بسم الله الرحمن الرحیم

دانشکده ریاضی

گروه ریاضی محض

پایان‌نامه کارشناسی ارشد ریاضی محض

عنوان:

مجموعه‌های ناهموار تعمیم یافته در ساختارهای جبری

استاد راهنما:

دکتر بیژن دواز

استاد مشاور:

دکتر منصور قدیری

پژوهش‌گر:

اسماء ملک‌زاده

مهر ۱۳۹۰

با بضاعت اندک، تقدیم به پیشگاه

امام زمان (عج)

عمریست که از حضور او جاماندیم
در غربت سرد خویش تنها ماندیم
او منتظر ست تا که ما برگردیم
ماییم که در غیبت کبری ماندیم

سپاس گزاری...

سپاس خداوندگار حکیم را که با لطف بی‌کران خود، آدمی را زیور عقل آراست.

در آغاز وظیفه خود می‌دانم از زحمات بی‌دریغ استاد راهنمای خود، جناب آقای دکتر بیژن دواز، تشکر و قدردانی کنم که قطعاً بدون راهنمایی‌های ارزنده ایشان، این مجموعه به انجام نمی‌رسید.

از جناب آقای دکتر منصور قدیری که زحمت مطالعه و مشاوره این پایان‌نامه را تقبل فرمودند کمال امتنان را دارم.

در پایان، بوسه می‌زنم بر دستان خداوندگاران مهر و مهربانی، پدر و مادر عزیزم و بعد از خدا، ستایش می‌کنم وجود مقدس‌شان را و تشکر می‌کنم از همسر عزیزم به پاس عاطفه سرشار و گرمای امیدبخش وجودش، که در این سردترین روزگاران، بهترین پشتیبان من بود.

چکیده

در این پایان نامه، پس از بیان مفاهیم و مقدمات لازم، به بررسی ساختارهای جبری از نظریه مجموعه‌های ناهموار پرداخته و بر اساس مفهوم مجموعه‌های تعریف‌پذیر در نظریه مجموعه‌های ناهموار، دو زیرجبر بولی مهم در نظریه‌ی مجموعه‌های ناهموار تعمیم یافته بیان می‌شود و الگوریتمی برای محاسبه‌ی اتم‌های این جبرها ارائه می‌شود. پس از آن، به بیان تعمیمی از مجموعه‌های ناهموار روی مشبکه‌های فازی پرداخته و سپس با استفاده از مشبکه‌ی ماتریسی، الگوریتمی ساده برای محاسبه‌ی تقریب‌های پایین و بالا از یک مجموعه‌ی مرجع متناهی ارائه می‌شود، همچنین با معرفی دستگاه اصولی از مجموعه‌های ناهموار روی مشبکه‌های فازی، یک رویکرد اصولی از تقریب بالا بیان می‌شود. در ادامه، با استفاد از مفهوم ایده‌آل فازی هم‌اول به بیان تعمیمی از مجموعه‌های ناهموار با استفاده از مفهوم نقطه‌ی مرجع می‌پردازیم و در پایان با تعریف زیر مدول فازی هم‌اول به بیان کاربرد نقاط مرجع در مدول‌ها پرداخته و به این وسیله تعمیم دیگری از مجموعه‌های ناهموار ارائه می‌دهیم.

