دانشگاه صنعتی خواجه نصیر الدین طوسی
دانشکده علوم - گروه ریاضی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد
ریاضی محض -گرایش جبر

عنوان :

گراف جمعی از یک حلقه جابه‌جایی

استاد راهنما:

دکتر محمد جواد نیک مهر

نگارش:

بهاره بشیری

مهرماه ۹۲

بسم الله الرحمن الرحيم

فرم حق طبع و نشر و مالکیت نتایج

دانشکده علوم پایه
گروه ریاضی

پایان‌نامه
جهت اخذ مدرک کارشناسی ارشد
رشته ریاضی محض گرایش جبر

نام دانشجو:
بهاره بشیری

تحت عنوان :

گراف جمعی از یک حلقه جابه‌جایی

در تاریخ ۱۳۹۲/۷/۲۹ توسط هیأت داوران زیر بررسی و با درجه به تصویب نهایی رسید.

۱- استاد راهنمای پایان‌نامه	دکتر محمد جواد نیک مهر	با مرتبه‌ی علمی دانشیار	امضاء:
۲- استاد داور داخل گروه	دکتر ابراهیم قربانی	با مرتبه‌ی علمی استادیار	امضاء:
۳- استاد داور خارج گروه	دکتر داریوش کیانی	با مرتبه‌ی علمی دانشیار	امضاء:

سپاس گزاری...

به استناد آیه‌ی شریفه ۱۰ از سوره‌ی مبارکه‌ی فاطرکه خداوند می فرماید.

" الله یصعد الکلم الطیب و العمل الصالح یرفعه"

سخنان و کلام ارزشمند به سوی خدا صعود می‌کند و با ابدیت سنخیت پیدا کرده و همواره آثار خود را ظاهر می سازند؛ سزاوار است، از استاد بزرگوارم، جناب آقای دکتر محمد جواد نیک‌مهر که در کمال سعه‌ی صدر، با حسن خلق و فروتنی از هیچ کمکی در این عرصه بر من دریغ ننمودند و زحمت راهنمایی این پایان‌نامه را بر عهده داشتند، کمال تشکر و قدردانی را داشته باشم. همچنین از اساتید گرانقدرم جناب آقای دکتر ابراهیم قربانی و جناب آقای دکتر داریوش کیانی که در سمت ممتحن زحمت مطالعه و داوری این پایان‌نامه را متقبل شدند بی‌نهایت سپاسگزارم و از خانواده و دوستانم که در تمام این مسیر یاور و همراهم بودند، صمیمانه تشکر کنم.

تقدیم به...

تقدیم با بوسه بر دستان پدرم ...

که عالمانه به من آموخت تا چگونه در عرصه زندگی، ایستادگی را تجربه کنم و جسارت خواستنم را مدیون حضور سبز او می دانم...

تقدیم به قلب مهربان زندگی‌ام مادرم...

که نفسهای گرمش حیات جاری در شریان‌های روح من است و گام‌های استوارش همراه همیشگی مسیرهای سخت من است...

و تقدیم به جان‌های آزاد همه ملت‌ها ...

کسانی که رنج می‌برند...

پیکارمی کنند ...

و پیروز می‌شوند...

چکیده

در این پایان‌نامه R حلقه جابه‌جایی و $Z(R)$ مجموعه مقسوم‌علیه صفر و $Reg(R)$ مجموعه عناصر منظم و $\mathrm{Nil(R)}$ ایده‌آل عناصر پوچتوان می‌باشد.گراف جمعی $T(\Gamma(R))$ روی حلقه جابه‌جایی R را طوری در نظر می‌گیریم که رئوس این گراف جمعی، عناصر حلقه R باشند و دو رأس این گراف زمانی با هم مجاور می‌باشند که مجموع آن‌ها یک مقسوم‌علیه صفر باشد. همچنین این گراف جمعی دارای سه زیرگراف القایی $Reg(\Gamma(R))$ و $\mathrm{Nil(\Gamma(R))}$ و $Z(\Gamma(R))$ است که رئوس هر کدام از این زیرگراف ها با هم متفاوت می‌باشند. ازاینرو خواص گراف شامل (قطر، دور، همبند، کامل بودن و...) را روی این گراف‌جمعی و زیرگراف القایی آن بررسی می‌کنیم.

