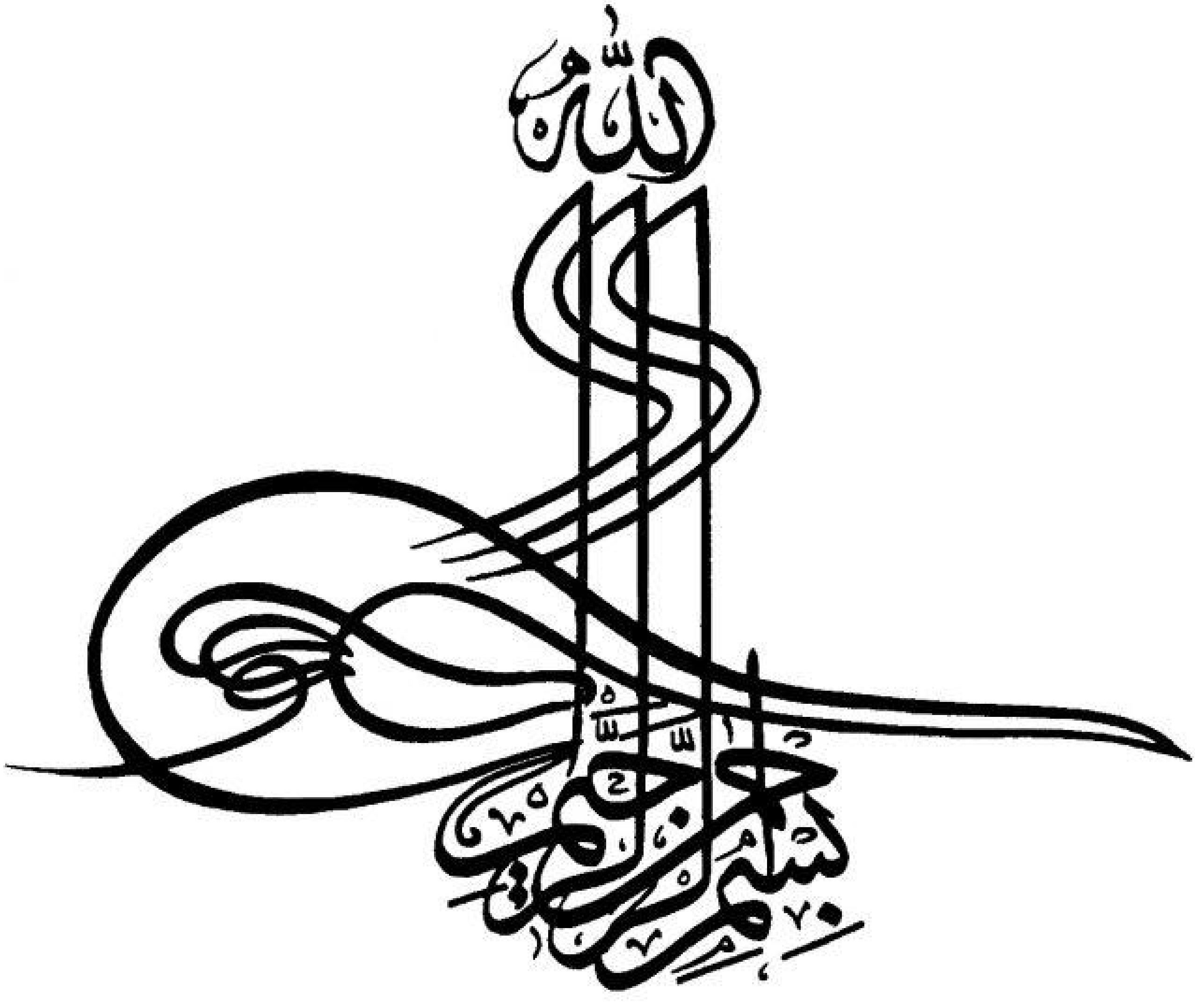
بسم الله الرحمن الرحيم

تعهدنامه‌ی اصالت اثر و رعایت حقوق دانشگاه

تمامی حقوق مادی و معنوی مترتب بر نتایج، ابتکارات، اختراعات و نوآوری‌های ناشی از انجام این پژوهش، متعلق به **دانشگاه محقق اردبیلی** می‌باشد. نقل مطلب از این اثر، با رعایت مقررات مربوطه و با ذکر نام دانشگاه محقق اردبیلی، نام استاد راهنما و دانشجو بلامانع است.