فهرست مطالب

۱.۰ پیش‌گفتار

نظریه‌ی مجموعه‌ی ناهموار، که روشی برای استخراج داده‌ها است، برای اولین بار در سال ۱۹۸۲ توسط زادیسلاو پاولاک[1] معرفی شد. این نظریه بعدها توسط دانشمندان بسیاری مورد مطالعه قرار گرفت و در زمینه‌های مختلف منجر به کاربردهای علمی بسیاری شد. در ایران نیز برای اولین بار بیژن دواز بر روی مجموعه‌های ناهموار کار کرد. نظریه‌ی مجموعه‌های ناهموار در واقع تعمیمی از نظریه‌ی مجموعه‌ها است، که در آن زیرمجموعه‌ای از مجموعه‌ی مرجع به‌وسیله‌ی یک زوج مرتب از مجموعه‌ها که تقریب‌های پایین و بالا نامیده می‌شوند توصیف می‌شود. در واقع تقریب پایین یک مجموعه، شامل عناصری متعلق به همسایگی‌های مشمول در آن مجموعه است و تقریب بالا از یک مجموعه، شامل عناصری است متعلق به همسایگی‌هایی که با آن مجموعه اشتراک ناتهی دارند. نظریه‌ی مجموعه‌های ناهموار کلاسیک بر اساس رابطه‌ی هم‌ارزی است، هر چند که رابطه‌ی هم‌ارزی برای بسیاری از کاربردهای عملی محدود کننده است. برای نمونه، در پایگاه داده فعلی مقادیر می‌توانند وصفی، نمادی و یا مقدار حقیقی باشند. نظریه‌ی مجموعه‌های ناهموار اشکالاتی از قبیل به کار بردن مقادیر دارد، به همین دلیل مقالات زیادی در مورد تعمیم مجموعه‌های ناهموار منتشر شده است. برای مثال، رابطه‌های دوتایی دلخواه می‌توانند در تعمیم مجموعه‌های ناهموار به کار برده شوند،[۲۳، ۳۰، ۳۷، ۳۸، ۴۲، ۴۳، ۴۵، ۴۶]. برخی از محققان مجموعه‌های ناهموار کلاسیک را با جبر بولی [۳۲]، مشبکه‌های کاملا توزیع‌پذیر [۴] و مشبکه‌های مانده‌ای [۳۳] تعمیم دادند. در فصل اول این پایان نامه، به بیان مفاهیم ابتدایی از رابطه، مجموعه‌های فازی، مشبکه، جبر بولی و نظریه شواهد می‌پردازیم. در فصل دوم، ساختار جبری واضحی از مجموعه‌های ناهموار تعمیم یافته بر اساس رابطه‌ی دوتایی بیان می‌کنیم. درفصل سوم، با معرفی مشبکه‌ی فازی، تعمیمی از مجموعه‌های ناهموار روی مشبکه‌ی فازی را بررسی کرده و یک رویکرد اصولی از تقریب بالا ارائه می‌شود. در فصل چهارم، با استفاده از ایده‌آل‌های فازی هم‌اول به مطالعه‌ی نقاط مرجع و ناهمواری می‌پردازیم و بالاخره در فصل پنجم، کاربرد نقاط مرجع در مدول‌ها را بیان می‌کنیم.

[1] $Zdzislaw Pawlak$

فصل ۱

مفاهیم و مقدمات

۱.۱ رابطه

دو مجموعه‌ی A و B را در نظر بگیرید. مجموعه‌ی تمام زوج مرتب‌های (x,y) به طوری که $x \in A$ و $y \in B$ را حاصل‌ضرب دکارتی A و B نامیده و با $A \times B$ نشان می‌دهند.

دو مجموعه‌ی دلخواه A و B را در نظر بگیرید. جمله‌ی «یک عنصر a از A با یک رابطه‌ی R به یک عنصر b از B نظیر شده است» گزاره‌ای است درباره‌ی زوج مرتب (a,b) در حاصل‌ضرب دکارتی $A \times B$. از این‌رو، تعریف ریاضی رابطه را می‌توان برحسب زوج مرتب‌های حاصل‌ضرب دکارتی مجموعه‌ها بیان کرد.

یک زیرمجموعه‌ی حاصل‌ضرب دکارتی $A \times B$ را یک رابطه‌ی R از A به B می‌نامیم. معمولاً به‌جای $(a,b) \in R$ می‌نویسند aRb. اغلب مجموعه‌های A و B یکی هستند. در این صورت، این دو مجموعه را X می‌نامیم و به‌جای اینکه بگوییم R یک رابطه‌ی «از X به X است»، می‌گوییم R یک رابطه در X است.

A و B را دو مجموعه که لزوماً متمایز نیستند در نظر بگیرید. اگر R رابطه‌ای از A به B باشد، آنگاه وارون رابطه‌ی R، R^{-1}، رابطه‌ای است از B به A به‌قسمی که $bR^{-1}a$، اگر و فقط اگر aRb.

فرض کنید R رابطه‌ای در مجموعه‌ی X است. می‌گوییم

(۱) R انعکاسی است، هرگاه به ازای هر $x \in X$، xRx.

(۲) R متقارن است، هرگاه xRy، آنگاه yRx.

(۳) R متعدی است، هرگاه xRy و yRz، آنگاه xRz.

(۴) R پادمتقارن است، هرگاه xRy و yRx، آنگاه $x = y$.

(۵) R یک رابطه‌ی هم‌ارزی است، هرگاه R انعکاسی، متقارن و متعدی باشد.

