بسم الله الرحمن الرحیم

آ

دانشگاه تربیت مدرس

دانشکده‌ی علوم ریاضی

پایان‌نامه‌ی کارشناسی ارشد

گروه ریاضی محض

تعریف‌پذیری عملگرها در تئوری فضاهای هیلبرت

نگارنده:

خدیجه حسینی

استاد راهنما:

دکتر سیدمحمد باقری

مهرماه ۱۳۹۲

دانشگاه تربیت مدرس
دانشکده علوم ریاضی

بسمه تعالی

تأییدیه اعضای هیأت داوران حاضر در جلسه دفاع از پایان‌نامه کارشناسی‌ارشد

اعضای هیأت داوران نسخهٔ نهایی پایان‌نامه خانم **خدیجه حسینی** رشته **ریاضی‌محض** به شماره دانشجویی ۹۰۵۲۰۵۱۰۰۹ تحت عنوان: «**تعریف‌پذیری عملگرها در تئوری فضاهای هیلبرت**» را در تاریخ ۱۳۹۲/۷/۲۹ از نظر فرم و محتوا بررسی نموده و آن را برای اخذ درجهٔ کارشناسی‌ارشد مورد تأیید قرار دادند.

اعضای هیأت داوران	نام و نام‌خانوادگی	رتبه علمی	امضاء
۱- استاد راهنما	دکتر سیدمحمد باقری	دانشیار	
۲- استاد ناظر داخلی	دکتر سیداحمد موسوی	دانشیار	
۳- استاد ناظر داخلی	دکتر عباس حیدری	استادیار	
۴- استاد ناظر خارجی	دکتر مرتضی منیری	دانشیار	
۵- نماینده تحصیلات تکمیلی	دکتر عباس حیدری	استادیار	

آیین نامه چاپ پایان‌نامه (رساله)های دانشجویان دانشگاه تربیت مدرس

نظر به اینکه چاپ و انتشار پایان نامه (رساله)های تحصیلی دانشجویان دانشگاه تربیت مدرس، مبین بخشی از فعالیتهای علمی - پژوهشی دانشگاه است بنابراین به منظور آگاهی و رعایت حقوق دانشگاه،دانش آموختگان این دانشگاه نسبت به رعایت موارد ذیل متعهد می‌شوند:

ماده ۱: در صورت اقدام به چاپ پایان نامه (رساله)ی خود، مراتب را قبلا به طور کتبی به «دفتر نشر آثارعلمی» دانشگاه اطلاع دهد.

ماده ۲: در صفحه سوم کتاب (پس از برگ شناسنامه) عبارت ذیل را چاپ کند:

«کتاب حاضر، حاصل پایان نامه کارشناسی ارشد/ رساله دکتری نگارنده در رشته ریاضی محض است که در سال ۱۳۹۲ در دانشکده علوم ریاضی دانشگاه تربیت مدرس به راهنمایی ~~سرکار خانم~~/جناب آقای دکتر سید محمد باقری ، مشاوره سرکار خانم/جناب آقای دکتر ——— و مشاوره سرکار خانم/جناب آقای دکتر ——— از آن دفاع شده است.»

ماده ۳: به منظور جبران بخشی از هزینه‌های انتشارات دانشگاه، تعداد یک درصد شمارگان کتاب (در هر نوبت‌چاپ) را به «دفتر نشر آثارعلمی» دانشگاه اهدا کند. دانشگاه می‌تواند مازاد نیاز خود را به نفع مرکز نشر درمعرض فروش قرار دهد.

ماده ۴: در صورت عدم رعایت ماده ۳، ۵۰٪ بهای شمارگان چاپ شده را به عنوان خسارت به دانشگاه تربیت‌مدرس، تأدیه کند.

ماده ۵: دانشجو تعهد و قبول می کند در صورت خودداری از پرداخت بهای خسارت، دانشگاه می‌تواند خسارت مذکور را از طریق مراجع قضایی مطالبه و وصول کند؛ به علاوه به دانشگاه حق می‌دهد به منظور استیفای حقوق خود، از طریق دادگاه، معادل وجه مذکور در ماده ۴ را از محل توقیف کتابهای عرضه شده نگارنده برای فروش، تامین نماید.