اینجانب سیده سکینه صفرقلی دانش‌آموخته مقطع کارشناسی ارشد رشته‌ی ریاضی کاربردی گرایش آنالیز عددی دانشکده‌ی علوم ریاضی دانشگاه محقق اردبیلی به شماره‌ی دانشجویی ۹۰۲۲۲۸۳۱۰۵ که در تاریخ ۱۳۹۲/۱۱/۰۲ از پایان‌نامه‌ی تحصیلی خود تحت عنوان "روش (RBF) ضمنی بدون شبکه برای معادلات پخش کسری زمانی" دفاع نموده‌ام، متعهد می‌شوم که:

۱) این پایان‌نامه را قبلاً برای دریافت هیچ‌گونه مدرک تحصیلی یا به عنوان هرگونه فعالیت پژوهشی در سایر دانشگاه‌ها و مؤسسات آموزشی و پژوهشی داخل و خارج از کشور ارائه ننموده‌ام.

۲) مسئولیت صحّت و سقم تمامی مندرجات پایان‌نامه‌ی تحصیلی خود را بر عهده می‌گیرم.

۳) این پایان‌نامه، حاصل پژوهش انجام شده توسط اینجانب می‌باشد.

۴) در مواردی که از دستاوردهای علمی و پژوهشی دیگران استفاده نموده‌ام، مطابق ضوابط و مقرّرات مربوطه و با رعایت اصل امانتداری علمی، نام منبع مورد استفاده و سایر مشخصات آن را در متن و فهرست منابع و مآخذ ذکر نموده‌ام.

۵) چنانچه بعد از فراغت از تحصیل، قصد استفاده یا هر گونه بهره‌برداری اعم از نشر کتاب، ثبت اختراع و ... از این پایان‌نامه را داشته باشم، از حوزه‌ی معاونت پژوهشی و فنّاوری دانشگاه محقق اردبیلی، مجوزهای لازم را اخذ نمایم.

۶) در صورت ارائه‌ی مقاله‌ی مستخرج از این پایان‌نامه در همایش‌ها، کنفرانس‌ها، سمینارها، گردهمایی‌ها و انواع مجلات، نام دانشگاه محقق اردبیلی را در کنار نام نویسندگان (دانشجو و اساتید راهنما و مشاور) ذکر نمایم.

۷) چنانچه در هر مقطع زمانی، خلاف موارد فوق ثابت شود، عواقب ناشی از آن (منجمله ابطال مدرک تحصیلی، طرح شکایت توسط دانشگاه و ...) را می‌پذیرم و دانشگاه محقق اردبیلی را مجاز می‌دانم با اینجانب مطابق ضوابط و مقرّرات مربوطه رفتار نماید.

نام و نام خانوادگی دانشجو: سیده سکینه صفرقلی

امضا

تاریخ

دانشکده‌ی علوم ریاضی
گروه ریاضیات و کاربردها

پایان‌نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد
در رشته‌ی ریاضی کاربردی گرایش آنالیز عددی

عنوان:

روش (RBF) ضمنی بدون شبکه برای معادلات پخش کسری زمانی

استاد راهنما:

دکتر عبدالله برهانی فر

استاد مشاور:

دکتر فرهاد ذوالفقارپور

پژوهشگر:

سیده سکینه صفرقلی

بهمن ۹۲

دانشکده‌ی علوم ریاضی
گروه ریاضیات و کاربردها

پایان‌نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد
در رشته‌ی ریاضی کاربردی گرایش آنالیز عددی

عنوان:

روش (RBF) ضمنی بدون شبکه برای معادلات پخش کسری زمانی

پژوهشگر:

سیده سکینه صفرقلی

ارزیابی و تصویب شده‌ی کمیته داوران پایان‌نامه با درجه‌ی خوب

نام و نام خانوادگی	مرتبه‌ی علمی	سمت	امضا
دکتر عبدالله برهانی فر	استاد راهنما و رئیس کمیته داوران	دانشیار	
دکتر فرهاد ذوالفقارپور	استاد مشاور	استادیار	
دکتر محمد ضارب نیا	داور	دانشیار	

بهمن ۹۲

تشکر و قدردانی

تقدیم به فرشتگان مهربانی که :

لحظات ناب باور بودن، لذت وغرور دانستن، جسارت خواستن، عظمت رسیدن
و تمام تجربه های یکتا و زیبای زندگی ام

مدیون حضور سبز آنهاست....

تقدیم به خانواده عزیزم.

سپاس گزاری...

ریاضی یعنی : تدبیر در آفرینش و بنا نهادن آن به وسیله اعداد، و اعداد یعنی: شمارش تعداد اجزای طبیعت تا بینهایت، و بینهایت یعنی: از اول تا آخر، و از اول تا آخر یعنی: رسیدن به خدا، و رسیدن به خدا یعنی : عشق.

و در مجموع، ریاضی مقدمه ای است برای رسیدن به خالق هستی. به نظر ما هم، خداوند یک ریاضی دان است، ریاضیدانی که بر خلاف ما، هر مسئله ای را به آسانی می تواند حل کند و مانند ما انسانها نیاز ندارد از فرمولهای پیچیده استفاده کند، اصلا پایه گذار ریاضی خدای خالق است و ریاضی واسطه ای است تا بتوانیم به قدرت خالق خود پی ببریم، و بدانیم این جهان بر پایه ارقام و اعداد ریاضی بنا شده است...

در آغاز وظیفه خود می‌دانم از زحمات بی‌دریغ استاد راهنمای خود، جناب آقای دکتر عبداله برهانی فر، صمیمانه تشکّر و قدردانی کنم که قطعاً بدون راهنمایی‌های ارزنده ایشان، این مجموعه به انجام نمی‌رسید. از جناب آقای دکتر فرهاد ذوالفقارپور که زحمت مطالعه و مشاوره این رساله را تقبل فرمودند و در آماده سازی این رساله، به نحو احسن اینجانب را مورد راهنمایی قرار دادند، کمال امتنان را دارم.

از جناب آقای دکتر حسین حسین زاده به دلیل یاریها و راهنماییهای بی چشمداشت ایشان که بسیاری از سختیها را برایم آسانتر نمودند.

و در پایان، بوسه می‌زنم بر دستان خداوندگاران مهر و مهربانی، پدر و مادر عزیزم و بعد از خدا، ستایش می‌کنم وجود مقدس‌شان را و تشکّرمی‌کنم به پاس عاطفه سرشار و گرمای امیدبخش وجودشان، که در این سردترین روزگاران، بهترین پشتیبان من بودند.