فرض کنید X مجموعه‌ای ناتهی است. منظور از یک افراز X مانند P، یک مجموعه از زیرمجموعه‌های ناتهی X است به‌قسمی که

(۱) اگر $A, B \in P$ و $A \neq B$، آنگاه $A \cap B = \emptyset$.

(۲) $\bigcup_{C \in P} C = X$.

فرض کنید ξ یک رابطه‌ی هم‌ارزی روی یک مجموعه‌ی ناتهی است. به ازای هر $x \in X$، مجموعه‌ی $x/\xi = \{y \in X | y\xi x\}$ را رده‌ی هم‌ارزی مربوط به عضو x تعریف می‌کنیم. مجموعه‌ی تمام این رده‌های هم‌ارزی در X را با X/ξ نشان می‌دهیم، یعنی $X/\xi = \{x/\xi | x \in X\}$.

قضیه ۱.۱.۱. فرض کنید ξ یک رابطه‌ی هم‌ارزی روی یک مجموعه‌ی ناتهی X است. در این صورت داریم:

(۱) هر x/ξ یک زیرمجموعه‌ی ناتهی X است.

(۲) $x/\xi \cap y/\xi \neq \emptyset$، اگر و فقط اگر $x/\xi = y/\xi$.

(۳) $x\xi y$، اگر و فقط اگر $x/\xi = y/\xi$.

قضیه ۲.۱.۱. اگر ξ یک رابطه‌ی هم‌ارزی روی یک مجموعه‌ی ناتهی X باشد، آنگاه X/ξ یک افراز X است.

فرض کنید P یک افراز از مجموعه‌ی ناتهی X است. یک رابطه‌ی X/P روی X را با $x(X/P)y$، تعریف می‌کنیم، اگر و فقط اگر یک مجموعه‌ی $A \in P$ وجود داشته باشد به‌قسمی که $x, y \in A$.

قضیه ۳.۱.۱. اگر P یک افراز مجموعه‌ی ناتهی X باشد، آنگاه رابطه‌ی X/P یک رابطه‌ی هم‌ارزی روی X است، رده‌های هم‌ارزی که از رابطه‌ی هم‌ارزی X/P به‌وجود می‌آیند، دقیقاً مجموعه‌های افراز P هستند. به زبان نمادی $X/(X/P) = P$.

۱.۱.۱ مجموعه‌ی فازی و رابطه فازی

روابط فازی تعمیمی از روابط کلاسیک هستند. در ادامه تعاریفی از این روابط و ترکیبات آنها بیان می‌کنیم.

تعریف ۴.۱.۱. فرض کنید U یک مجموعه‌ی مرجع است. در این صورت یک مجموعه‌ی فازی X در U به‌وسیله‌ی تابع عضویت $\mu_X : U \longrightarrow [0, 1]$ تعریف می‌شود، که در آن $\mu_X(x)$، برای هر $x \in U$ درجه‌ی عضویت x در U را نشان می‌دهد.

فرض کنید $F(U)$ نشان دهنده‌ی مجموعه توانی فازی از U است، به معنی مجموعه‌ای از همه‌ی توابع از U به $[0, 1]$. اگر A یک مجموعه‌ی فازی در U باشد، آنگاه اندازه A به‌وسیله $| A |= \sum_{x \in U} A(x)$ نشان داده می‌شود.

تعریف ۵.۱.۱. فرض کنید μ_{A_1}، μ_{A_2}، …، μ_{A_n}، توابع عضویت برای مجموعه‌های فازی A_1، A_2، …، A_n هستند و $x_1 \in A_1$، $x_2 \in A_2$، …، $x_n \in A_n$. در این صورت حاصل‌ضرب دکارتی مجموعه‌های فازی فوق به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mu_{A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \min\{\mu_{A_1}(x), \mu_{A_2}(x), \ldots, \mu_{A_n}(x)\} \qquad (۱.۱)$$

تعریف ۶.۱.۱. مجموعه‌های مرجع X و Y را در نظر بگیرید. در این صورت،

$$R = \{((x, y),\ \mu_R(x, y))|(x, y) \in X \times Y\}, \qquad (۲.۱)$$

یک رابطه‌ی فازی روی $X \times Y$ نامیده می‌شود، که در آن μ_R نگاشتی است از حاصل‌ضرب دکارتی $X \times Y$ به بازه‌ی واحد $[0, 1]$ و $\mu_R(x, y)$ نشان دهنده‌ی درجه‌ی رابطه‌ی بین x و y است [۴۸].

