دانشگاه تبریز
دانشکده علوم ریاضی
گروه ریاضی محض

پایان‌نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته
ریاضی محض، گرایش آنالیز ریاضی

عنوان

قاب‌ها و پایه‌های زیرفضاها در فضاهای هیلبرت

اساتید راهنما

دکتر حمید واعظی

دکتر محمد حسن فاروقی

پژوهشگر

امیر شفیعلو

۱۳۸۹

به پاس تعبیر عظیم و انسانی شان از کلمه ایثار و از خودگذشتن

به پاس عاطفه سرشار و گرمای امیدبخش وجودشان که در این سردترین روزگاران بهترین پشتیبان است

به پاس قلب های بزرگشان که فریاد رس است و سرگردانی و ترس در پناهشان به شجاعت می گراید

و به پاس محبت های بی دریغشان که هرگز فروکش نمی کند

این مجموعه را به پدر و مادر عزیزم تقدیم می کنم.

خدایا...

خدایا مرا از همه ی فضائلی که به کار مردم نیاید محروم ساز و به جهالت وحشی معارفِ لطیفی مبتلا مکن که در جذبه احساس های بلند و اوج معراج های ماوراء، برق گرسنگی در عمق چشمی و خط کبود تازیانه را به پشتی، نتوانم دید. اضطراب های بزرگ، غم های ارجمند و حیرت های عظیم را به روحم عطا کن، لذت ها را به بندگان حقیرت بخش و درد های عزیز بر جانم ریز.

خدایا به من توفیق تلاش در شکست، صبر در نومیدی، رفتن بی همراه، جهاد بی سلاح، کار بی پاداش، فداکاری در سکوت، دین بی دنیا، خوبی بی نمود، عظمت بی نام، خدمت بی نان، ایمان بی ریا، گستاخی بی خامی، مناعت بی غرور، عشق بی هوس، تنهایی در انبوه جمعیت و دوست داشتن بی آنکه دوست بداند، روزی کن.

خدایا آتش مقدس شک را آن چنان در من بیافروز تا همه یقین هایی را که در من نقش کرده‌اند، بسوزد و آنگاه از پس توده این خاکستر، لبخند مهراوه بر لبهای صبح یقینی، شسته از هر غبار طلوع کند.

خدایا به من زیستنی عطا کن که در لحظه مرگ بر بی ثمری لحظه ای که برای زیستن گذشته است، حسرت نخورم و مردنی عطا کن که بر بیهودگیش سوگوار نباشم.

خدایا این خردِ خورده بینِ حسابگرِ مصلحت پرست را که بر دو شاهبالِ هجرت از «هست» و «معراج» به باشدم، بند های بسیار می زند را در زیر گام های این کاروان شعله های بی قرار شوق که در من شتابان می گذرد، نابود کن. خدایا در برابر هر آنچه انسان ماندن را به تباهی می کشاند، مرا با نداشتن و نخواستن روئین تن کن.

خدایا این کلام مقدسی را که به روسو الهام کرده ای هرگز از یاد من مبر که :«من دشمن تو و عقاید تو هستم، اما حاضرم جانم را برای آزادی تو و عقاید تو فدا کنم».

آنانی که بیشتر می فهمند بیشتر زجر می کشند و آنانی که کمتر می فهمند بیشتر زجر می‌دهند. خدایا می خواهم از زجر کشان باشم.

سپاس‌گزاری...

سپاس خداوندگار حکیم را که با لطف بی‌کران خود، آدمی را زیور عقل آراست.

در آغاز وظیفه خود می‌دانم از زحمات بی‌دریغ اساتید راهنمای خود، جناب آقای دکتر محمدحسن فاروقی و جناب آقای دکتر حمید واعظی، صمیمانه تشکر و قدردانی کنم که قطعاً بدون راهنمایی‌های ارزنده ایشان، این مجموعه به انجام نمی‌رسید.

از جناب آقای دکتر اصغر رنجبری که داوری این پایان‌نامه را با نهایت دقت و صرف وقت زیاد تقبل کردند، تشکر می‌نمایم.

از جناب آقای دکتر مرتضی رحمانی به خاطر پاسخ‌گویی به سوالات متعدد اینجانب کمال امتنان را دارم.