ماده ۶: اینجانب خدیجه حسینی دانشجوی رشته ریاضی محض مقطع کارشناسی ارشد تعهد فوق وضمانت اجرایی آن را قبول کرده، به آن ملتزم می شوم.

نام و نام خانوادگی: خدیجه حسینی

تاریخ و امضا: ۱۳۹۲/۸/۱۲

ایین‌نامه حق مالکیت مادی و معنوی در مورد نتایج پژوهشهای علمی دانشگاه تربیت مدرس

مقدمه: با عنایت به سیاست‌های پژوهشی و فناوری دانشگاه در راستای تحقق عدالت و کرامت انسانها که لازمه شکوفایی علمی و فنی است و رعایت حقوق مادی و معنوی دانشگاه و پژوهشگران، لازم است اعضای هیات علمی، دانشجویان، دانش‌اموختگان و دیگر همکاران طرح، در مورد نتایج پژوهشهای علمی که تحت عناوین پایان‌نامه، رساله و طرحهای تحقیقاتی با هماهنگی دانشگاه انجام شده است، موارد زیر را رعایت نمایند:

ماده ۱- حق نشر و تکثیر پایان نامه/ رساله و درامدهای حاصل از انها متعلق به دانشگاه می باشد ولی حقوق معنوی پدید اورندگان محفوظ خواهد بود.

ماده ۲- انتشار مقاله یا مقالات مستخرج از پایان‌نامه/ رساله به صورت چاپ در نشریات علمی و یا ارائه در مجامع علمی باید به نام دانشگاه بوده و با تایید استاد راهنمای اصلی، یکی از اساتید راهنما، مشاور و یا دانشجو مسئول مکاتبات مقاله باشد. ولی مسئولیت علمی مقاله مستخرج از پایان نامه و رساله به عهده اساتید راهنما و دانشجو می باشد.

تبصره: در مقالاتی که پس از دانش‌اموختگی بصورت ترکیبی از اطلاعات جدید و نتایج حاصل از پایان‌نامه/ رساله نیز منتشر می‌شود نیز باید نام دانشگاه درج شود.

ماده ۳- انتشار کتاب، نرم افزار و یا اثار ویژه (اثری هنری مانند فیلم، عکس، نقاشی و نمایشنامه) حاصل از نتایج پایان‌نامه/ رساله و تمامی طرحهای تحقیقاتی کلیه واحدهای دانشگاه اعم از دانشکده ها، مراکز تحقیقاتی، پژوهشکده ها، پارک علم و فناوری و دیگر واحدها باید با مجوز کتبی صادره از معاونت پژوهشی دانشگاه و براساس ائین نامه های مصوب انجام شود.

ماده ٤- ثبت اختراع و تدوین دانش فنی و یا ارائه یافته ها در جشنواره‌های ملی، منطقه‌ای و بین‌المللی که حاصل نتایج مستخرج از پایان‌نامه/ رساله و تمامی طرح‌های تحقیقاتی دانشگاه باید با هماهنگی استاد راهنما یا مجری طرح از طریق معاونت پژوهشی دانشگاه انجام گیرد.

ماده ٥- این ایین‌نامه در ٥ ماده و یک تبصره در تاریخ۸۷/٤/۱ در شورای پژوهشی و در تاریخ ۸۷/٤/۲۳ در هیات رئیسه دانشگاه به تایید رسید و در جلسه مورخ ۸۷/۷/۱۵ شورای دانشگاه به تصویب رسیده و از تاریخ تصویب در شورای دانشگاه لازم‌الاجرا است.

«اینجانب ..خدیجه حسینی.. دانشجوی رشته ..ریاضی محض.. ورودی سال تحصیلی ..۹۱-۹۰.. مقطع ..کارشناسی ارشد.. دانشکده ..علوم ریاضی.. متعهد می شوم کلیه نکات مندرج در ائین نامه حق مالکیت مادی و معنوی در مورد نتایج پژوهش های علمی دانشگاه تربیت مدرس را در انتشار یافته های علمی مستخرج از پایان نامه / رساله تحصیلی خود رعایت نمایم. در صورت تخلف از مفاد ائین نامه فوق الاشعار به دانشگاه وکالت و نمایندگی می دهم که از طرف اینجانب نسبت به لغو امتیاز اختراع بنام بنده و یا هر گونه امتیاز دیگر و تغییر ان به نام دانشگاه اقدام نماید. ضمنا نسبت به جبران فوری ضرر و زیان حاصله بر اساس براورد دانشگاه اقدام خواهم نمود و بدینوسیله حق هر گونه اعتراض را از خود سلب نمودم»

امضا: ....