سیده سکینه صفرقلی
۱۳۹۲

نام خانوادگی: صفرقلی نام: سیده سکینه

عنوان پایان‌نامه: روش (RBF) ضمنی بدون شبکه برای معادلات پخش کسری زمانی

استاد راهنما: دکتر عبداله برهانی فر

استاد مشاور: دکتر فرهاد ذوالفقارپور

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد

رشته: ریاضی کاربردی گرایش: آنالیز عددی

دانشگاه: محقق‌اردبیلی دانشکده: علوم ریاضی

تاریخ دفاع: ۱۳۹۲/۱۱/۰۲ تعداد صفحات: ۸۸

چکیده

این پایان نامه به توسعه و بسط فرآیند بدون شبکه گسسته براساس توابع پایه شعاعی (RBF) برای شبیه سازی عددی معادلات انتشار کسری زمانی تاکید دارد. درونیابی RBF بدون شبکه در ابتدا خلاصه سازی می شود. معادلات گسسته برای معادله انتشار کسری زمان دو بعدی (FDE) با استفاده از معادلات RBF شکل بدون شبکه و فرم های قوی (FDE) زمانی بدست می آید. ثبات و همگرایی این روش بدون شبکه مورد بحث قرار گرفته و به طور تئوری اثبات شده است. مثال های عددی با حوزه های مختلف جهت بررسی دقت و بازده روش بدون شبکه جدیداً توسعه یافته مورد مطالعه قرار گرفته است. همچنین اثبات شده که فرمولاسیون بدون شبکه کنونی برای معادلات دیفرانسیل جزئی بسیار موثر می‌باشد.

کلیدواژه‌ها: توابع پایه شعاعی ، طرح عددی ضمنی ،معادلات پخش کسری، معادلات انتشار کسری، روش بدون شبکه.

فهرست

لیست جداول

لیست تصاویر

مقدمه

از آنجائیکه اکثر علوم از جمله علوم مهندسی، پزشکی، نجوم ، اخترشناسی و .... با مسائلی در تماسند که اغلب به حل یک یا چند معادله دیفرانسیل منجر می‌شوند و اکثر این مسائل فاقد راه حل تحلیلی می‌باشند، از این رو بکارگیری روش های برای حل این قبیل مسائل از جایگاه خاصی برخوردار است. از سوی دیگر در چند دهه اخیر دانشمندان در حین بررسی جریانات آب‌های زیرزمینی، بررسی جریان انتقال حرارت در کوره‌ها، حل شدن گازها در مایعات و ... به معادلات دیفرانسیلی برخوردند که مشتقات ظاهر شده در آن‌ها دارای مراتب غیرصحیح بودند از آن پس اهمیت این موضوع (حساب دیفرانسیل مرتبه غیرصحیح) که برای اولین بار در سال ۱۶۹۵ توسط هوپیتال هوپیتال [۱] مطرح شده بود، دو چندان گشت. امر مهمتری که بعدها مطرح شد بحث یافتن جواب برای این قبیل معادلات بود که منجر به مطالعات زیادی در این زمینه گردید اما اکثر روش‌های ارائه شده یا بسیار پیچیده بودند یا اینکه برای دسته خاصی از مسائل قابلیت پیاده‌سازی داشتند، اما قسمت اعظم این مسائل هم‌چنان لاینحل باقی ماند، به همین دلیل دانشمندان با استفاده از روش‌های عددی به حل این قبیل مسائل مبادرت ورزیدند. از جمله مهمترین، ساده ترین و پرکاربردترین روش های عددی استفاده از توابع پایه شعاعی RBF می باشد. از این روش برای حل عددی دسته کثیری از معادلات دیفرانسیل معمولی و جزئی مرتبه کسری استفاده شده است ، که این به نوبه خود اهمیت و کاربرد فراوان این روش تقریبی را نمایان می سازد. از طرف دیگر همانطور که در فصول آتی نشان خواهیم داد یکی از مزایای مهم این روش تقریبی، سادگی الگوریتم کاربری آن می باشد که همین عامل سبب شده که استفاده و پیاده سازی این الگوریتم را برای حل عددی معادلات دیفرانسیل معمولی و جزئی از مرتبه کسری بسیار ساده و آسان باشد.

در این پایان‌نامه با به کارگیری توابع پایه شعاعی RBF به حل دسته ای از معادلات دیفرانسیل با مشتقات

[۱] L'Hopital (1695)

جزئی مرتبه غیر صحیح (مرتبه کسری) می‌پردازیم.

از طرفی این پایان نامه براساس مطالب ذکر شده در بالا، به صورت زیر تنظیم شده است.

در فصل اول این پایان‌نامه برخی تعاریف و مفاهیم اولیه، مربوط به حساب دیفرانسیل و انتگرال مرتبه کسری را که در فصل های بعد مورد استفاده است را یادآوری می‌کنیم.

در فصل دوم مقدمات و مفاهیم اولیه توابع پایه ای شعاعی را که در فصل های بعد مورد استفاده است را یادآوری می‌کنیم..