کلمات کلیدی:

حلقه جابه‌جایی، گراف مقسوم‌علیه صفر، عناصر منظم، مقسوم‌علیه‌صفر.

پیشگفتار

بسیاری از وضیعت‌های دنیای واقعی را می‌توان به راحتی به وسیله نموداری متشکل از مجموعه‌ای از نقاط و خطوطی که زوج‌های معینی از این نقاط را به هم وصل می کنند، توصیف کرد. مثلاً نقاط می توانند معرف افراد باشند، خطوط واصل بین زوج‌ها می‌توانند معرف دوستی‌ها باشند و یا نقاط ممکن است مراکز ارتباط‌های بین آنها باشند. در چنین نمودارهایی آنچه بیشتر مورد توجه است آن است که آیا دو نقطه مفروض به وسیله یک خط به هم وصل شده اند یا نه؛ شیوه وصل نقاط به هم مهم نیست. تجرید ریاضیاتی وضیعت‌هایی از این نوع، به پیداش مفهوم گراف منجر شده است. این شاخه ریاضی را به این دلیل گراف می‌نامند که می‌توان این وضیعت‌ها را به صورت گراف (نمودار) نمایش داد، این نمودارها به ما کمک می‌کند تا بسیاری از خواص آنها را درک کنیم. درگراف هر رأس به وسیله نقطه و هریال به وسیله خطی که دو رأس گراف را به هم وصل می‌کند، مشخص می‌شود. نمودار گراف صرفاً رابطه وقوع را بین رأس‌ها ویال‌های آنها به نمایش می‌گذارد. نظریه گراف علاوه بر این که خود شاخه ی مستقل ومهم در ریاضیات است نقش مهمی در موضوعات نظیر مهندسی الکترونیک، تحقیق در عملیات و احتمالات و غیره دارد. پایان‌نامه مذکور مربوط به مقاله‌ای که در سال ۲۰۰۸، اندرسون [۱] و بداوی [۲] باتوجه به اینکه R حلقه جابه‌جایی و یکدار و $Z(R)$ ایده‌آلی از R است یا نه، گراف جمعی را توصیف کردند که وابسته به حلقه است و با نماد $T(\Gamma(R))$ نمایش می‌دهند. $T(\Gamma(R))$ گرافی است که رئوس آن

[۱] Anderson
[۲] Badawi

مجموعه عناصر حلقه و دو رأس این گراف زمانی با هم مجاور می‌باشد که مجموع آن‌ها در مجموعه مقسوم‌علیه‌های صفر قرار بگیرند. برای این گراف سه زیرگراف القایی می‌توان درنظر گرفت که هر کدام از این زیرگراف‌ها رئوس مجزا از هم دارند که ما ویژگی‌های گراف را روی گراف جمعی و سه زیرگراف القایی آن بررسی می‌کنیم.

فصل اول این پایان‌نامه، شامل مطالبی ازتعاریف ومفاهیم حلقه و جبر جابه‌جایی که اقتباس شده از مراجع شارپ و هراشتاین است و دربخش دیگر فصل اول، مفاهیم گراف و انواع آن را که اقتباس شده از کتاب باندی - مورتی که نقش مهمی در اثبات قضایای اصلی این پایان‌نامه دارد.

درفصل دوم و سوم ویژگی‌های گراف را روی گراف جمعی از یک حلقه جابه‌جایی و زیرگرافهای القایی آن را در دو حالتی که $Z(R)$ ایده‌آلی از R است یا نه، مورد بررسی قرار می‌دهیم.