تاریخ: ۹۲/۸/۱۲

تقدیم به

چشم های همیشه نگران مادرم

و

پدرم که نه فقط آب و نان، که چراغ زندگانیم است.

سپاس از

استاد گرامی جناب آقای دکتر سید محمد باقری

و

آنان که گام های لرزان و مردد مرا در قلمرو علم و عمل قوت بخشیده و می بخشند.

چکیده

در این پایان‌نامه به معرفی منطق پیوسته و ساختارهای متریک پرداخته و سپس با در نظر گرفتن فضاهای هیلبرت به عنوان ساختارهای متریک، تئوری این فضاها را از دید منطق پیوسته مورد مطالعه قرار می‌دهیم. هدف اصلی بررسی تعریف‌پذیری در این تئوری می‌باشد. نشان خواهیم داد عملگرهای خطی تعریف‌پذیر روی فضاهای هیلبرت به صورت عملگرهای اسکالر به علاوه فشرده هستند. همچنین توصیف عملگرهای تعریف‌پذیر نتایج بیشتری در حالت مختلط می‌دهد از جمله، می‌توان به مسئله‌ی زیرفضای ناوردا برای فضاهای هیلبرت اشاره نمود که در صورت محدود شدن به عملگرهای تعریف‌پذیر مختلط، پاسخ مثبت دارد.

مرجع اصلی این پایان‌نامه مقاله‌ی زیر بوده است:

"Definable operators on Hilbert spaces"

I.Goldbring, Notre Dame Journal of Forml Logic 53(2) 2012

واژگان کلیدی: منطق پیوسته، ساختارهای متریک، فضاهای هیلبرت، عملگرهای تعریف‌پذیر، بستار تعریف‌پذیر.

فهرست مطالب

مقدمه

یکی از تئوری‌هایی که از دیدگاه منطق پیوسته مورد بررسی قرار می‌گیرد، تئوری فضاهای هیلبرت (حقیقی یا مختلط) با بعد نامتناهی (IHS) می‌باشد. چنداگر زدایی، ω-پایدار بودن و جازمیت از هر کاردینال نامتناهی κ از ویژگی‌های این تئوری می‌باشد. اما بررسی تعریف‌پذیرها کمی دشوار است.

پس از تجزیه و تحلیل تابع‌های تعریف‌پذیر در کره اوریسون [1] [۴]، مطالعه‌ی تابع‌های تعریف‌پذیر در ساختارهای متریک مورد توجه قرار گرفت از جمله مجموعه‌ها و تابع‌های تعریف‌پذیر در تئوری فضاهای هیلبرت مطالعه گردید.

هدف اصلی ما در این پایان‌نامه، مطالعه‌ی عملگرهای خطی تعریف‌پذیر روی فضاهای هیلبرت می‌باشد.

مطابق مدل تئوری مرتبه اول، اگر $\mathcal{M}$ یک ساختار متریک و $A \subseteq M$ یک مجموعه از پارامترها و $f : M \longrightarrow M$، یک تابع A-تعریف‌پذیر باشد، آنگاه برای هر $x \in M$ داریم $f(x) \in dcl(Ax)$ که dcl بستار تعریف‌پذیر می‌باشد.

بنابراین، در هر تئوری که dcl شناخته شده باشد، می‌توانیم تابع‌های تعریف‌پذیر را مشخص نماییم.

در مدل‌های IHS بستار تعریف‌پذیر یک مجموعه از پارامترها برابر بستار فضای تولیدشده می‌باشد.

---

[1] $Urysohn\ sphere$

قضیه اصلی : فرض کنید H فضای هیلبرت حقیقی(یا مختلط) نامتناهی-بعد باشد، آنگاه عملگرهای خطی تعریف‌پذیر روی H، به صورت عملگرهای "اسکالر به علاوه فشرده "

هستند یعنی به صورت $\lambda I + K$ که در آن $\lambda \in \mathbb{R}$ $(\lambda \in \mathbb{C})$ ، $I : H \longrightarrow H$ عملگر همانی و $K : H \longrightarrow H$ یک عملگر فشرده می‌باشد.