همچنین لازم می‌دانم از تمامی دوستانی که در طی این دو سال همراه من بودند و با محبت‌های فراوان‌شان دو سال زیبا برای من ساختند، کمال قدردانی را داشته باشم.

در پایان، بوسه می‌زنم بر دستان خداوندگاران مهر و مهربانی، پدر و مادر عزیزم و بعد از خدا، ستایش می‌کنم وجود مقدس‌شان را و تشکر می‌کنم از خانواده عزیزم به پاس عاطفه سرشار و گرمای امیدبخش وجودشان، که در این سردترین روزگاران، بهترین پشتیبان من بودند.

امیر شفیعلو

پاییز ۱۳۸۹

نام خانوادگی: شفیعلو   نام: امیر

قاب‌ها و پایه‌های زیرفضاها در فضاهای هیلبرت

اساتید راهنما: دکتر حمید واعظی و دکتر محمدحسن فاروقی

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد   رشته: ریاضی محض   گرایش: آنالیز ریاضی

دانشگاه: تبریز   دانشکده: علوم ریاضی

تاریخ فارغ‌التحصیلی: پاییز ۱۳۸۹   تعداد صفحه: ۸۷

کلیدواژه‌ها: قاب، قاب زیرفضاها، عملگر قاب، پایه متعامد زیر فضاها، تجزیه اتمی همانی، عملگر تجزیه اتمی

چکیده

در این پایان‌نامه که بر اساس مرجع [۱] تنظیم شده است، نظریه قاب‌های زیرفضاها را برای زیرفضاهای فضای هیلبرت تفکیک‌پذیر توسعه می‌دهیم. نشان خواهیم داد که برای هر قاب پارسوال زیرفضاهای $\{W_i\}_{i\in I}$ در فضای هیلبرت $\mathcal{H}$، یک فضای هیلبرت $\mathcal{K} \supseteq \mathcal{H}$ و یک پایه متعامد یکه $\{N_i\}_{i\in I}$ برای $\mathcal{K}$ که $Wi = P(N_i)$ وجود خواهد داشت که P یک تصویر متعامد از $\mathcal{K}$ به روی $\mathcal{H}$ است. یک تعریف جدید از تجزیه همانی اتمی در فضای هیلبرت ارائه می‌دهیم. در حالت خاص، یک عملگر تجزیه اتمی، برای تجزیه اتمی همانی تعریف می‌کنیم که یک فرمول بازسازی شده بدست می‌دهد.

فهرست مطالب

مقدمه

قاب برای فضای هیلبرت به طور رسمی توسط دافین[۱] و شیفر[۲] [۹] در سال ۱۹۵۲ برای مطالعه برخی از مسائل عمیق در سری‌های فوریه غیرهارمونیک یا به عبارت دیگر دنباله‌هایی که به صورت $\{e^{i\lambda_n x}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ که در آن $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ خانواده ای از اعداد حقیقی یا مختلط هستند، تعریف شد. اساساً دافین و شیفر تعریف مختصری از مفهوم اساسی قاب گابور[۳] برای پردازش سیگنال‌ها ارائه دادند. ولی ظاهراً این کار اساسی، توجه ریاضی‌دانان را جلب نکرد تا اینکه با انتشار مقاله دابیچیز[۴]، گراسمان[۵]و می‌یر[۶][۷] در سال ۱۹۸۶، انقلابی در این زمینه روی داد و نتیجه این کار، انتشار مقالات متعدد و کاربرد فراوان آنها در زمینه‌های مختلف بود. بعدها نظریه عمومی قاب‌ها، توسط کاسازا[۷] و کتینیاک[۸] ارائه شد. در سال‌های اخیر نظریه عمومی قاب‌های زیرفضاها، توسط کاسازا، کتینیاک[۳] و فورنشیر[۹] [۱۰] به عنوان یک تعریف طبیعی نظریه قاب‌ها در فضای هیلبرت معرفی شده است.

