دانشگاه پیام نور
پایان نامه
برای دریافت درجه کارشناسی ارشد
دررشته ریاضی

دانشکده علوم پایه

گروه علمی ریاضی

عنوان پایان نامه:

مشخصات طیف انتقال های وزن دار ابر نرمال

استاد راهنما:
دکتر کریم هدایتیان

استاد مشاور:
دکتر فریبا ارشاد

نگارش:
مجتبی اکبری

ماه و سال
شهریور ۱۳۸۸

بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه پیام نور
پایان نامه
برای دریافت درجه کارشناسی ارشد
در رشته ریاضی

دانشکده علوم پایه

گروه علمی ریاضی

عنوان پایان نامه:
مشخصات طیف انتقال های وزن دار ابر نرمال

استاد راهنما:
دکتر کریم هدایتیان

استاد مشاور:
دکتر فریبا ارشاد

نگارش:
مجتبی اکبری

ماه و سال
شهریور ۱۳۸۸

دانشگاه پیام نور

بسمه تعالی

تصویب پایان نامه /رساله

پایان نامه تحت عنوان : **مشخصات طیف انتقال های وزن دار ابر نرمال**

که توسط **مجتبی اکبری** در مرکز شیراز تهیه و به هیأت داوران ارائه گردیده است مورد تأیید می باشد.

تاریخ دفاع: ۱۳۸۸/۶/۲۹ **نمره: ۱۷/۷۵** **درجه ارزشیابی : خوب**

اعضای هیأت داوران:

نام و نام خانوادگی	هیأت داوران	مرتبه علمی	امضاء
۱- دکتر کریم هدایتیان	استاد راهنما	دانشیار	
۲- دکتر فریبا ارشاد	استاد مشاور	استادیار	
۳- دکتر بهمن یوسفی	استاد داور	استاد	
۴- دکتر حسین توللی	نماینده تحصیلات تکمیلی	دانشیار	

با ادای احترام و سپاس

تقدیم می کنم به روح بزرگ مادرم

که تلاش و زحماتش پشتوانه اصلی من در این راه بوده است

و همه دانش آموختگان و دانشجویان طالب علم و تحصیل.

« به امید ایرانی پویا»

سپاس:

بار دیگر به حمد و ستایش خداوندی می پردازیم که در گوشه قناعت، فراغتم داد تا مرحله ای از مراحل تحصیل علم را به پایان ببرم.

بر خود لازم می دانم که از همه اساتید ارزشمند که در این راه مرا از دانش خویش بهـره منـد ساختند تشکر و قدردانی نمایم.

و نهایت سپاسگزاری و تقدیر خود ر ا از جناب آقای دکتر هدایتیان و سرکار خانم دکتر ارشـاد که از آغاز تا پایان تحقیق با راهنمایی های خالصانه خویش یاری ام نمودند ابراز نمایم.

در پایان از خانواده عزیزم که همواره مشوق و همراه مـن بودنـد مراتـب قـدردانی و سـپاس خود را به عمل می آورم.

چکیده فارسی

فرض کنید H یک فضای هیلبرت مختلط جدایی‌پذیر با پایه متعامد یکه $\{e_n\}_n$ باشد و $B(H)$ مجموعه عملگرهای کراندار روی H باشد.

اگر $S \in B(H)$ و دنباله ای از اعداد مختلط مانند $\{\alpha_n\}_n$ وجود داشته باشد بطوریکه $Se_n = \alpha_n e_{n+1}$ آنگاه می گوییم S یک عملگر انتقال وزن دار با دنباله وزنی α_n است.

وقتی که $n \geq 1$ ، عملگر S را انتقال وزن دار یکطرفه و هر گاه $n \in Z$ عملگر Sرا انتقال وزن دار دو طرفه می گوییم.

این پایان نامه شامل چهار فصل می باشد که در فصل اول مقدمه ای بر فضاهای نرم دار خطی و عملگرها روی فضای هیلبرت H آورده شده است.

در فصل دوم طیف عملگرها ، طیف الحاقی عملگر و قضیه ی نگاشت طیفی را به طور کامل بررسی کرده ایم.

در فصل سوم طیف عملگرهای متشابه و همچنین طیف ترکیب عملگرها را در دو بخش جداگانه مورد بررسی قرار داده ایم.