تعریف ۷.۱.۱. دو رابطه‌ی R و S تعریف شده روی مجموعه‌های A، B و C را در نظر بگیرید. به طوری که، $R \subseteq A \times B$ و $S \subseteq B \times C$. ترکیب دو رابطه‌ی R و S به صورت $S \circ R = SR$ نشان داده می‌شود و به ازای هر $(x, y) \in A \times B$ و $(y, z) \in B \times C$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mu_{S \circ R}(x, z) = \max_y\{\min\{\mu_R(x, y) \text{ و } \mu_S(y, z)\}\} \qquad (۳.۱)$$

$$= \bigvee_y (\mu_R(x, y) \wedge \mu_S(y, z)). \qquad (۴.۱)$$

۲.۱ مشبکه

رابطه‌ی R روی مجموعه‌ی X، یک رابطه‌ی ترتیب جزئی نامیده می‌شود، اگر و فقط اگر رابطه‌ی R روی X، انعکاسی، متعدی و پادمتقارن باشد.

تعریف ۱.۲.۱. فرض کنید L یک مجموعه ناتهی است، که تحت دو عمل دوتایی به نام رسند و وست که به ترتیب با $\wedge$ و $\vee$ نشان داده می‌شوند، بسته باشد. در این صورت L یک مشبکه است، اگر قوانین زیر برای هر a، b و c در L برقرار باشند:

(۱) قوانین تعویض‌پذیری؛ $a \vee b = b \vee a$ و $a \wedge b = b \wedge a$.

(۲) قوانین شرکت‌پذیری؛ $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$ و $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$.

(۳) قوانین جذب؛ $a \wedge (a \vee b) = a$ و $a \vee (a \wedge b) = a$.

هنگامی که می‌خواهیم اعمال مربوط را مشخص کنیم مشبکه را با $(L, \wedge, \vee)$ نشان می‌دهیم.

بنابر تعریف فوق می‌توان قوانین خودتوانی را برای یک مشبکه به صورت زیر بیان کرد:

$$a \wedge a = a \text{ و } a \vee a = a. \tag{۵.۱}$$

فرض کنید L یک مشبکه است، می‌توان یک رابطه‌ی ترتیب جزئی را بر L به صورت زیر تعریف کرد: $a \leq b$، اگر و فقط اگر $a \wedge b = a$. به همین طریق می‌توان تعریف کرد؛ $a \leq b$، اگر و فقط اگر $a \vee b = b$.

این نتایج را به صورت یک قضیه بیان می‌کنیم.

قضیه ۲.۲.۱. فرض کنید L یک مشبکه است، در این صورت داریم:

(۱) $a \wedge b = a$، اگر و فقط اگر $a \vee b = b$.

(۲) رابطه‌ی aRb (تعریف شده با $a \wedge b = a$ یا $a \vee b = b$) یک ترتیب جزئی بر L است.

گوییم مشبکه‌ی L داری کران پایین است و آن را با ۰ نشان می‌دهیم، اگر برای هر x در L داشته باشیم $۰ \leq x$. به همین نحو گوییم L دارای کران بالا است و آن را با ۱ نشان می‌دهیم، اگر برای هر x در L داشته باشیم $x \leq ۱$. گوییم L کران‌دار است، اگر L هم دارای کران پایین ۰ و هم کران بالای ۱ باشد. در یک مشبکه کرن‌دار به ازای هر $a \in L$ اتحادهای زیر بر قرار است:

$$a \vee ۱ = ۱ \text{ و } a \wedge ۱ = a \text{ و } a \vee ۰ = a \text{ و } a \wedge ۰ = ۰. \tag{۶.۱}$$

مثال ۳.۲.۱. فرض کنید G خانواده‌ای از مجموعه‌ها است، که تحت اشتراک و اجتماع بسته است. در این صورت $(G, \cap, \cup)$ یک مشبکه است. در این مشبکه رابطه‌ی ترتیب جزئی همان رابطه‌ی شمول مجموعه‌ها است.

چگونگی تعریف یک ترتیب جزئی بر مشبکه‌ی L را نشان دادیم. قضیه‌ی زیر امکان تعریف یک مشبکه بر مجموعه‌ی جزئی مرتب P، به نحوی که مشبکه ترتیب اصلی بر P را بازگرداند، فراهم خواهد کرد.