در فصل سوم ضمن تشریح کامل روش (RBF) ضمنی بدون شبکه برای معادلات پخش کسری زمانی به بررسی پایداری آن می پردازیم.

در فصل چهار مثال‌های عددی ارائه خواهد شد تا میزان کارایی روش ارائه شده برای حل مساله ونتیجه گیری کلی از روش را ارائه نمایم.

فصل ۱
حساب دیفرانسیل و انتگرال مراتب کسری

۱.۱ مقدمه

حساب دیفرانسیل مراتب غیر صحیح یکی از شاخه‌های آنالیز ریاضی است که به بررسی و تحقیق در مورد خواص و کاربردهای انتگرال و مشتقات مراتب دلخواه می پردازد. این شاخه از علم ریاضی را از جهتی علمی قدیمی و دارای سابقه تاریخی چند صد ساله، و از جهتی دیگر آن را علمی بدیع و جدید نام می نهند. این علم را علمی قدیمی می نامند زیرا که مطالعات اولیه در این زمینه به اواخر قرن ۱۷ باز می گردد. در آن زمان پس از انتشار مقاله ای در زمینه مشتق مراتب صحیح و ارائه کاربردهایی از آن توسط لایبنیز [۱]، هوپیتال [۲] با ارسال نامه ای به لایبنیز، از وی خواستار ارائه تعبیری برای رابطه $\frac{d^{\frac{1}{2}}x}{(dx)^{\frac{1}{2}}}$ گردید که در جواب، لایبنیز اعلام داشت که رابطهٔ اخیر هیچ تعبیری نداشته و عملاً با مفاهیم و تعاریف مشتق مراتب صحیح در تناقض است[۳].

بعدها این علم توسط دانشمندانی نظیر اویلر [۴]، لاپلاس [۵]، فوریه [۶]، آبل [۷]، لیوویل [۸]، ریمان [۹]، هام گرن [۱۰]، گرونوالد [۱۱]، لتنیکوف [۱۲]، لوران [۱۳]، نکراسوف [۱۴]، کروگ [۱۵]، هادامارد [۱۶]، هوی ساید [۱۷]، پینکرل [۱۸]، هاردی [۱۹]

[۱] G. W. Leibniz (1695 - 97)
[۲] L'Hopital (1695)
[۳] A. Loverro, Fractonal Calculus: History, Defenitions and Applications for the Engineer.
[۴] L. Euler(1730)
[۵] P. S. Laplace(1812)
[۶] J. B. J. Fourier(1822)
[۷] N. H. Abel(1823-26)
[۸] J. Liouville(1832-37)
[۹] B. Riemann(1847)
[۱۰] H. Holmgren(1865-67)
[۱۱] A. K. Grunwald(1867-72)
[۱۲] A. V. Letnikov(1868-72)
[۱۳] H. Laurent(1884)
[۱۴] P. A. Nekrassov(1888)
[۱۵] A. Krug(1890)
[۱۶] J. Hadamard(1892)
[۱۷] O. Heaviside(1892-1912)
[۱۸] S. Pincherle(1902)
[۱۹] G.H. Hardy(1917-28)

و لیتل وُد[۱] ، ویل[۲] ، لوی[۳] ، مارکوود [۴] ، دیویس [۵] ، زیگموند[۶] ، لاو[۷] ، اردلی[۸] ، کوبر [۹] ، وایدر[۱۰] ، ریس [۱۱] ، توسعه داده شد.

این علم را می توان به عنوان یک علم بدیع و نو قلمداد کرد، زیرا در چند دههٔ اخیر اولین کنفرانس ها و مقالات کاربردی در این موضوع مطرح گردید.

اولین کنفرانس کاربردی در این زمینه در سال ۱۹۷۴ توسط [۱۲] تحت عنوان

First Conference on Fractional Calcsulus and it's Applications.