در پایان این تحقیق که فصل چهارم می باشد مشخصات طیف انتقال های وزن دار ابرنرمال یک طرفه و دوطرفه در دو بخش جداگانه به طور کامل شرح داده شده است که شامل تمام قسمت های مختلف طیفی عملگر و الحاقی آن می باشد.

فهرست مطالب

عنوان **صفحه**

فصل اول

این فصل شامل دو بخش است در بخش اول به بررسی فضاهای نرم‌دار خطی و تعریف عملگرها روی این فضاها می‌پردازیم در بخش دوم سعی شده است برخی تعاریف و قضایای مهم در مورد عملگرها روی فضای هیلبرت آورده شود.

۱-۱- فضاهای نرم‌دار خطی

۱-۱-۱- تعریف:

فضای برداری مختلط X را یک فضای خطی نرم‌دار می‌نامیم اگر به هر $x \in X$ یک عدد حقیقی نامنفی مانند $\|x\|$ به نام نرم x چنان مربوط شده باشد که

(i) به ازای هر y,x در X ، $\|x+y\| \leq \|x\|+\|y\|$

(ii) اگر $\alpha, x \in X$ اسکالر باشد $\|\alpha x\|=|\alpha|\,\|x\|$

(iii) $\|x\|=0$ تساوی $x=0$ را نتیجه دهد.

۱-۱-۲- تعریف: فضای نرم‌دار X را یک فضای باناخ گویند هرگاه با متر تعریف شده بوسیله نرمش یک فضای تام باشد.

۱-۱-۳- فرض کنید Y,X فضاهای خطی باشند یک نگاشت T از X به Y یک عملگر خطی یا بطور خلاصه یک عملگر است اگر و فقط اگر برای هر $x_1,x_2 \in X$ و هر α_2,α_1 از اعداد مختلط داشته باشیم.

$$T(\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2)=\alpha_1 T(x_1)+\alpha_2 T(x_2)$$

۱-۱-۴: مجموعه تمام عملگرهای خطی پیوسته از X به Y را با نماد $B(X,Y)$ نمایش می‌دهیم و اگر $Y=X$، نماد $B(X)$ به جای $B(X,Y)$ بکار می‌بریم.

۱-۱-۵: فرض کنید Y,X فضاهای نرم‌دار باشند برای عملگر خطی T از X به Y تعریف می‌کنیم.

$$\|T\| = \sup\{\|T(x)\| : \|x\| \leq ۱\}$$

به راحتی می‌توان نشان داد $\|T\|$ یک نرم روی $B(X,Y)$ است و داریم؛

$$\text{(i)}\ \|T\| = \sup\{\frac{\|T(x)\|}{\|x\|} : \|x\| \neq ۰\}$$

$$\text{(ii)}\ \|T\| = \sup\{\|T(x)\| : \|x\| = 1\}$$

$$\text{(iii)}\ \|T\| = \inf\{c > ۰ : \|T(x)\| \leq c\|x\|\}$$

در این حالت عملگر خطی T کران‌دار است اگر و تنها اگر

$$\|T\| < \infty$$

۱-۱-۶-لم: اگر Y,X دو فضای نرم‌دار باشند و $T : X \to Y$ یک عملگر خطی باشد آنگاه گزاره‌های زیر معادل‌اند

الف) $T \in B(X,Y)$

ب) T در صفر پیوسته است.

ج) T در برخی نقاط پیوسته است.

د) عدد مثبتی مانند c وجود دارد بطوری که برای هر $x \in X$

$$\|Tx\| \leq c\|x\|$$.[2]

۱-۱-۷- تعریف:

فضای برداری H را یک فضای ضرب داخلی گوییم اگر نگاشت $\varphi : H \times H \to C$ طوری باشد که برای هر $\alpha, \beta \in \mathbf{C}$ و هر $x,y,z \in H$

۱) $\varphi(\alpha x + \beta y, z) = \alpha\varphi(x,z) + \beta\varphi(y,z)$

۲) $\varphi(x,y)=\overline{\varphi(y,x)}$

۳) $\varphi(x,x)\geq ۰$

۴) $\varphi(x,x)=۰$ اگر و تنها اگر $x=۰$

نگاشت φ را ضرب داخلی گوییم.

از این به بعد در این پایان نامه منظور از (x,y) ضرب داخلی y,x می باشد.