قضیه ۴.۲.۱. فرض کنید P یک مجموعه‌ی جزئی مرتب است، به‌طوری که مقادیر $\inf(a,b)$ و $\sup(a,b)$، برای هر $a,b \in P$ موجود باشند. فرض کنید $a \vee b = \sup(a,b)$ و $a \wedge b = \inf(a,b)$ است. در این صورت $(P, \wedge, \vee)$ یک مشبکه است. به‌علاوه ترتیب جزئی القاء شده توسط این مشبکه بر P همان ترتیب جزئی اصلی بر P می‌باشد.

تعریف ۵.۲.۱. دو مشبکه‌ی L و K را یکریخت گوییم، هرگاه تناظر یک به یکی مانند $f : L \longrightarrow K$ وجود داشته باشد به طوری که به ازای هر دو عضو a و b در L:

$$f(a \vee_L b) = f(a) \vee_K f(b) \text{ و } f(a \wedge_L b) = f(a) \wedge_K f(b). \tag{۷.۱}$$

مثال ۶.۲.۱. اگر U یک مجموعه‌ی ناتهی باشد، آنگاه $P(U)$ خانواده تمام زیرمجموعه‌های، مجموعه‌ی U یک مشبکه‌ی کرن‌دار با کران بالای U و کران پایین $\emptyset$ می‌باشد.

مثال ۷.۲.۱. اگر $L = \{a_۱, a_۲, \ldots, a_n\}$ یک مشبکه‌ی متناهی باشد، آنگاه $a_۱ \vee a_۲ \vee \ldots \vee a_n$، کران بالای L و $a_۱ \wedge a_۲ \wedge \ldots \wedge a_n$، کران پایینی از L است.

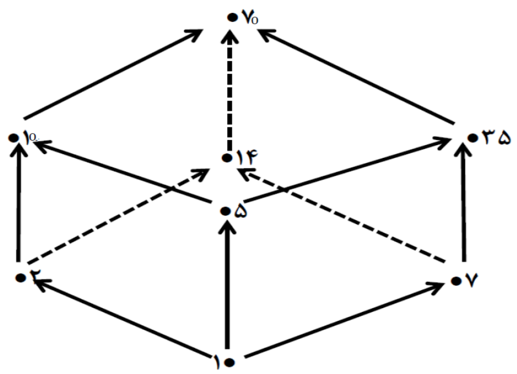
با توجه به مثال فوق می‌توان قضیه زیر را بیان کرد.

قضیه ۸.۲.۱. هر مشبکه‌ی متناهی کران‌دار است.

تعریف ۹.۲.۱. عضو ناصفر a از مشبکه‌ی L را اتم می‌نامیم، هرگاه به ازای هر عضو x از L داشته باشیم:

$$x \leq a \Rightarrow x = a \text{ یا } x = ۰. \tag{۸.۱}$$

مثال ۱۰.۲.۱. مجموعه‌ی $L = \{۱, ۲, ۵, ۷, ۱۰, ۱۴, ۳۵, ۷۰\}$، (مجموعه‌ی همه‌ی مقسوم علیه‌های مثبت عدد ۷۰) مشبکه‌ای با کران پایین ۱ و کران بالای ۷۰ است و همان طور که در شکل زیر دیده می‌شود، مجموعه‌ی اتم‌های آن برابر با $\{۲, ۵, ۷\}$ می باشد.



گوییم مشبکه‌ی L توزیع‌پذیر است، هرگاه به ازای هر سه عضو a، b و c در L داشته باشیم:

$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c) \text{ و } a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c), \qquad (۹.۱)$$

در غیر این صورت L را توزیع‌ناپذیر گوییم.

فرض کنید L یک مشبکه‌ی کران‌دار با کران بالای ۱ و کران پایین ۰ است، همچنین فرض کنید a عضوی از L است. عضو x در L را متمم a نامیم، هرگاه $a \vee x = ۱$ و $a \wedge x = ۰$. در یک مشبکه ممکن است متمم‌ها وجود نداشته باشند و همین طور ممکن است در صورت وجود منحصر به‌فرد نباشند.

قضیه ۱۱.۲.۱. فرض کنید L یک مشبکه‌ی توزیع‌پذیر کران‌دار است، در این صورت متمم‌ها در صورت وجود منحصر به‌فردند.