فهرست علائم واختصارات

علائم جبری

R : حلقه جابه‌جایی

$Z(R)$: مجموعه مقسوم‌علیه صفر R

$U(R)$: مجموعه عناصر یکال حلقه R

$Reg(R)$: مجموعه عناصر منظم حلقه R

$\mathrm{Nil(R)}$: مجموعه‌ای از ایده‌آل‌های پوچتوان حلقه R

$Z(R)^*$: مجموعه عناصرمقسوم‌علیه ناصفر R

$(Z(R))$: مجموعه ایده‌آل تولید شده توسط $Z(R)$

$T(R)$: حلقه کامل کسری

$\mathbb{Z}$: اعداد صحیح

$\mathbb{Z}_n$: حلقه رده های مانده‌ای عدد صحیح به پیمانه n

M : مدول

$S^{-1}R$: حلقه کسری

$\prod_{\alpha\in\bigwedge} R_\alpha$: حاصل ضرب حلقه‌های متناهی

$R \times S$: حاصلضرب حلقه‌های R و S

$R = Z[X_1, X_2, \ldots, X_n]$: حلقه چندجمله‌ای روی میدان Z

$charR$: مشخصه حلقه R

علائم مربوط به نظریه گراف

$T(\Gamma(R))$: گراف جمعی از یک حلقه جابه‌جایی

$V(T(\Gamma(R))$: مجموعه رئوس گراف جمعی

$E(T(\Gamma(R))$: مجموعه یال‌های گراف جمعی

$Reg(\Gamma(R))$: زیرگراف القایی منظم از حلقه R

$Z(\Gamma(R))$: زیرگراف القایی مقسوم‌علیه صفراز حلقه R

K^n : گراف کامل

$K^{r,s}$: گراف دوبخشی کامل

$v_0 - v_1 - \cdots - v_n$: مسیر در گراف جمعی

$(a,b) - (c,d) - \cdots - (e,f)$: مسیر درگراف $T(\Gamma(R(+)M)$

$d(u,v)$: فاصله بین رأس u و v

$diam(T(\Gamma(R)))$: قطر گراف جمعی از یک حلقه جابه‌جایی

$diam(Z(\Gamma(R)))$: قطرزیرگراف القایی مقسوم‌علیه صفراز حلقه R

$diam(Reg(\Gamma(R)))$: قطرزیرگراف القایی منظم از حلقه R

$diam(\mathrm{Nil}(\Gamma(\mathrm{R})))$: قطرزیرگراف القایی پوچتوان از حلقه R

$gr(T(\Gamma(R)))$: کمرگراف جمعی از یک حلقه جابه‌جایی

$gr(Z(\Gamma(R)))$: کمرزیرگراف القایی مقسوم‌علیه صفراز حلقهR

$gr(Reg(\Gamma(R)))$: کمر زیرگراف القایی منظم از حلقه R

$gr(\mathrm{Nil}(\Gamma(\mathrm{R})))$: کمرزیرگراف القایی پوچتوان از حلقه R

فهرست مطالب

فصل ۱

مفاهیم مقدماتی

در این فصل تعاریف وقضایای مورد نیاز در فصل‌های بعدی بیان می‌شوند. بعضی قضایا بر حسب نیاز با اثبات و برخی دیگر تنها با ذکر مرجع بیان شده‌اند.

۱.۱ تعاریف ومفاهیم حلقه

تعریف ۱.۱.۱. عضو a از حلقه R مقسوم‌علیه صفر است هرگاه $0 \neq b \in R$ موجود باشد بطوریکه $ab = 0$. مجموعه مقسوم‌علیه صفر حلقه R را با نماد $Z(R)$ و مجموعه مقسوم‌علیه ناصفر R را با نماد $Z(R)^*$ نمایش می‌دهند.

تعریف ۲.۱.۱. فرض کنید R یک حلقه باشد. دراینصورت عنصر $r \in R$ را پوچتوان می‌نامیم هر گاه عدد طبیعی n وجود داشته باشد بطوریکه $r^n = 0$. مجموعه ایده‌آل عناصر پوچتوان حلقه را با نماد $\mathrm{Nil(R)}$ نمایش می‌دهند.

تعریف ۳.۱.۱. فرض کنید R یک حلقه باشد. دراینصورت هر عنصر از حلقه R را که مقسوم‌علیه صفر نباشد عنصر منظم می‌گویند. مجموعه عناصر منظم حلقه R را با نماد زیر نمایش می‌دهند

$$Reg(R) = R \setminus Z(R).$$

تعریف ۴.۱.۱. فرض کنید I یک ایده‌آل از حلقه R باشد. دراینصورت

$$\sqrt{I} = \{r \in R : \exists n \in N, r^n \in I\}.$$

اگر ایده‌آل صفر باشد، آنگاه $\sqrt{(0)}$ را رادیکال پوچ می‌نامند.