حال قرار می‌دهیم $\|x\|^{۲}=(x,x)$ به راحتی می‌توان نشان داد که $\|.\|$ تمام ویژگی‌های نرم را دارد که به آن نرم القاء شده توسط ضرب داخلی می‌گوییم.

۱-۱-۸- قضیه (نامساوی شوارتز): اگر H یک فضای ضرب داخلی و $x,y\in H$ آنگاه؛

$$|(x,y)|\leq\|x\|\,\|y\|$$

اثبات: نخست فرض کنید که y,x وابسته خطی باشند مثلاً $x=\lambda y$ که در آن $\lambda\in C$ در این صورت دو طرف رابطه با $|\lambda|\,\|y\|^{۲}$ مساوی بوده و در نتیجه تساوی برقرار است.

اکنون فرض کنید که y,x مستقل خطی هستند باید ثابت کنیم که رابطه فوق با نامساوی اکید برقرار است. به ازای هر λ متعلق به C، $x+\lambda y\neq ۰$ و در نتیجه:

$$۰<(x+\lambda y,x+\lambda y)=$$

$$(x,x+\lambda y)+(\lambda y,x+\lambda y)=$$

$$(x,x)+(x,\lambda y)+(\lambda y,x)+(\lambda y,\lambda y)=$$

$$\|x\|^{۲}+\overline{\lambda}(x,y)+\lambda\overline{(x,y)}+|\lambda|^{۲}\|y\|^{۲}=$$

$$=\|x\|^{۲}+۲\operatorname{Re}\{\overline{\lambda}(x,y)\}+|\lambda|^{۲}\,\|y\|^{۲}$$

عدد مختلط u با قدر مطلق یک را به گونه‌ای اختیار کنید که

$$\overline{u}(x,y)=|(x,y)|$$

با قرار دادن $\lambda=tu$ نتیجه می شود که به ازای هر t متعلق به R

$$0 < \|x\|^2 + 2|(x,y)|t + \|y\|^2 t^2$$

و این فقط وقتی می‌تواند بر قرار باشد که مربع حقیقی سمت راست، دارای مبین منفی باشد؛ یعنی

$$4|(x,y)|^2 - 4\|x\|^2\|y\|^2 < 0$$

که نتیجه‌ی مورد نظر را بدست می‌دهد لذا

$$|(x,y)| \leq \|x\| \; \|y\| \qquad \square$$

۱-۱-۹- قضیه: به ازای هر y,x در فضای ضرب داخلی H،

$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

اثبات: از رابطه زیر داریم:

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\operatorname{Re}(x,y)$$

$$\leq \|x\|^2 + 2|(x,y)| + \|y\|^2$$

$$\leq \|x\|^2 + 2\|x\| \; \|y\| + \|y\|^2$$

$$= (\|x\| + \|y\|)^2$$

پس نامساوی برقرار است. □

۱-۱-۱۰- تعریف: یک فضای ضرب داخلی که با نرم القا شده توسط ضرب داخلی یک فضای باناخ باشد، فضای هیلبرت نامیده می‌شود.

۱-۱-۱۱- تعریف: فضای هیلبرت H را جدایی پذیر گویند هر گاه وجود داشته باشد $E \subseteq H$ بطوری که $E, \overline{E} = H$ حداکثر شمارا باشد.

به عبارت دیگر هر مجموعه بازی در H ، E را قطع کند.

۱-۱-۱۲: تعریف: بردارهای y,x در فضای ضرب داخلی V، متعامد هستند اگر $(x,y)=0$ این ویژگی را با $x\perp y$ نشان می دهیم.

خانواده $(e_\alpha)_{\alpha\in A}$ در $V\setminus\{0\}$ یک دستگاه متعامد نامیده می‌شود، اگر به ازای هر $e_\alpha\perp e_\beta,\alpha\neq\beta$ اگر افزون بر این به ازای هر α متعلق به A، $\|e_\alpha\|=1$ خانواده‌ی $(e_\alpha)_{\alpha\in A}$ را یک دستگاه متعامدیکه می‌نامند. منظور از یک پایه برای فضای هیلبرت H یک مجموعه ی متعامد یکه است که ماکزیمال نیز می باشد.

۱-۱-۱۳- تعریف: مکمل متعامد زیر مجموعه‌ی E در فضای هیلبرت H، مجموعه‌ی زیر است

$\{x\in H:(x,y)=0$ و $y\in E$ به ازای$\}$

این مجموعه را با $E^\perp$ نشان می‌دهند و معمولاً «E پرپ» می‌خوانند.

