام پذیرفته است.

[1] *Marlet*
[2] *Grassmann*
[3] *Belkin*
[4] *Rokhlin*

فصل اول

کلیّات

۱-۱ معادلات انتگرال

یک معادله انتگرال معادله‌ای است که در آن تابع مجهول $u(x)$ زیر علامت انتگرال قرار دارد. یک نمونه از یک معادله انتگرال که درآن $u(x)$ تابع مجهولی است که باید معلوم شود به صورت زیر می باشد:

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} k(x,t)u(t)dt, \qquad (۱-۱)$$

$k(x,t)$ هسته معادله انتگرال نامیده می‌شود. $\alpha(x)$ و $\beta(x)$ حدود انتگرال هستند.

در معادله (۱-۱) تابع مجهول یعنی $u(x)$ تنها در زیر علامت انتگرال ظاهر شده است، در حالت های دیگر ممکن است تابع مجهول در خارج از علامت انتگرال هم حضور داشته باشد. باید توجه کرد که هسته معادله یعنی $k(x,t)$ و تابع $f(x)$ از قبل معلوم هستند.

هدف ما تعیین تابع مجهول یعنی $u(x)$ است که در رابطه (۱-۱) صدق می‌کند. اگر تابع مجهول $u(x)$ توان یک داشته باشد آنگاه معادله انتگرال خطی است و اگر تابع $u(x)$ در زیر علامت انتگرال با توابعی غیر خطی نظیر $u^2(x)$ یا $cos\, u(x)$ یا $e^{u(x)}$ تعویض شود آن گاه معادله انتگرال را غیر خطی می گویند.

متداولترین معادلات انتگرال خطی یا غیر خطی را می توان به چهار گروه زیر دسته بندی نمود:

۱. معادلات انتگرال فردهلم[۱]

[۱] *Fredholm*

۲. معادلات انتگرال ولترا[۱]

۳. معادلات انتگرال- دیفرانسیل

٤. معادلات انتگرال منفرد

اکنون تعریف معادلات انتگرال خطی را در هر گروه بیان می کنیم.

۱-۱-۱ معادلات انتگرال فردهلم

شکل استاندارد معادلات انتگرال خطی فردهلم که در آنها حد پایین و حد بالای انتگرال‌گیری به ترتیب اعداد ثابت a و b هستند به صورت زیر می‌باشد:

$$\phi(x)u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)u(t)dt, \quad a < x,t < b \qquad (۱-۲)$$

که درآن هسته معادله انتگرال $k(x,t)$ و تابع $f(x)$ مشخص هستند و λ هم یک پارامتر معلوم می باشد. معادله (۱-۲) را خطی می‌گویند زیرا که تابع مجهول $u(x)$ زیر علامت انتگرال به طور خطی ظاهر شده است، یعنی توان $u(x)$ یک است. بر حسب این که $\phi(x)$ کدام یک از مقادیر زیر را انتخاب کند معادلات انتگرال فردهلم خطی به دو دسته عمده تقسیم می‌شوند:

۱. زمانی که $\phi(x) = ۰$ معادله (۱-۲) به معادله زیر تبدیل می‌شود:

$$f(x)+\lambda \int_a^b k(x,t)u(t)dt = 0 \qquad (۱-۳)$$

این معادله را معادله انتگرال فردهلم نوع اول می‌نامند.

۲. زمانی که $\phi(x) = ۱$ معادله (۱-۲) به شکل زیر در خواهد آمد:

$$u(x)= f(x)+\lambda \int_a^b k(x,t)u(t)dt \qquad (۱-٤)$$

[۱] *Volterra*

به این معادله، معادله انتگرال فردهلم نوع دوم می‌گویند.

توجه: در حقیقت معادله (۱–٤) را می‌توان از معادله (۱–۲) با تقسیم طرفین بر $\phi(x)$ به شرط آن که $\phi(x) \neq ۰$ به دست می‌آید.

۱–۱–۲ معادلات انتگرال ولترا

شکل استاندارد معادلات انتگرال خطی ولترا، یعنی معادلاتی که در آنها حد بالا و پایین انتگرال‌گیری به جای این‌که یک عدد ثابتی باشد به صورت تابعی از x ظاهر می‌شود که به فرم زیر می‌باشد:

$$\phi(x)u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)u(t)dt \qquad (۱–۵)$$

که در آن تابع مجهول یعنی $u(x)$ زیر علامت انتگرال به صورت خطی می‌باشد. باید توجه کرد که (۱–۵) را می‌توان به عنوان یک حالت خاص معادلات انتگرال فردهلم در نظر گرفت، به طوری که هسته معادلات انتگرال ولترا را می‌توان با توجه به مقدار $\phi(x)$ به دو گروه دسته‌بندی نمود. $k(x,t)$ برای حالت خاص و $x \in [a,b]$ صفر فرض می شود.

۱. زمانی که $\phi(x) = ۰$ معادله (۱–۵) به شکل زیر تبدیل خواهد شد:

$$f(x) + \int_a^x k(x,t)u(t)dt = 0 \qquad (۱–٦)$$

به این معادله، معادله انتگرال ولترا نوع اول می گویند.