در طی سال‌های اخیر نظریه قاب‌ها به سرعت رشد کرده، چرا که کاربردهای جدید توسعه یافته است. برای استفاده از این کاربردهای نوظهور قاب‌ها، روش‌های جدید باید توسعه می‌یافتند. نقطه شروع ساخت قاب‌های **موضعی** و ترکیب آنها با یکدیگر برای بدست آوردن قاب برای کل فضاست. از آنجایی که با استفاده از این ایده ابتدا می‌توانیم قاب‌ها را بسازیم یا همواره قاب‌های معینی را برای فضاهای کوچکتر انتخاب کنیم، یکی از مزایای این ایده، تسهیل ساختار قاب‌ها برای کاربردهای خاص است. گام دوم ساخت قاب برای کل فضا از آن‌هاست. بنابراین ضروری

---

[۱] Duffin
[۲] Schaeffer
[۳] Gabor
[۴] Daubechies
[۵] Grossman
[۶] meyer
[۷] P.G. Casazza
[۸] Kutyniok
[۹] Fornasier

است شرایط را برای این اجزا طوری استنتاج کنیم که یک ساختار موجود باشد که یک قاب برای کل فضا با ویژگی‌های خاص نتیجه دهد. روش‌های گوناگون ترکیب خانواده‌ای از بردارها برای بدست آوردن یک قاب برای کل فضا که در طول سال‌های اخیر انجام شده است، به کار اساسی که دافین و شیفر[۹] انجام داده اند، برمی‌گردد. یک روش، مورد استفاده در موجک[۱۰]، و نیز قاب گابور[۱۱][۷] است که با دنباله‌های غیر قاب شروع می‌شوند و با ترکیب آن‌ها با یکدیگر قاب‌ها برای کل فضا ساخته می‌شوند. روش دیگر، ساختن قاب‌های موضعی و ترکیب متعامد آنها با یکدیگر برای بدست آوردن قاب‌های سراسری است. برای یک مقدمه عالی این روش‌ها به هیل و والنت[۱۲][۱۲] ارجاع می‌کنیم. اخیراً روش دیگری توسط فورنشیر[۱۳][۱۰] معرفی شده است. فورنشیر از زیرفضاهای شبه متعامد برای ساخت قاب‌های موضعی و ترکیب آنها با یکدیگر برای بدست آوردن قاب‌های سراسری استفاده می‌کند.

این پایان‌نامه، از آنجایی‌که قاب‌ها و مخصوصاً قاب زیرفضاها در پردازش سیگنال‌ها، پردازش تصویر، فشرده سازی اطلاعات و نظریه نمونه‌سازی کاربرد فراوان دارند به بررسی قاب‌های زیرفضاها برای فضاهای هیلبرت می‌پردازد.

به منظور حفظ پیوستگی موضوع، این پایان‌نامه در سه فصل تنظیم شده است.

در فصل اول ابتدا به تعاریف مقدماتی آنالیز تابعی می‌پردازیم و در ادامه برخی از ویژگی‌های اساسی قاب‌ها که در فصل‌های بعدی تعمیم یافته است را بیان می‌کنیم.

در فصل دوم قاب‌های زیرفضاها را معرفی کرده و عملگر قاب زیرفضاها را بدست می‌آوریم. می‌توان گفت مفهوم قاب زیرفضاها از دیدگاهی تعمیمی از مفهوم قاب است. برخی از تعاریف و قضایای نظریه قاب‌ها را برای قاب زیرفضاها تعمیم می‌دهیم.

فصل سوم را با تعریف تجزیه ریس آغاز می‌کنیم سپس با معرفی تجزیه همانی در مورد قاب‌ها، برخی از ویژگی‌های تجریه همانی قاب را بدست می‌آوریم و در ادامه با یک تعریف جدید به نام تجزیه اتمی همانی و بدست آوردن عملگر تجزیه اتمی همانی، برخی از ویژگی‌های این تعریف را بررسی می‌کنیم.

[۱۰] wavelet
[۱۱] Gabor
[۱۲] Heil and Walnut
[۱۳] Fornasier

فصل ۱

قاب‌ها در فضاهای هیلبرت

۱.۱ تعاریف مقدماتی

تعریف ۱.۱.۱. منظور از یک نرم روی فضای برداری X تابعی حقیقی مقدار روی Xاست که دارای خواص زیر است:

۱. $\|x\| \geq 0$

۲. $\|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$

۳. $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$

۴. $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (نامساوی مثلثی)

که در اینجا x و y بردارهای دلخواه از X و α یک اسکالر است. فضای بردای X یک فضای نرمدار نامیده می‌شود، اگر نرمی روی آن وجود داشته باشد.