نتایجی مانند اینکه عملگرهای انتقال راست وچپ روی ℓ^2 تعریف‌پذیر نیستند و عملگرهای خطی تعریف‌پذیر تحت الحاق‌گیری بسته می‌باشند، از قضیه اصلی به دست می‌آید.

همچنین در حالت مختلط به نتایج بیشتری برای عملگرهای تعریف‌پذیر دست می‌یابیم که از آن جمله، می‌توان به مسئله‌ی زیرفضای ناوردا برای فضاهای هیلبرت اشاره نمود.

مطالب کلی پایان‌نامه به شرح زیر است:

در فصل اول به معرفی منطق پیوسته و ساختارهای متریک می‌پردازیم و مدل تئوری منطق پیوسته و همچنین قضایای مهمی مثل قضیه‌ی فشردگی، لون‌هایم-اسکولم فراسو و فروسو را بیان می‌کنیم.

درفصل دوم ویژگی‌های فضاهای هیلبرت را بیان کرده و به مطالعه‌ی تئوری این فضاها می‌پردازیم.

در فصل سوم به بررسی تعریف‌پذیری در فضاهای هیلبرت که هدف اصلی این پایان‌نامه می‌باشد، پرداخته و قضیه اصلی و نتایج حاصل از آن را شرح خواهیم داد.

فصل ۱

منطق پیوسته

۱.۱ ساختارمتریک و زبان‌های وابسته

این بخش را با شرح مختصری از ساختارهای متریک و منطق پیوسته آغاز و سپس به تعریف دقیق آن‌ها می‌پردازیم. بیشتر مطالب این فصل از [۲] می‌باشد.

یک ساختار متریک، یک ساختار چندگونه‌ای است که هر گونه یک فضای متریک کامل از قطر متناهی می‌باشد. علاوه بر این، این ساختار شامل عنصرهایی مانند تابع‌هایی بین گونه‌ها و تابع‌هایی از گونه‌ها به زیرمجموعه‌های کراندار $\mathbb{R}$ می‌باشد که این تابع‌ها بایستی پیوسته‌ی یکنواخت باشند. مثال‌هایی از این ساختارها شامل فضاهای متریک، فضاهای باناخ، شبکه‌های باناخ، فضاهای احتمال و غیره می‌باشد.

از آنجایی‌که منطق مرتبه اول برای مطالعه‌ی ساختارهای متریک مناسب نیست، برای بررسی این ساختارها منطق فرمول‌های کراندار مثبت [۱]، نظریه‌های مجرد

[۱] $positive\ bounded\ formulas$

فشرده [۲] (cat) و منطق پیوسته پیشنهاد شده است که از میان آن‌ها، منطق پیوسته از امتیازات بیشتری برخوردار می‌باشد. برای نمونه بیان گزاره‌ها و عبارت‌ها از آنالیز و هندسه در منطق پیوسته آسانتر می‌باشد و لذا این منطق برای بررسی ساختارهای متریک، مناسبتر است.

در منطق مرتبه اول ارزش درستی را مجموعه‌ی $\{0,1\}$ اختیار کردیم. در منطق پیوسته این مجموعه را از $\{0,1\}$ به $[0,1]$ گسترش می‌دهیم. همچنین در منطق پیوسته رابطه‌ها که شامل رابطه‌ی تساوی می‌باشند، تابع‌هایی از یک فضای زمینه به $[0,1]$ ، هابندها تابع‌های پیوسته روی $[0,1]$ و چنداگرها sup و inf هستند.

در منطق مرتبه اول پیوسته (CFO) قضایای مهمی مانند فشردگی، لون‌هایم-اسکولم، وجود مدل‌های آکنده و همگن، چنداگر زدایی، زدایش تایپ و بسیاری از قضیه‌های پایه‌ای مدل تئوری منطق مرتبه اول (FOL) برقرار است. در واقع CFO گسترش FOL می‌باشد.

اکنون چند تعریف که در ادامه مورد نیاز است، را بیان می‌کنیم.