۲. زمانی که $\phi(x) =۱$ آن گاه معادله (۱–۵) به شکل زیر در خواهد آمد:

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x,t)u(t)dt \qquad (۱–۷)$$

معادله اخیر را معادله انتگرال ولترا نوع دوم می‌نامند.

نتیجه ۱–۱ : اگر در معادله انتگرال فردهلم و ولترا نوع دوم، شرط $f(x) = ۰$ برقرار باشد، آن گاه معادله حاصل را یک معادله انتگرال همگن می نامند در غیر این صورت معادله مورد نظر را یک معادله انتگرال غیر همگن می گویند.

۱–۱–۳ معادلات انتگرال – دیفرانسیل

در این گونه معادلات تابع مجهول $u(x)$ در دو طرف ظاهر می‌شود، در یک طرف زیر علامت انتگرال و در طرف دیگر به عنوان یک مشتق معمولی نمایان می‌شود.

تعـدادی از پدیـده‌ها در فیزیک و بیـولوژی در قالب این نوع معادلات انتگـرل- دیفرانسـیل ظاهر می‌شوند، البته این گونه معادلات در هنگام تبدیل یک معادله دیفرانسیل به یک معادله انتگرال هم نمایان می‌گردند. در زیر چند نمونه از معادلات انتگرال- دیفرانسیل آورده شده است.

$$u''(x) = -x + \int_0^x (x-t)u(t)dt, \quad u(0) = 0 \text{ و } u'(0) = 1 \tag{۱–۸}$$

$$u'(x) = -\sin x - 1 - \int_0^x u(t)dt, \quad u(0) = 1 \tag{۱–۹}$$

$$u'(x) = 1 - \frac{1}{3}x + \int_0^1 xtu(t)dt, \quad u(0) = 1 \tag{۱–۱۰}$$

معادلات (۱–۸) و (۱–۹) را معادلات انتگرال – دیفرانسیل ولترا و معادله (۱–۱۰) را معادله انتگرال – دیفرانسیل فردهلم می‌نامند.

۱–۱–۴ معادلات انتگرال منفرد

معادلات انتگرال از نوع اول

$$f(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} k(x,t)u(t)dt \tag{۱–۱۱}$$

یا از نوع دوم

$$u(x) = f(x)+\lambda \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} k(x,t)u(t)dt \qquad (۱۲-۱)$$

را که در آن ها حد پایین، حد بالا و یا هر دو حدود انتگرال گیری نا متناهی باشند، معادله انتگرال منفرد نامیده می شوند. به علاوه اگر هسته معادلات انتگرال فوق در یک نقطه یا نقاط بیشتری از دامنه انتگرال گیری نامتناهی باشد، باز هم این گونه معادلات را معادلات انتگرال منفرد می نامند. در زیر دو مثال از معادلات انتگرال منفرد آورده شده است.

$$u(x) = 1 + x^2 + \int_{-\infty}^{+\infty} (x+t)u(t)dt \qquad (۱۳-۱)$$

در مثال فوق حوزه انتگرال گیری نامتناهی است و در

$$u(x) = 1 - \sqrt{2} - \int_0^x \frac{1}{\sqrt{x-t}} u(t)dt \qquad (۱٤-۱)$$

که معادله انتگرال آبل[۱] نام دارد. زمانی که $t \to x$، هسته $k(x,t)$ نا متناهی می باشد[۲۹].

۱-۲ تبدیلات انتگرالی

تعریف ۱-۱ : تبدیلات انتگرالی را می توان به صورت:

$$T[f(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} k(s,t)f(t)dt = F(s) \qquad (۱۵-۱)$$

تعریف نمود که $k(s,t)$ به هسته تبدیل معروف است. این معادله به هر تابع از دسته توابعی که انتگرال پذیرند تابع $F(s)$ را به آن نسبت می دهد.

[۱] *Abel*

انتخاب گوناگونی از $k(s,t)$ در این انتگرال منتهی به تبدیلاتی می شود که با خواص خود در شرایط خاصی مفید واقع می گردند، همانند تبدیلات لاپلاس[۱]، فوریه[۲]، ملین[۳] و هانکل[۴]. در این بخش به طور مختصر به معرفی این تبدیلات خواهیم پرداخت.

۱–۲–۱ تبدیل لاپلاس

تبدیلی که در رابطه (۱–۱۵) با انتخاب

$$k(s,t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \mathrm{e}^{-\mathrm{st}} & \mathrm{t} \geq 0 \end{cases} \qquad (۱–۱۶)$$

تعریف می شود، تبدیل لاپلاس نام دارد که به صورت زیر می باشد:

$$L[f(t)] = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt = F(s) \qquad (۱–۱۷)$$

و معکوس آن عبارتند از $L^{-1}F(s) = f(t)$. این تبدیل برای حل بسیاری از معادلات دیفرانسیل و معادلات انتگرال مورد استفاده قرار می گیرد.

۱–۲–۲ تبدیل فوریه

$F(\alpha)$ را تبدیل فوریه تابع $f(t)$ می نامیم و با F نماد $F[f]$ نمایش می دهیم، پس:

$$F[f] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\alpha t} f(t) dt = F(\alpha) \qquad (۱–۱۸)$$

[۱] *Laplace*
[۲] *Fourier*
[۳] *Melin*
[۴] *Hankel*