برهان. فرض کنید x و y متمم‌های عضو دلخواه a در L هستند. در این صورت داریم:

$$a \vee x = ۱ \text{ و } a \vee y = ۱ \text{ و } a \wedge x = ۰ \text{ و } a \wedge y = ۰,$$

با استفاده از فرض توزیع‌پذیری داریم:

$$x = x \vee ۰ = x \vee (a \wedge y) = (x \vee a) \wedge (x \vee y) = ۱ \wedge (x \vee y) = x \vee y,$$

به همین ترتیب داریم:

$$y = y \vee ۰ = y \vee (a \wedge x) = (y \vee a) \wedge (y \vee x) = ۱ \wedge (y \vee x) = y \vee x.$$

بنابراین داریم، $x = x \vee y = y \vee x = y$. □

تعریف ۱.۲.۱۲. گوییم مشبکه‌ی L تام است، اگر L کران‌دار بوده و هر عضو L دارای متمم باشد.

مثال ۱.۲.۱۳. مشبکه‌ی $P(U)$ متشکل از تمام زیرمجموعه‌های مجموعه‌ی U، تام است و هر زیرمجموعه‌ی A از U دارای متمم منحصر به‌فرد $A^c = U - A$ می‌باشد.

فرض کنید L مشبکه‌ای با کران پایین ۰ است. گوییم عضو a در L تحویل ناپذیر الحاقی است، هرگاه $a = x \vee y$ تساوی $a = x$ یا $a = y$ را ایجاب کند. به عبارت دیگر عضو $a \neq ۰$ تحویل ناپذیر الحاقی است، اگر از وست هیچ دو عضو ما قبل خود به‌دست نیامده باشد.

قضیه ۱.۲.۱۴. فرض کنید L یک مشبکه‌ی توزیع‌پذیر متناهی است، در این صورت هر عضو a در L را می‌توان به‌صورت منحصر به‌فرد (جز در ترتیب) به صورت وست اعضای تحویل ناپذیر الحاقی غیر زائد نوشت.

برهان. هرگاه عضو a در مشبکه‌ی متناهی L تحویل ناپذیر باشد چیزی برای اثبات باقی نمی‌ماند. پس فرض کنید a تحویل ناپذیر الحاقی نیست، بنابراین آن را می‌توان به صورت $a = b_۱ \vee b_۲$ نوشت. در این صورت، اگر $b_۱$ و $b_۲$ تحویل ناپذیر الحاقی نباشند می‌توان آنها را به‌صورت وست سایر اعضاء نوشت و چون L متناهی است، در نهایت داریم $a = d_۱ \vee d_۲ \vee \ldots \vee d_n$ که در آن d_i ها $(۱ \leq i \leq n)$ همگی تحویل ناپذیر الحاقی‌اند. حال اگر d_i ای قبل از d_j ای باشد آنگاه $d_i \vee d_j = d_j$ بنابراین می‌توان d_i را حذف کرد. بنابراین می‌توان فرض کرد تمام d_i ها متمایزند. $\square$

قضیه ۱.۲.۱۵. فرض کنید L یک مشبکه‌ی توزیع‌پذیر متناهی است. در این صورت هر عضو a در L، وست مجموعه‌ی منحصر به‌فردی از اتم‌ها است.

رابطه‌ی هم‌ارزی $\sim$ در مشبکه‌ی L یک هم‌نهشتی نامیده می‌شود، هرگاه:

$$x_۰ \sim x_۱ \text{ و } y_۰ \sim y_۱ \Rightarrow \begin{cases} x_۰ \vee y_۰ \sim x_۱ \vee y_۱ \\ x_۰ \wedge y_۰ \sim x_۱ \wedge y_۱ \end{cases} \qquad (۱.۱۰)$$

تعریف ۱.۲.۱۶. سه‌تایی $(B, \vee, \wedge)$ را جبر بولی گوییم، هرگاه خواص زیر بر قرار باشد:

(۱) $a \wedge b = b \wedge a$ و $a \vee b = b \vee a$؛

(۲) $a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$ و $a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$؛

(۳) $a \wedge (b \vee a) = a$ و $a \vee (b \wedge a) = a$.

بنابراین هر جبر بولی B یک مشبکه است، به‌علاوه هر جبر بولی از خواص زیر برخوردار است:

(۴) هر عمل نسبت به عمل دیگر توزیع‌پذیر است.

(۵) B دارای کران بالای ۱ و کران پایین ۰ است.