و به ازای هر مجموعه E در فضای هیلبرت H، $E^\perp$ یک زیر فضای خطی بسته از Eاست.

۱-۱-۱۴- (قضیه فیثاغورس): اگر $f_1,f_2,\dots,f_n$ عضوهایی دو به دو عمود از فضای هیلبرت H باشند آنگاه

$$\|f_1+f_2+\dots+f_n\|^2=\|f_1\|^2+\|f_2\|^2+\dots+\|f_n\|^2$$

اثبات: ابتدا برای $n=2$ ثابت می‌کنیم

$$\|f_1+f_2\|^2=(f_1+f_2,f_1+f_2)=(f_1,f_1)+(f_1+f_2)$$

$$+(f_2,f_1)+(f_2+f_2)=\|f_1\|^2+\|f_2\|^2$$

حال به کمک استقراء مطلب ثابت می‌شود. □

۱-۱-۱۵: قاعده توازی: اگر H یک فضای هیلبرت و $f,g\in H$ باشد

آنگاه

$$\|f+g\|^2+\|f-g\|^2=2(\|f\|^2+\|g\|^2)$$

اثبات

$$\|f+g\|^۲=\|f\|^۲+\|g\|^۲+۲\operatorname{Re}(f,g)$$

$$\|f-g\|^۲=\|f\|^۲+\|g\|^۲-۲\operatorname{Re}(f,g)$$

بنابراین

$$\|f+g\|^2+\|f-g\|^2=2(\|f\|^2+\|g\|^2) \qquad \square$$

۱-۱-۱۶ (قضیه ریس): اگر $L:H\to F$ یک تابعک خطی کران دار باشد آنگاه وجود دارد بردار یکتایی در H مثل $h_۰$ بطوری که برای هر $h\in H$، $L(h)=(h,h_۰)$، بعلاوه $\|L\|=\|h_۰\|$. [۲]

۱-۱-۱۷- قضیه (نامساوی بسل): اگر $\{e_n:n\in N\}$ پایه متعامدیکه باشد و $h\in H$ آنگاه؛

$$\sum_{n=۱}^{\infty}|(h,e_n)|^۲\le\|h\|^۲$$

اثبات: قرار می دهیم

$$h_n = h - \sum_{k=۱}^{n}(h,e_k)e_k$$

آنگاه برای $۱ \le k \le n$

$$h_n \perp e_k$$

لذا طبق قضیه فیثاغورث،

$$\| h \|^2 = \| h_n \|^2 + \| \sum_{k=1}^{n}(h,e_k)e_k \|^2 =$$

$$\| h_n \|^۲ + \sum_{k=۱}^{n} | (h,e_k) |^۲ \ge$$

$$\sum_{k=۱}^{n} | (h,e_k) |^۲$$

حال n را به سمت بی نهایت میل می دهیم تا نتیجه بدست آید. □

۱-۱-۱۸- قضیه: اگر ε یک مجموعه متعامد یکه در فضای هیلبرت H باشد آنگاه احکام زیر معادل اند.

(۱) ε یک پایه برای H است.

(۲) اگر $h \in H$ و $h \perp \varepsilon$ آنگاه $h = ۰$

(۳) $V\varepsilon = H$

(۴) اگر $h \in H$ آنگاه $h = \{(h,e)e : e \in \varepsilon\}$

(۵) اگر $g,h \in H$ آنگاه

$$(g,h) = \sum \{(g,e)(e,h) : e \in \varepsilon\}$$

(۶) اگر $h \in H$ آنگاه

$$\| h \|^۲ = \sum \{ | (h,e) |^۲ : e \in \varepsilon\} \qquad [2]$$

۱-۱-۱۹- قضیه (نگاشت باز): اگر Y,X فضاهای باناخ باشند و $A:X\to Y$ نگاشت خطی پیوسته و پوشا باشد آنگاه $A(G)$ در Y باز است، جایی که G در X باز است. [۲]

۱-۱-۲۰- قضیه (عکس نگاشت باز): اگر Y,X فضاهای باناخ باشند و $A:X\to Y$ عملگر خطی کران دار یک به یک و پوشا باشد، آنگاه A^{-1} کران دار است. [۲]

۱-۲- عملگرها روی فضای هیلبرت

۱-۲-۱- تعریف: اگر K,H دو فضای هیلبرت باشند.