در دانشگاه نیوهاون[۱۳] برگزار شد. اولین یادداشتها و نگارشها در این زمینه توسط اُلدهام[۱۴] و اسپَنیر [۱۵] در سال ۱۹۶۸ آغاز گردید که منجر به تألیف کتاب Fractional Calculus در سال ۱۹۷۴ گردید.

امروزه، مقالات و کتب زیادی در این زمینه ارائه و به چاپ رسیده است، از میان تمامی این کتب می توان به اثر سامکو[۱۶]، کیلباس [۱۷] و ماریچف [۱۸] اشاره کرد.

با پیشرفت روز افزون سایر علوم این علم نیز از این مقوله مستثنی نماند و روز به روز دچار پیشرفت و ترقی گردید، متناسب با این پیشرفت‌ها تعاریف گوناگونی برای مشتق و انتگرال مراتب کسری ارائه گردید که از جمله می‌توان به مشتق و انتگرال مرتبه کسری ریمان - ریس، مارچاوُد[۱۹] و اردلی کوبر اشاره کرد. اما از بین کلیه این تعاریف، در ریاضیات محض تعریف ریمان لیوویلی مشتق و انتگرال مراتب کسری از جایگاه ویژه ای برخوردار است. اما از آنجایی که بکار بردن این تعریف برای معادلات دیفرانسیل مراتب کسری

[۱] J. E. Littlewood(1917-28)
[۲] H. Weyl(1917)
[۳] P. Levy(1923)
[۴] A. Marchaud(1927)
[۵] H. T. Davis(1924-36)
[۶] A,Zygmund(1935-45)
[۷] E. R. Love(1938-96)
[۸] A. Erdelyi(1939-65)
[۹] H. Kober(1940)
[۱۰] D. V. Widder(1941)
[۱۱] M. Riesz(1949)
[۱۲] B. Ross
[۱۳] New Haven
[۱۴] K. B. Oldham
[۱۵] J. Spanier
[۱۶] S. G. Samko
[۱۷] A. A. Kilbas
[۱۸] O. I. Marichev
[۱۹] Marchaud

منجر به تولید شرایط اولیه ای خواهد شد که دارای مشتقات مراتب کسری در نقطه آغازین می باشد از این رو در عمل و از دیدگاه فیزیکی از این تعریف مشتق معمولاً در مسائل کاربردی استفاده نمی شود. اما بر خلاف تعریف ریمان لیوویل مشتق مرتبه کسری، در مسائل کاربردی از تعریف کاپوچوئی مشتق مرتبه کسری مرتبه کسری استفاده می شود زیرا به کار بردن این تعریف مشتق برای معادلات دیفرانسیل مرتبه کسری منجر به تولید شرایط اولیه با مشتقات مراتب صحیح در نقطه آغازین خواهد شد که با مفاهیم و دیدگاه فیزیکی مسائل منطبق می باشد. سایر تعاریف مطرح شده اند، با این حال پرکاربردترین تعاریف برای مشتق و انتگرال مراتب کسری همان تعریف ریمان لیوویلی، کاپوچوئی و گرونوالد لتنیکوفی می باشد.

در چند سال اخیر کاربردهای متنوع و جالبی از حساب دیفرانسیل مراتب غیر صحیح ارائه گردید که همزمان با گسترش روش‌های عددی، جایگاه این شاخه از ریاضیات را در سایر علوم مانند علوم مهندسی، علوم فیزیک و مکانیک، علوم پزشکی، علوم کامپیوتر و ... ارتقاء داده است (آونی،۲۰۰۸–دیوید، ۲۰۰۸؛ جک و همکاران، ۲۰۰۰– آلن ۲۰۰۷؛ فادی،۲۰۰۴– هیلفر،۲۰۰۰؛ کیلباس، ۲۰۰۵ – فرانچسکو،۱۹۹۳)

. همزمان با ارائه مقالات کابردی در زمینه معادلات دیفرانسیل مرتبه کسری، در چند سال اخیر نیز روش‌های متنوعی برای حل این دسته از معادلات ارائه شده است. این روشها را می توان در غالب دو دسته روش تقسیم بندی کرد:

۱: روش‌های تحلیلی.