(۶) هر عضو دارای متمم منحصر به‌فرد می‌باشد.

پس هر جبر بول مشبکه‌ای تام و توزیع‌پذیر با متمم منحصر به‌فرد است. عمل $'$ (متمم) در یک جبر بولی برای هر a به صورت، $a \wedge a' = 0$ و $a \vee a' = 1$ تعریف می‌شود.

مثال ۱۷.۲.۱. مجموعه‌ی $\{\emptyset, A, A^C, U\}$، یک زیرجبر از $P(U)$ است.

لم ۱۸.۲.۱. اگر B یک جبر بول متناهی باشد و $0 \neq b \in B$، آنگاه اتم a در B وجود دارد به‌طوری که $a \leq b$.

برهان. اگر b اتم باشد قرار می‌دهیم $a = b$، در غیر این صورت عضو a_1 در B را به گونه‌ای انتخاب می‌کنیم که $0 \leq a_1 \leq b$. عضو a_1 وجود دارد، زیرا b اتم نمی‌باشد. حال اگر a_1 اتم باشد، قرار می‌دهیم $a = a_1$. در غیر این صورت $a_2 \in B$ را به گونه‌ای انتخاب می‌کنیم که $0 < a_2 < a_1 < b$. اگر a_2 اتم باشد، قرار می‌دهیم $a = a_2$. در غیر این صورت با ادامه‌ی این روند به‌دست می‌آوریم، $0 < \ldots < a_2 < a_1 < b$. از آن‌جا که B متناهی است، a_k ای وجود دارد که بلافاصله بعد از ۰ است و $a_k \leq b$. کافی است قرار دهیم $a = a_k$. □

لم ۱۹.۲.۱. اگر a_1 و a_2 در B اتم باشند و $a_1 \wedge a_2 \neq 0$، آنگاه $a_1 = a_2$.

برهان. چون a_1 اتم است، پس $a_1 \wedge a_2 = a_1$ یا $a_1 \wedge a_2 = 0$ و چون $a_1 \wedge a_2 \neq 0$، پس $a_1 \wedge a_2 = a_1$. از طرفی چون a_2 اتم است، پس بنابر لم قبل $a_2 \wedge a_1 = a_2$ و در نتیجه داریم، $a_1 = a_1 \wedge a_2 = a_2 \wedge a_1 = a_2$. □

لم ۲۰.۲.۱. اگر $b, c \in B$ و $b \nleq c$، آنگاه اتم $a \in B$ وجود دارد به طوری که $a \leq b$ و $a \nleq c$.

برهان. اگر $b \nleq c$، آنگاه $b \wedge c' \neq ۰$. در این صورت بنابر لم ۱۹.۲.۱، اتم $a \in B$ وجود دارد به طوری که $a \leq b \wedge c'$ پس $a \leq b$ و $a \nleq c$. $\square$

لم ۲۱.۲.۱. اگر $b \in B$ و $a_۱$، $a_۲$، ...، a_m اتم‌های تحت b باشند، آنگاه $b = a_۱ \vee a_۲ \vee \ldots \vee a_m$.

برهان. فرض کنید $c = a_۱ \vee a_۲ \vee \ldots \vee a_m$، در این صورت $c \leq b$ است، زیرا به ازای هر $۱ \leq i \leq m$ داریم $a_i \leq b$. کافی است نشان دهیم که $b \leq c$. فرض کنید $b \nleq c$، در این صورت بنابر لم قبل اتم a وجود دارد به طوری که، $a \leq b$ و $a \nleq c$. اما $a \leq b$ نتیجه می‌دهد که، $a = a_i$ (برای یک i) که در این صورت شرایط $a = a_i$ و $a \wedge c = ۰$ با یکدیگر در تناقض هستند. بنابراین $b \leq c$ و در نتیجه $b = c$. $\square$

لم ۲۲.۲.۱. اگر $a, b \in B$ و $a_۱$، $a_۲$، ...، a_m اتم‌های B باشند به طوری که $b = a_۱ \vee a_۲ \vee \ldots \vee a_m$ و $a \leq b$، آنگاه $a = a_i$ (برای بعضی iها).