تعریف ۵.۱.۱. فرض کنید R یک حلقه و $a \in R$، $Ann_R(a)$ را پوچساز a در R می‌نامند که به صورت زیر تعریف می‌شود

$$Ann_R(a) = \{r|\ r \in R, ra = 0\}.$$

تعریف ۶.۱.۱. کوچکترین عددصحیح ومثبت n که به ازای هر عنصر حلقه مانند x، $nx = 0$ باشد را مشخصه حلقه R نامیده می‌شود. اگر چنین n ی وجود نداشته باشد مشخصه حلقه را صفر تعریف می‌کنیم. مشخصه حلقه R را با $charR$ نمایش می‌دهیم و داریم

$$char\mathbb{Z} = 0\ ,\ char\mathbb{Z}_n = n$$

نکته ۷.۱.۱. مشخصه هر حوزه صحیح، صفر یا عددی اول است.

قضیه ۸.۱.۱. فرض کنید R حلقه یکدار باشد. در اینصورت عناصرخودتوان حلقه، ۱ و مقسوم‌علیه‌های صفر هستند. درحالت خاص اگر R حوزه صحیح باشد، آنگاه ۰ و ۱ عناصرخودتوان R می‌باشند.

برهان. فرض کنید عنصر a در حلقه R یک عنصر خودتوان باشد. دراینصورت

$$a^2 = a \Rightarrow a^2 - a = 0 \Rightarrow a(a-1) = 0.$$

از اینرو $a = 1$ یا a مقسوم‌علیه صفر است. همچنین اگر R حوزه صحیح باشد، آنگاه R مقسوم‌علیه صفر غیر بدیهی ندارد. بنابراین باتوجه به عبارت بالا $a = 0$ یا $a = 1$. □

تعریف ۹.۱.۱. فرض کنید I و J دو ایده‌آل R باشند. دراینصورت دو ایده‌آل نسبت به هم اولند اگر $I + J = R$ باشد.

قضیه ۱۰.۱.۱. (قضیه باقیمانده چینی): فرض کنید R یک حلقه یکدار و $I_۱$ ، ... ، I_n ایده‌آل‌های R باشند، بطوریکه به ازای هر $i \neq j$ ، $I_i + I_j = R$. دراینصورت به ازای عناصر داده شده و $x_۱$ ، ... ، x_n در R، عنصر $x \in R$ وجود دارد بطوریکه برای هر i ، $x - x_i \in I_i$.

برهان. اگر $n = ۲$، آنگاه $I_۱ + I_۲ = R$. پس نتیجه می‌گیریم که $a_۱ \in I_۱$ و $a_۲ \in I_۲$ وجود دارند بطوریکه $a_۱ + a_۲ = ۱$. حال اگر قرار دهیم $x = a_۱x_۲ + a_۲x_۱$ ، آنگاه به سادگی دیده می‌شود که $x - x_۱ \in I_۱$ و $x - x_۲ \in I_۲$.

اکنون برای هر $i \geq ۲$ عناصر $a_i \in I_i$ و $b_i \in I_i$ وجود دارند بطوریکه $a_i + b_i = ۱$. پس

$$۱ = (a_۲ + b_۲)(a_۳ + b_۳) \dots (a_n + b_n) \in I_۱ + \prod_{i=۲}^{n} I_i$$

در نتیجه $R = I_۱ + \prod_{i=۲}^{n} I_i$. بنابراین برای هر $y_۲ \in I_۱$ و $y_۱ \in \prod_{i=۲}^{n} I_i$ ، $y_۲ + y_۱ = ۱$.

حال فرض کنید $i \neq j$ ، در نتیجه بنا به حالت $n = ۲$ ، عناصر $y_j \in I_i$ و $y_j - ۱ \in I_j$ وجود دارند بطوریکه $I_i + I_j = R$. پس با انتخاب عنصر x به صورت $x = x_۱y_۱ + \cdots + x_ny_n$ برهان را تمام می‌کنیم. $\square$

قضیه ۱۱.۱.۱. فرض کنید R یک حلقه یکدار باشد و $I_۱$ ، ... ، I_n ایده‌آل‌های R باشد، بطوریکه به ازای هر $i \neq j$ داریم $I_i + I_j = R$. دراینصورت

$$\frac{R}{\bigcap_{i=۱}^{n} I_i} \cong \frac{R}{I_۱} \times \cdots \times \frac{R}{I_n}.$$