تعریف ۲.۱.۱. فضاهای c_0، ℓ^p و ℓ^∞ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

الف) $c_0 = \{x = \{x_n\} : \lim_{n\to\infty} x_n = 0\}$ که نرم روی آن به این صورت تعریف شده است:

$$\|x\| = \sup_{n \geq 1} |x_n|$$

ب) $\ell^p = \{x = \{x_n\} : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty\}$ که نرم روی آن به این صورت تعریف شده است:

$$\|x\| = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty.$$

ج) $\ell^\infty = \{x = \{x_n\} : \exists M_x > 0, \sup_{n\geq 1} |x_n| < M_x\}$ که نرم روی آن به این صورت تعریف شده است:

$$\|x\| = \sup_{n\geq 1} |x_n|.$$

تعریف ۳.۱.۱. هر فضای نرمدار کامل را فضای باناخ[1] می‌نامیم.

تعریف ۴.۱.۱. یک یکریختی، یک نگاشت دوسویی از فضای برداری X به فضای برداری Y است که حافظ دو عمل جبری جمع و ضرب اسکالر است. به عبارت دیگر برای هر $x, y \in X$ و اسکالر α داریم:

$$T(x+y) = Tx + Ty, \quad T(\alpha x) = \alpha Tx.$$

اگر X با یک زیر فضای Y یکریخت باشد، گوییم X در Y نشانده شده است.

تعریف ۵.۱.۱. فرض کنید X و Y فضاهای نرمدار باشند. نگاشت خطی $T : X \to Y$ را طولپایی نامند هر گاه:

$$\|Tx\|_Y = \|x\|_X, \quad \forall x \in X.$$

تعریف ۶.۱.۱. فضای برداری مختلط X یک فضای ضرب داخلی نامیده می‌شود اگر نگاشتی از $X \times X$ به میدان $\mathbb{C}$ موجود باشد که برای هر زوج مرتب از بردارهای x و y، عدد مختلط $\langle x, y\rangle$ را متناظر کند به طوری که دارای خواص زیر باشد:

۱. $\langle y, x\rangle = \overline{\langle x, y\rangle}$ (که $\overline{\langle x, y\rangle}$ مزدوج $\langle x, y\rangle$ است.)

۲. $\langle x+y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$.

---
[1] Banach

۳. برای هر $\alpha \in \mathbb{C}$، $\langle \alpha x, y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle$.

۴. برای هر $x \in X$، $\langle x, x\rangle \geq 0$.

۵. $\langle x, x\rangle = 0 \Longleftrightarrow x = 0$.

اگر $\langle x, y\rangle = 0$، گوییم x و y عمودند و با نماد $x \perp y$ نشان می‌دهیم. اگر $E, F \subset X$ باشند، $E \perp F$ بدین معنی است که برای هر $x \in E$ و $y \in F$، $x \perp y$. همچنین

$$E^{\perp} = \{y \in X : \ y \perp x, \forall x \in E\}.$$

هر فضای ضرب داخلی با نرم زیر تبدیل به فضای نرمدار می‌شود:

$$\|x\| = \langle x, x\rangle^{1/2}.$$

تعریف ۷.۱.۱. هر فضای ضرب داخلی که با نرم فوق کامل باشد را فضای هیلبرت می‌نامیم و با $\mathcal{H}$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۸.۱.۱. فضای توپولوژیکی X را تفکیک‌پذیر (جدایی‌پذیر) نامیم، هر گاه دارای زیر مجموعه چگال و شمارش‌پذیر باشد.

قضیه ۹.۱.۱. *اگر $x, y \in X$ که در آن X یک فضای ضرب داخلی است، آنگاه:*

۱. $|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|$.

۲. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

۳. *برای هر $\lambda \in \mathbb{C}$ داریم:*

$$\|y\| \leq \|\lambda x + y\| \Longleftrightarrow x \perp y.$$

برهان. رجوع شود به مرجع [۱۵]، قضیه ۱۲.۲. □

تعریف ۱۰.۱.۱. فضای برداری X جمع مستقیم دو زیر فضای Y و Z از X نامیده می‌شود و به صورت

$$X = Y \oplus Z$$

نشان داده می‌شود، اگر

الف) $X \cap Y = \{0\}$.