برهان. داریم $a \wedge b = a$، زیرا $a \leq b$. همین طور داریم:

$$a = a \wedge (a_۱ \vee a_۲ \vee \ldots \vee a_m) = (a \wedge a_۱) \vee (a \wedge a_۲) \vee \ldots \vee (a \wedge a_m).$$

بنابراین i ای وجود دارد به‌طوری که $a \wedge a_i \neq ۰$، در نتیجه داریم $a = a_i$. $\square$

قضیه ۲۳.۲.۱. اگر B یک جبر بول متناهی و S مجموعه‌ی اتم‌های B باشد، آنگاه $B \cong P(S)$.

برهان. اگر $b \in B$، آنگاه بنابر لم ۲۱.۲.۱ داریم $b = a_۱ \vee a_۲ \vee \ldots \vee a_m$، که $a_۱, a_۲, \ldots, a_m \in S$. به‌علاوه $\{a \in S | a \leq b\} = \{a_۱, a_۲, \ldots, a_m\}$، حال می‌توان نگاشت $\theta : B \longrightarrow P(S)$ را بدین صورت تعریف کرد، $\theta(a_۱ \vee a_۲ \vee \ldots \vee a_m) = \{a_۱, a_۲, \ldots, a_m\}$. به وضوح نگاشت θ پوشا است. حال نشان می‌دهیم که θ یک به یک است. تنها کافی است نشان دهیم که اگر $b, c \in B$ و $b \neq c$، آنگاه $a \in S$ وجود دارد به‌طوری که $a \leq b$ و $a \nleq c$، یا برعکس، $a \leq c$ و $a \nleq b$. چون $b \neq c$ پس $b \nleq c$ یا $c \nleq b$. فرض کنیم $b \nleq c$، در این صورت اتم $a \in B$ وجود دارد به‌طوری که $a \leq b$ و $a \nleq c$، که این نشان می‌دهد $\theta(b) \neq \theta(c)$. پس θ یک به یک می‌باشد. حال اگر فرض کنیم $b, c \in B$ آنگاه:

$$\theta(b \vee c) = \{a \in S | a \leq b \vee c\} = \{a \in S | a \leq b \ \vee \ a \leq c\}$$

$$= \{a \in S | a \leq b\} \cup \{a \in S | a \leq c\} = \theta(b) \cup \theta(c).$$

و

$$\theta(b \wedge c) = \{a \in S | a \leq b \wedge c\} = \{a \in S | a \leq b \ \wedge \ a \leq c\}$$
$$= \{a \in S | a \leq b\} \cap \{a \in S | a \leq c\} = \theta(b) \cap \theta(c).$$

بدین ترتیب اثبات کامل شد. $\square$

نتیجه ۲۴.۲.۱. اگر B یک جبر بول متناهی باشد، آنگاه $|B| = 2^n$ به ازای یک عدد صحیح n.

۳.۱ نظریه گواهی

نظریه گواهی در سال ۱۹۶۷ توسط دمپستر[1] با نظریه حدود بالا و پایین احتمال ارائه گردید. دمپستر در واقع نوعی عدم قطعیت در بیان اندازه احتمال پیشامدها را مدلسازی نمود [۱۱]. پس از آن شافر[2] در سال ۱۹۷۶ این نظریه را با عنوان نظریه گواهی به عنوان ساختاری برای نمایش اطلاعات ناکامل و استدلال تحت عدم قطعیت، فرمول‌بندی نمود [۳۴]. پس از ارائه مدل دمپستر بر اساس حدود بالا و پایین احتمال و به دنبال آن نظریه گواهی، مدلهای مختلفی براساس توابع اعتماد ارائه گردید، از جمله مدل هینتس[3] و مدل "تی بی ام"[4]، که سطوح معنایی متفاوتی را برای استفاده از این نظریه به منظور مدل‌سازی عدم قطعیت ارائه نمودند. در مدل "تی بی ام" توابع به عنوان میزان اعتماد در اعتقاد غیرقطعی، بدون ارجاع به هرگونه اساس احتمالاتی، تفسیر می‌شوند. در حالی که مدل هینتس نزدیکی بیشتری به مدل دمپستر داشته و پایه احتمالاتی برای توابع اعتماد در نظر می‌گیرد.

فرض کنیم متغیر تصادفی مورد نظر مقادیر خود را از فضای $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\}$ که مجموعه مرجع خوانده می‌شود، اختیار می‌کند. هر ساختار اعتقادی، یا تابع چگالی نگاشتی از فضای زیرمجموعه‌های

[1] $Dempster$

[2] $Shafer$

[3] $Hints$

[4] $(Transferable\ Belief\ Model)\ TBM$