تعریف ۱.۱.۱. فضای متریک (M,d) را کراندار گوییم هرگاه عدد حقیقی مانند B وجود داشته باشد که به ازای هر $x,y \in M$ داشته باشیم $d(x,y) \leq B$.

قطر فضای متریک (M,d) کوچکترین عدد حقیقی است که در شرط فوق صدق کند، که آن را با $diam(M,d)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۲.۱.۱. اگر $(M',d'),(M,d)$ فضاهای متریک باشند و $f : M \to M'$ تابع دلخواه باشد، گوییم $\Delta : (0,1] \to (0,1]$ پیمانه‌ی پیوستگی یکنواخت برای f است هرگاه برای هر $\epsilon \in (0,1]$ و هر $x,y \in M$ داشته باشیم:

$$d(x,y) < \Delta(\epsilon) \Longrightarrow d'(f(x),f(y)) \leq \epsilon$$

[۲] $compact\ abstract\ theories$

f را پیوسته‌ی یکنواخت گوییم اگر یک پیمانه‌ی پیوستگی یکنواخت داشته باشد.

تعریف ۳.۱.۱. فرض کنید (M_i, d_i) برای $i = 1, ..., n$ فضاهای متریک باشند و

$$M = M_1 \times M_2 \times \times .... \times M_n$$

در این صورت M را با متر ماکسیمم در نظر می‌گیریم یعنی برای $x = (x_1, ..., x_n)$ و
$y = (y_1, ..., y_n)$ قرار می‌دهیم :

$$d(x, y) = max\{d_i(x_i, y_i) | i = 1, ..., n\}$$

حال به تعریف زبان و ساختار در منطق پیوسته می‌پردازیم.

زبان L در منطق پیوسته، شامل یک مجموعه از نمادهای رابطه‌ای $\mathcal{R} = \{R_1, R_2, ...\}$ و عدد صحیح n_R برای هر $R \in \mathcal{R}$، یک مجموعه از نمادهای تابعی $\mathcal{F} = \{f_1, f_2, ...\}$ و عدد صحیح n_f برای هر $f \in \mathcal{F}$ و یک مجموعه از نمادهای ثابت $\mathcal{C} = \{c_1, c_2, ...\}$ می‌باشد.

همچنین در زبان برای هر نماد رابطه‌ای R یک بازه‌ی بسته‌ی کراندار I_R از اعداد حقیقی و یک پیمانه‌ی پیوستگی یکنواخت $\Delta_R : (0, 1] \to (0, 1]$ و به ازای هر نماد تابعی f یک پیمانه‌ی پیوستگی یکنواخت $\Delta_f : (0, 1] \to (0, 1]$ را اختیار می‌کنیم و یک عدد حقیقی نامنفی D_L را که قطر فضای متریک کامل می‌باشد، در نظر می‌گیریم.

برای سادگی، (بدون از دست دادن کلیت)، $D_L = 1$ و برای هر سمبل رابطه‌ای R ، $I_R = [0, 1]$ اختیار می‌کنیم.

فرض کنید L یک زبان باشد. یک L–ساخت $\mathcal{M}$ ، به وسیله‌ی اطلاعات زیر

مشخص می‌شود:

-یک مجموعه‌ی غیرتهی M که مجموعه زمینه‌ی $\mathcal{M}$ می‌باشد.

-به ازای هر نماد رابطه‌ای $n-$جایی R، یک تابع پیوسته‌ی یکنواخت $R^{\mathcal{M}}$ از M^n به I_R .

-به ازای هر نماد تابعی $n-$جایی $f \in L$، یک تابع پیوسته‌ی یکنواخت $f^{\mathcal{M}}$ از M^n به M.

-به ازای هر نماد ثابت $c \in L$، یک عنصر $c^{\mathcal{M}}$ از M .

اگر (M,d) یک فضای متریک کامل کراندار باشد، (با قطر حداکثر D_L) چنین ساختاری یک ساختار متریک نامیده می‌شود. که به صورت زیر نمایش می‌دهیم:

$$\mathcal{M} = (M, R_i, f_j, c_k | i \in I, j \in J, k \in K)$$

هر یک از مجموعه‌های اندیس I, J, K می‌توانند تهی باشند، اگر همه‌ی آن‌ها تهی باشند، $\mathcal{M}$ یک فضای متریک کراندار سره می‌باشد.