ب) برای هر $x \in X$، $y \in Y$ و $z \in Z$ وجود داشته باشد به طوری که:

$$x = y + z$$

قضیه ۱۱.۱.۱. *اگر M یک زیر فضای بسته فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ باشد، آنگاه:*

$$\mathcal{H} = M \oplus M^{\perp}.$$

به عبارت دیگر برای هر $x \in \mathcal{H}$، نمایش منحصر بفرد زیر را داریم:

$$x = y + z \quad y \in M, z \in M^{\perp}. \tag{۱.۱}$$

برهان. رجوع شود به مرجع [۱۳]، قضیه ۴-۳.۳. □

لم ۱۲.۱.۱. *اگر M یک زیر فضای بسته فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ باشد، آنگاه:*

$$(M^{\perp})^{\perp} = M.$$

برهان. رجوع شود به مرجع [۱۳]، قضیه ۶-۳.۳. □

تعریف ۱۳.۱.۱. اگر V یک زیر فضای بسته فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ باشد، تصویر متعامد $\mathcal{H}$ روی V عملگر $P : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ است به طوری که:

$$Px = x, \quad x \in V,$$

$$Px = 0, \quad x \in V^{\perp}.$$

تعریف ۱.۱.۱۴. اگر X و Y فضاهای نرمدار باشند و $T : X \to Y$ یک عملگر خطی باشد. عملگر T کراندار خوانده می‌شود، اگر عدد حقیقی $c > 0$ موجود باشد به طوری که برای هر $x \in X$

$$\|Tx\|_Y \leq c\|x\|_X.$$

مجموعه عملگرهای خطی کراندار روی X را با $B(X)$ نمایش می‌دهیم. همچنین نرم عملگر کراندار T به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\|T\| = \sup_{x\in X,\ \|x\|\leq 1} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}.$$

با استفاده از تعریف، نامساوی‌های ساده ولی مهم زیر را داریم:

$$\|T(x)\| \leq \|T\|\|x\|$$

$$\|T^{-1}\|^{-1}\|x\| \leq \|T(x)\|.$$

قضیه ۱.۱.۱۵. (***اصل کرانداری یکنواخت***) *اگر $\{T_n\}$ دنباله‌ای از عملگرهای خطی کراندار $T_n : X \to Y$ از فضای باناخ X به فضای نرمدار Y باشد به طوری که $\{\|T_nx\|\}$ برای هر $x \in X$ کراندار باشد، یعنی:*

$$\|T_nx\| \leq c_x, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

که در آن c_x یک عدد حقیقی است. آنگاه دنباله نرم‌های $\|T_n\|$ کراندار است، بدین معنی که $c > 0$ وجود دارد به طوری‌که:

$$\|T_n\| \leq c, \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

برهان. برای اثبات به مرجع [۱۳]، قضیه ۳-۴.۷ مراجعه شود. □

تعریف ۱.۱.۱۶. فرض کنید $T \in B(\mathcal{H})$. اگر عملگر یکتای $T^* \in B(\mathcal{H})$ وجود داشته باشد به طوری که:

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle, \quad (x, y \in \mathcal{H}).$$

آنگاه T^* را عملگر الحاقی T روی $\mathcal{H}$ می‌نامند.

به راحتی اثبات می‌شود که $T \to T^*$ روی $\mathcal{H}$ دارای خواص زیر است:

۱. $(T+S)^* = T^* + S^*$.

۲. $(\alpha T)^* = \overline{\alpha} T^*$.

۳. $(ST)^* = T^* S^*$.

۴. $T^{**} = T$.

۵. $\|T^*\| = \|T\|$.

۶. $\|T^*T\| = \|T\|^{۲}$.

قضیه ۱.۱.۱۷. *اگر $T \in B(\mathcal{H})$ باشد، آنگاه:*

۱. $\mathcal{N}(T^*) = \mathcal{R}(T)^{\perp}$.

۲. $\mathcal{N}(T) = \mathcal{R}(T^*)^{\perp}$.