$u:H\times K\to F$ یک صور ت یک و نیم خطی نامیده می‌شود اگر برای h,g از H و k,f در K و $\alpha,\beta\in C$ داشته باشیم.

۱) $$u(\alpha h+\beta g,k)=\alpha u(h,k)+\beta u(g,k)$$

۲) $$u(h,\alpha k+\beta f)=\overline{\alpha}u(h,k)+\overline{\beta}u(h,f)$$

یک صور ت یک و نیم خطی کران‌دار است اگر عددی ثابت مانند M موجود باشد که برای هر $k\in K,h\in H$: $|u(h,k)|\leq M\|h\|\|k\|$ و ثابت M یک کران برای u است.

به عنوان مثال اگر $A\in B(H,K)$ آنگاه تعریف می‌کنیم

$u(h,k)=(Ah,k)$ می‌توان نشان داد که u یک صور ت یک و نیم خطی کران‌دار است، همچنین اگر $B\in B(K,H)$

$$u(h,k)=(h,Bk)$$

و u یک صور ت یک و نیم خطی و کران دار است.

۱-۲-۲- قضیه: اگر $u: H\times K \to C$ یک صور ت یک و نیم خطی کران‌دار با کران M باشد آنگاه عملگرهای یکتایی مانند

$B\in B(K,H)$ و $A\in B(H,K)$

موجودند بطوری که

$u(h,k)=(Ah,k)=(h,Bk)$

برای هر

$k\in k$ و $h\in H$

و همچنین $\|A\|,\|B\|\le M$. [۲]

۱-۲-۳- تعریف: اگر $A\in B(H,K)$ ، عملگر یکتای B که در تساوی فوق صدق می‌کند را عملگر الحاقی A گوییم و با نماد $B=A^*$ نمایش می‌دهیم عملگر B را عملگر الحاقی A روی فضای هیلبرت H می‌نامیم.

۱-۲-۴- قضیه: اگر H یک فضای هیلبرت و $\alpha\in C, A,B\in B(H)$ باشند آنگاه داریم.

۱) $(\alpha A+B)^*=\overline{\alpha}A^*+B^*$

۲) $(AB)^*=B^*A^*$

۳) $(A^*)^*=A$

۴) $\|A\|=\|A^*\|=\|AA^*\|^{\frac{۱}{۲}}$

۵) اگر A در $B(H)$ معکوس پذیر باشد و $A^{-۱}$ معکوس A باشد آنگاه A^* نیز معکوس‌پذیر است و داریم $(A^*)^{-۱}=(A^{-۱})^*$. [۲]

۱-۲-۵- قضیه: اگر K,H دو فضای هیلبرت و $T\in B(H,K)$ آنگاه $\|T\|=\|T^*\|$. [۲]

۱-۲-۶- قضیه: اگر $A \in B(H)$ آنگاه $\ker A^* = (ranA)^{\perp}$

اثبات: فرض کنید $Ag \in ranA, h \in \ker A^*$ پس

$$(h, Ag) = (A^*h, g) = \circ$$

در نتیجه $h \perp ranA$ پس $h \in (ranA)^{\perp}$ بنابراین $\ker A^* \subseteq (ranA)^{\perp}$ همچنین اگر $k \in (ranA)^{\perp}$ آنگاه داریم.

$$\| A^*k \|^2 = (A^*k, A^*k) = (AA^*k, k) = \circ$$

و لذا

$$A^*k = \circ$$

بنابراین $K \in \ker A^*$

$$(ranA)^{\perp} \subseteq \ker A^*$$

و لذا تساوی مورد نظر برقرار است. □

۱-۲-۷- تعریف عملگرفشرده: فرض کنید H فضای هیلبرت و $T : H \to H$ عملگر خطی باشد عملگر T فشرده هست اگر T(ball H) دارای بستار فشرده در H باشد. مجموعه ی عملگرهای فشرده از H به H را با $\beta_{\circ}(H, H)$ نمایش می دهیم.

۱-۲-۸- اگر Y, X دو فضای هیلبرت و $A \in B(X, Y)$ آنگاه A فشرده است اگر و تنها اگر A^* فشرده باشد. [۲]

۱-۲-۹- تعریف: اگر $D \subseteq C$ باشد مجموعه D^* را تعریف می‌کنیم.

$$D^* = \{\bar{\lambda} \mid \lambda \in D\}$$