برهان. نگاشت f را با ضابطه زیر درنظر می‌گیریم

$$f : R \longrightarrow \frac{R}{I_۱} \times \cdots \times \frac{R}{I_n}$$

$$f(r) = (r + I_۱, \ldots, r + I_n) \; \forall r \in R$$

به سادگی می‌توان نتیجه گرفت که f یک همریختی حلقه‌هاست. هسته f به صورت زیر است:

$$r \in kerf \Longrightarrow f(r) = (I_۱, \ldots, I_n) \Longleftrightarrow \forall i = ۱, \ldots, n, r \in I_i$$

بنابراین $kerf = \bigcap_{i=۱}^{n} I_i$. با توجه به قضیه باقیمانده چینی می‌توان برای هر $r_i \in R$ که $۱ \leq i \leq n$، $r \in R$ را یافت بطوریکه $r - r_i \in I$ در نتیجه:

$$f(r) = (r + I_۱, \ldots, r + I_n) = (r_۱ + I_۱, \ldots, r_n + I_n)$$

پس f پوشاست و باتوجه به قضیه اول یکریختی حلقه‌ها برهان کامل است. $\square$

تعریف ۱.۱.۱۲. فرض کنید R و S دو حلقه جابه‌جایی باشند. دراینصورت عناصر حلقه $R \times S$ به صورت $R \times S = \{(a, b) | \; a \in R, b \in S\}$ نمایش می‌دهند که با اعمال زیر دارای ساختار حلقه می‌باشد

۱. $(r, m) + (s, m) = (r + s, m + n)$.

۲. $(r, m)(s, n) = (rs, mn)$.

گراف جمعی وابسته به حلقه $R \times S$ را با نماد $T(\Gamma(R \times S))$ و عناصر منظم حلقه را با نماد $Reg(R \times S)$ نمایش می‌دهند و داریم

$$Reg(R \times S) = Reg(R) \times Reg(S).$$

لم ۱۳.۱.۱. فرض کنید S زیر مجموعه ضربی بسته ازحلقه جابه‌جایی R باشد، به ازای (a, s) و (b, t) درحلقه $R \times S$ رابطه $\sim$ روی $R \times S$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$(a, s) \sim (b, t) \Longleftrightarrow \exists u \in S : u(ta - sb) = ۰$$

در این صورت $\sim$ رابطه هم ارزی روی $R \times S$ است.

تعریف ۱٤.۱.۱. فرض کنید S زیر مجموعه ضربی بسته از حلقه جابه‌جایی R باشد. دراینصورت $(a, s) \in R \times S$ رده هم ارزی شامل (a, s) را با $\frac{a}{s}$ ومجموعه رده های هم ارزی $\sim$ را با $S^{-۱}R$ نمایش می‌دهیم. در این صورت $S^{-۱}R$ تحت عملهای

$$\frac{a}{s}\frac{b}{t} = \frac{ab}{st} \; , \; \frac{a}{s} + \frac{b}{t} = \frac{ta + sb}{st}$$

که به ازای a و b های متعلق به R و t و s های متعلق به S ، حلقه جابه‌جایی است. این حلقه جدید $S^{-۱}R$ حلقه کسرهای R نسبت به S نامیده می‌شود. عضو صفر آن را با $\frac{۰}{۱}$ و همانی ضربی آن را با $\frac{۱}{۱}$ نمایش می‌دهند.

نکته ۱٥.۱.۱. در حلقه $S^{-۱}R$ به ازای هر $a \in R$ و $s \in S$ ، $\frac{a}{s} = ۰_{S^{-۱}R}$ اگروتنها اگر $t \in S$ وجود داشته باشد که $ta = ۰$.

قضیه ۱٦.۱.۱. فرض کنید R یک حلقه و P یک ایده‌آل اول از R و $S = R - P$ ، هر عنصر $\frac{a}{s} \in S^{-۱}R$ یکال است اگروتنها اگر $a \in S$. از اینرو مجموعه نایکال‌های از حلقه $S^{-۱}R$ به