برهان. برای اثبات به مرجع [۱۵]، قضیه ۱۲.۱۰ مراجعه شود. □

توجه شود که اگر T نگاشتی از X به Y باشد، آنگاه فضای پوچ و برد T به ترتیب به صورت زیر نمایش داده می‌شوند:

$$\mathcal{N}(T) = \{x \in X : Tx = 0\}$$

$$\mathcal{R}(T) = \{y \in Y : \exists x \in X : Tx = y\}.$$

قضیه ۱.۱.۱۸. *اگر $\mathcal{K}$ و $\mathcal{H}$ فضاهای هیلبرت باشند. فرض کنید $U : \mathcal{K} \to \mathcal{H}$ یک عملگر خطی باشد، آنگاه روابط زیر برقرار است.*

۱. *$\mathcal{R}_U$ در $\mathcal{H}$ بسته است اگر و تنها اگر $\mathcal{R}_{U^*}$ در $\mathcal{K}$ بسته باشد.*

۲. *U پوشاست اگر و تنها اگر ثابت $C > 0$ وجود داشته باشد به طوری که:*

$$\|U^* y\| \geq C\|y\|, \quad \forall y \in \mathcal{H}.$$

برهان. رجوع شود به مرجع [۴]، لم ۱.۶.A. □

تعریف ۱۹.۱.۱. عملگر $T \in B(\mathcal{H})$:

۱. نرمال است اگر $TT^* = T^*T$.

۲. خود الحاق است اگر $T^* = T$.

۳. یکانی است اگر $TT^* = I = T^*T$ باشد که در آن I عملگر همانی روی $\mathcal{H}$ است.

۴. یک تصویر است اگر $T^۲ = T$.

قضیه ۲۰.۱.۱. *هر کدام از چهار ویژگی تصویر $P \in B(\mathcal{H})$ سه ویژگی دیگر را نتیجه می‌دهد:*

۱. P *خود الحاق است.*

۲. P *نرمال است.*

۳. $\mathcal{R}(P) = \mathcal{N}(P)^\perp$.

۴. $\forall x \in \mathcal{H}, \quad \langle Px, x\rangle = \|Px\|^۲$.

برهان. برای اثبات به مرجع [۱۵]، قضیه ۱۲.۱۴ مراجعه شود. □

قضیه ۲۱.۱.۱. *فرض کنید $S, T \in B(\mathcal{H})$ و S خود الحاق باشد. آنگاه $ST = ۰$ اگر و تنها اگر* $\mathcal{R}(T) \perp \mathcal{R}(S)$.

برهان. برای اثبات به مرجع [۱۵]، قضیه ۱۲.۱۵ مراجعه شود. □

قضیه ۲۲.۱.۱. *اگر $T \in B(\mathcal{H})$ نرمال باشد، آنگاه:*

$$\|T\| = \sup\{|\langle Tx, x\rangle| : x \in \mathcal{H}, \|x\| \leq ۱\}.$$

برهان. برای اثبات به مرجع [۱۵]، قضیه ۱۲.۲۵ مراجعه شود. □

قضیه ۲۳.۱.۱. *فرض کنید U_1، U_2 و U_3 عملگرهای خود الحاق باشند. همچنین فرض کنید $U_1 \leq U_2$ و $U_3 \geq 0$ و U_3 تعویض‌پذیر با U_1 و U_2 باشد. آنگاه $U_1U_3 \leq U_2U_3$.*

برهان. رجوع شود به مرجع [۴]، لم A.۶.۵. $\square$

تعریف ۲۴.۱.۱. فرض کنید X و Y فضاهای نرمدار باشند. عملگر $T : X \to Y$، یک عملگر خطی فشرده نامیده می‌شود در صورتی‌که برای هر زیرمجموعه کراندار M از X، تصویر $T(M)$ فشرده نسبی باشد به عبارت دیگر $\overline{T(M)}$ فشرده باشد.