مثال‌هایی از ساختارهای متریک:

(۱) هر فضای متریک کامل، کراندار (با قطر حداکثر D_L) بدون هیچ ساختار اضافی $(L = \varnothing)$، یک $L-$ساخت متریک است.

(۲) با در نظرگرفتن متریک گسسته، هر ساختار در منطق مرتبه اول یک ساختار متریک می‌باشد.

(۳) از هر جبر احتمالی می‌توانیم یک ساختار متریک را به صورت زیر بسازیم:

$$(B, \cup, \cap, c, 0, 1, \mu)$$

$\mu : B \longrightarrow \mathbb{R}^+$

طوری‌که:

$$\mu(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$$

$$x \wedge y = 0 \Longrightarrow \mu(x \vee y) = \mu(x) + \mu(y)$$

آنگاه قرار دهید:

$$d(x, y) = \mu(x \Delta y)$$

اگر $\mu(1) = 1$ ، آن را جبر احتمالی می‌گویند.
$\cup, \cap, c$ را به عنوان نمادهای تابعی زبان و μ نماد رابطه‌ای و عناصر $0, 1$ را عناصر ثابت فضای متریک (M, d) در نظر می‌گیریم، یک ساختار متریک خواهیم داشت.

۲.۱ مفاهیم مدل تئوری در منطق پیوسته

نمادهای تابعی، رابطه‌ای و ثابت‌ها نمادهای غیرمنطقی L می‌باشند و نمادهای منطقی مانند توابع پیوسته $u : [0, 1]^n \longrightarrow [0, 1]$ که نقش هابندها را دارند و همچنین sup و inf که نقش چنداگرها را در منطق دارند.
کاردینال زبان L را که با $cardL$ نشان می‌دهیم، کوچکترین کاردینال نامتناهی ناکمتر از تعداد نمادهای غیرمنطقی L می‌باشد.

ترم‌ها با استقرا ساخته می‌شوند. هر متغیر و هر نماد ثابت یک $L-$ترم می‌باشد.
اگر f یک نماد تابعی $n-$جایی و $t_1, ..., t_n$، $L-$ترم باشند، آنگاه $f(t_1, ..., t_n)$ یک $L-$ترم است.
اگر R یک نماد رابطه‌ای $n-$جایی L و $t_1, ..., t_n$، $L-$ترم باشند، آنگاه $R(t_1, ..., t_n)$ یک فرمول اتمی L است. مانند $d(t_1, t_2)$ که t_1 و t_2، $L-$ترم هستند. نماد منطقی

d مشابه نماد رابطه‌ای دومتغیره رفتار می‌کند به‌طوردقیق مانند نماد تساوی در منطق مرتبه اول.

L–فرمول‌ها، کوچکترین کلاس شامل:

(۱) L– فرمول‌های اتمی.

(۲) اگر $u:[0,1]^n \longrightarrow [0,1]$ پیوسته و $\varphi_1, ..., \varphi_n$، L–فرمول باشند، آنگاه $u(\varphi_1, ..., \varphi_n)$ یک L–فرمول می‌باشد.

(۳) اگر φ یک L–فرمول و x یک متغیر باشد آنگاه $sup_x\varphi$ و $inf_x\varphi$ ، L–فرمول هستند.

یک L–فرمول را بی‌چنداگر نامیم اگر با استقرا از فرمول‌های اتمی بدون به کار بردن sup_x یا inf_x به دست آمده باشد. متغیر x را بسته [۳] می‌نامیم، اگر در دامنه sup_x یا inf_x قرار بگیرد، در غیر این صورت آن را متغیر آزاد گوییم. یک L–جمله، L–فرمولی است که متغیر آزاد نداشته باشد.

یک L–فرمول را به صورت $\varphi(x_1, ..., x_n)$ نمایش می‌دهیم تا تاکید کنیم متغیرهای آزاد آن، بین $x_1, ..., x_n$ هستند.

معنا شناسی:

برای هر $L(M)$–جمله σ، ارزش σ در $\mathcal{M}$ یک عدد حقیقی در بازه $[0,1]$ می باشد و با $\sigma^{\mathcal{M}}$ نمایش می‌دهیم. اکنون معناشناسی منطق پیوسته را با استقرا بر روی فرمول‌ها ارائه می‌کنیم.