لم ۲۵.۱.۱. *فرض کنید X و Y فضاهای نرمدار باشند آنگاه*

۱. *هر عملگر فشرده خطی $T : X \to Y$ کراندار است.*

۲. *اگر $\dim X = \infty$، عملگر همانی $I : X \to X$ فشرده نیست.*

برهان. رجوع شود به مرجع [۱۳]، لم ۲-۱.۸. $\square$

قضیه ۲۶.۱.۱. *فرض کنید X و Y فضاهای نرمدار و $T : X \to Y$، یک عملگر خطی باشد. آنگاه T فشرده است اگر و تنها اگر برای هر دنباله کراندار $\{x_n\}$ در X، دنباله $T(x_n)$ در Y یک زیر دنباله همگرا داشته باشد.*

برهان. رجوع شود به مرجع [۱۳]، قضیه ۳-۱.۸. $\square$

قضیه ۲۷.۱.۱. *اگر X و Y فضاهای باناخ باشند آنگاه:*

الف) اگر $T \in B(X,Y)$ فشرده و $\mathcal{R}(T)$ بسته باشد، آنگاه $\dim \mathcal{R}(T) < \infty$.

ب) اگر $T \in B(X)$ فشرده و $\lambda \neq 0$، آنگاه $\dim \mathcal{N}(T-\lambda) < \infty$.

ج) اگر $S,T \in B(X)$ و T فشرده باشد، آنگاه ST و TS نیز فشرده‌اند.

برای اثبات به مرجع [۱۵]، قضیه ۱۸ .۴ مراجعه شود.

قضیه ۲۸.۱.۱. *فرض کنید X و Y فضاهای نرمدار و $T : X \to Y$، یک عملگر خطی باشد. آنگاه:*

۱. *اگر T کراندار و $\dim T(X) < \infty$، آنگاه T فشرده است.*

۲. *اگر $\dim X < \infty$، آنگاه T فشرده است.*

برهان. رجوع شود به مرجع [۱۳]، قضیه ۴-۱.۸. □

لم ۲۹.۱.۱. *فرض کنید $U : \mathcal{K} \to \mathcal{H}$ یک عملگر فشرده باشد. آنگاه*

۱. *اگر T فشرده باشد، عملگر الحاقی T^* نیز فشرده است.*

۲. *اگر $\mathcal{K} = \mathcal{H}$ و $\lambda \neq ۰$، آنگاه $U - \lambda I$ دارای برد بسته است. I عملگر همانی روی X است.*

برهان. رجوع شود به مرجع [۴]، لم A.۶.۲. □

قضیه ۳۰.۱.۱. *فرض کنید $T \in B(X,X)$ که در آن X یک فضای باناخ است. اگر $\|T\| < ۱$، آنگاه $(I-T)^{-۱}$ معکوس‌پذیر است که در آن I عملگر همانی است و*

$$(I-T)^{-۱} = \sum_{i=o}^{\infty} T^i = I + T + T^۲ + \cdots .$$

برهان. رجوع شود به مرجع [۱۳]، قضیه ۱-۳.۷. □

اگر $\{f_k\}_{k=۱}^{\infty}$ دنباله‌ای در فضای برداری X و $c_k \in \mathbb{C}$، گوییم سری $\sum_{k=۱}^{\infty} c_k f_k$ به $f \in X$ همگراست هرگاه:

$$\lim_{n\to\infty} \left\| f - \sum_{k=۱}^{n} c_k f_k \right\| = ۰.$$

در این شرایط می‌نویسیم

$$f = \sum_{k=۱}^{\infty} c_k f_k.$$

بسیار مهم است که توجه کنیم همگرایی سری $f = \sum_{k=۱}^{\infty} c_k f_k$ نه تنها به دنباله $\{f_k\}_{k=۱}^{\infty}$ و ضرایب $\{c_k\}_{k=۱}^{\infty}$ وابسته است، بلکه به ترتیب آن‌ها نیز وابسته هست. حتی در ساده‌ترین شرایط اگر

$\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ دنباله‌ای در $\mathbb{R}$ باشد، ممکن است سری $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ همگرا باشد، ولی سری $\sum_{k=1}^{\infty} f_{\sigma(k)}$ برای برخی از جایگشت‌های σ واگرا باشد. این مشاهده به تعریف دوم همگرایی منجر می‌شود. اگر سری $\sum_{k=1}^{\infty} f_{\sigma(k)}$ برای هر جایگشت σ همگرا باشد، گوییم سری $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ همگرای نامشروط است.

تعریف ۳۱.۱.۱. تابعک خطی کراندار f، یک عملگر خطی کراندار است که دامنه‌اش فضای برداری X و برد آن میدان اسکالر $\mathbb{R}$ یا $\mathbb{C}$ است. فضای همه تابعک‌های خطی کراندار روی X را با X^* نشان می‌دهیم و آن را فضای دوگان جبری X می‌نامند.