(۱) برای هر t_1, t_2 :

$$(d(t_1, t_2))^{\mathcal{M}} = d^{\mathcal{M}}(t_1^{\mathcal{M}}, t_2^{\mathcal{M}})$$

[۳] $bound$

(۲) برای هر نماد رابطه‌ای n–جایی، R از L وهر $t_1, ..., t_n$:

$$(R(t_1, ..., t_n))^{\mathcal{M}} = R^{\mathcal{M}}(t_1^{\mathcal{M}}, ..., t_n^{\mathcal{M}})$$

(۳) برای هر تابع پیوسته $u : [0,1]^n \longrightarrow [0,1]$ و $L(M)$–جمله‌های $\sigma_1, ..., \sigma_n$:

$$(u(\sigma_1, ..., \sigma_n))^{\mathcal{M}} = u(\sigma_1^{\mathcal{M}}, ..., \sigma_n^{\mathcal{M}})$$

(۴) برای هر $L(M)$–فرمول $\varphi(x)$،

$$(\sup_x \varphi(x))^{\mathcal{M}} \equiv sup\{\varphi(a)^{\mathcal{M}} : a\epsilon M\}\epsilon[0,1]$$

(۵) برای هر $L(M)$–فرمول $\varphi(x)$،

$$(\inf_x \varphi(x))^{\mathcal{M}} \equiv inf\{\varphi(a)^{\mathcal{M}} : a\epsilon M\}\epsilon[0,1]$$

تعریف ۱.۲.۱. یک $L(M)$–فرمول $\varphi(x_1, ..., x_n)$ داده شده است. $\varphi^{\mathcal{M}}$ تابعی از M^n به $[0,1]$ می‌باشد که به صورت $\varphi^{\mathcal{M}}(a_1, ..., a_n) = (\varphi(a_1, ..., a_n))^{\mathcal{M}}$ تعریف می‌شود. فرمول‌ها در منطق پیوسته، تابع‌های پیوسته یکنواخت را تعریف می‌کنند.

در بیشتر مواقع، با یک فضای متریک‌نما روبه‌رو هستیم. (M_0, d_0) را فضای متریک‌نما گویند زمانی‌که M_0 یک مجموعه می‌باشد و $d_0 : M_0 \times M_0 \longrightarrow \mathbb{R}$ یک متریک‌نما است یعنی برای هر $x, y, z \in M_0$ ،

$d_0(x,x)=0$

$d_0(x,y)=d_0(y,x)$

$d_0(x,z)\leq d_0(x,y)+d_0(y,z)$

L–ساختارنما:

زبان L را درنظر بگیرید. فرض کنید (M_0,d_0) یک فضای متریک‌نما با قطر D_L باشد. L–ساختارنمای $\mathcal{M}_0$، ساختاری شامل اطلاعات زیر است:

(۱) برای هر نماد رابطه‌ای n–تایی R از L، یک تابع پیوسته‌ی یکنواخت $R^{\mathcal{M}_0}$ از M_0^n به I_R .

(۲) برای هر نماد تابعی n–تایی f از L، یک تابع پیوسته‌ی یکنواخت $f^{\mathcal{M}_0}$ از M_0^n به M_0 .

(۳) برای هر نماد ثابت c از L، یک عضو c^{M_0} از M_0 .

هر ساختارنما را می‌توان به یک ساختار تبدیل کرد.

حال فضای متریک (M,d) را از فضای متریک‌نمای (M_0,d_0) به صورت زیر می‌سازیم.

رابطه هم‌ارزی روی M_0 را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$x\sim y \Longleftrightarrow d_0(x,y)=0$

قرار دهید: $M=M_0/\sim$.

تابع d روی M را به صورت زیر تعریف می‌کنیم که در آن $\pi: M_0\longrightarrow M$ نگاشت خارج‌قسمتی می‌باشد.

$d(\pi(x),\pi(y))=d_0(x,y)$

به وضوح (M,d) یک فضای متریک است (که آن را فضای متریک خارج‌قسمتی تولیدشده به‌وسیله (M_0,d_0) می‌گویند.)