تعریف ۳۲.۱.۱. یک دنباله $\{x_n\}$ در فضای نرمدار حقیقی یا مختلط X یک دنباله کوشی[۲] ضعیف در X نامیده می‌شود اگر برای هر $f \in X^*$، دنباله $\{f(x_n)\}$ به ترتیب در $\mathbb{R}$ یا $\mathbb{C}$ کوشی باشد.

قضیه ۳۳.۱.۱. *گزاره‌های زیر برای سری $\sum_n x_n$ در یک فضای باناخ معادلند:*

الف) $\sum_n x_n$ کوشی نامشروط ضعیف است.

ب) $C > 0$ وجود دارد به طوری که برای هر $(t_n) \in \ell^\infty$ داریم:

$$\sup_n \left\| \sum_{k=1}^{n} t_n x_n \right\| \leq C \sup_n |t_n|.$$

ج) برای هر $(t_n) \in c_0$، سری $\sum_n t_n x_n$ همگراست.

د) $C > 0$ وجود دارد به طوری که برای هر زیر مجموعه نامتناهی Δ از $\mathbb{N}$ و هر علامت $\pm$ داریم:

$$\| \sum_{n\in\Delta} \pm x_n \| \leq C.$$

برهان. رجوع شود به مرجع [۸]، قضیه ۶. □

قضیه ۳۴.۱.۱. *فرض کنید X یک فضای باناخ باشد. شرط لازم و کافی برای اینکه سری $\sum_n x_n$ با شرط $\sum_n |x^* x_n| < \infty$ برای هر $x^* \in X^*$، همگرای نامشروط باشد، این است که X شامل هیچ نسخه‌ای از c_0 نباشد.*

---
[۲] Cauchy

برهان. رجوع شود به مرجع [۸]، قضیه ۸. □

مفهوم پایه در فضاهای خطی نرمدار در سال ۱۹۲۷ معرفی شد [۱۶]. تمامی پایه‌های به‌کار رفته در سراسر این فصل پایه‌های شودر [۳] هستند.

تعریف ۳۵.۱.۱. دنباله $\{x_i\}_{i\in I}$ از فضای باناخ X یک پایه شودر برای X نامیده می‌شود، اگر برای هر $f\in X$ اسکالرهای منحصربفرد $\{c_i(f)\}_{i\in I}$ موجود باشند به طوری که

$$f=\sum_{i\in I} c_i(f)x_i. \tag{۲.۱}$$

اغلب رابطه (۲.۱) را بسط f در پایه $\{x_i\}_{i\in I}$ می‌نامند. رابطه (۲.۱) فقط به این معنی است که سری $f=\sum_{i\in I} c_i(f)x_i$ با توجه به ترتیب انتخاب شده از عناصر همگراست. اگر سری (۲.۱) برای هر $f\in X$ همگرای نامشروط باشد، گوییم $\{x_i\}_{i\in I}$ یک پایه نامشروط است.

قضیه زیر از باناخ، پایه شودر را توصیف می‌کند.

قضیه ۳۶.۱.۱. *دنباله $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ از عناصر غیر صفر فضای باناخ یک پایه برای X است اگر و تنها اگر*

۱. $\overline{span}\{x_i\}_{i=1}^{\infty}=X$.

۲. *عدد ثابت $k>0$ موجود باشد به طوری که برای هر دنباله از اسکالرهای $\{c_i\}_{i=1}^{\infty}$:*

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} c_ix_i\right\|\leq k\left\|\sum_{i=1}^{m} c_ix_i\right\|, \quad (n\leqslant m).$$

برهان. برای مشاهده اثبات به مرجع [۱۴]، مراجعه شود. □

تعریف ۳۷.۱.۱. دنباله $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ یک سیستم متعامد است اگر

$$\langle e_k,e_j\rangle=\delta_{k,j}=\begin{cases}1 & : \quad k=j,\\ 0 & : \quad k\neq j\end{cases}$$

که در آن $\delta_{k,j}$ دلتای کرونکر نامیده می‌شود. هر سیستم متعامد $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ را که پایه باشد، پایه متعامد یکه گوییم.

[۳] Schauder