۲: روش‌های عددی.

از جمله روش‌های تحلیلی ارائه شده در زمینه می توان به روش های مستقیم، استفاده از تبدیلات لاپلاس، روش تبدیلات فوریه، روش تجزیه ادومیان[۱] و روش هموتوپی[۲] اشاره کرد (هیلفر، ۲۰۰۰؛ آناتولی و همکاران، ۲۰۰۶؛ ام سی برید، ۱۹۸۵؛ متزلر و همکاران، ۲۰۰۰؛ کند و میلر، ۱۹۹۳؛ مسلم و راوی، ۲۰۰۸؛تروجیلو و همکاران، ۲۰۰۸؛ برترام و فرانکسیس، ۱۹۷۹) . اما در حالت کلی روش های تحلیلی برای حل همه این مسائل، اولاً در حالت کلی موجود نبوده و در ثانی در صورت وجود روش تحلیلی برای دسته خاصی از این

[۱] Adomian Decomposition
[۲] Homotopy Method

مسائل، اغلب با راه حل های طولانی و غالباً پر هزینه ارائه می گردند. بنابراین ارائه روش‌های عددی برای حل این دسته از مسائل از اهمیت ویژه ای برخوردار است.

از جمله روش‌های عددی مرسوم می توان به روش تفاضلات متناهی، روش مقدار مرزی[۱] ، روش مبتنی بر کوادراچر، روش مبتنی بر تقریب مشتق مرتبه کسری بر حسب چند جمله ایها، روش گشتاورها و ... اشاره کرد که از این روش‌ها برای حل عددی

۱: معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبه کسری (سوتریس و همکاران، ۲۰۰۸؛ کای دیتلم، ۱۹۹۷؛ کای دیتلم، ۲۰۰۷؛ کای دیتلم و همکاران، ۱۹۹۸).

۲: دستگاه های معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبه کسری (دمیس، ۱۹۹۸).

۳: معادلات دیفرانسیل معمولی که شامل چندین جمله با مشتقات مراتب کسری می باشند (لوکنات،۲۰۰۳؛ دیتل، ۲۰۰۴؛ دیتل، ۲۰۰۴) .

۴: معادلات انتگرال، از جمله معادله انتگرال تعمیم یافته آبل .(کیلباس و همکاران ۲۰۰۴؛ آنتولی و همکاران، ۲۰۰۶)

۵: معادلات انتگرال دیفرانسیل مرتبه کسری (آگاروال، ۲۰۰۸؛ فادی ۲۰۰۴) .

۶: معادلات دیفرانسیل با مشتق جزئی مرتبه کسری پخش[۲] یک و دو طرفه یک بعدی و دو بعدی (مارک و همکاران،۲۰۰۶؛ مارک و همکاران ۲۰۰۶).

۷: معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی مرتبه کسری وزش [۳] یک بعدی و دو بعدی (مارک و همکاران،۲۰۰۶؛ مارک و همکاران ۲۰۰۶).

۸: معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی مرتبه کسری پخش – وزش یک و دو بعدی (مارک و همکاران،۲۰۰۶؛ مارک و همکاران ۲۰۰۴).

[۱] Boundary Value
[۲] Diffusion
[۳] Dispersion

۹: حل عددی معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی فوکر - پلانک [۱] (متزلر،۱۹۹۹).

۱۰: حل معادله دیفرانسیل مرتبه کسری به روش مقدار مرزی (متزلر و همکاران،۲۰۰۰) .

۱۱: حل تصادفی معادله دیفرانسیل مراتب کسری (مارک و همکاران،۲۰۰۹).

۱۲: معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی شامل مشتقات مرتبه کسری توابع ایری .[۲]

و سایر مسائل کاربردی استفاده شده است.

به طور کلی می توان گفت که مفاهیم و تعاریف مشتق و انتگرال مرتبه کسری تقریباً دارای قدمتی به اندازه مفاهیم و تعاریف کلاسیک مشتق و انتگرال مراتب صحیح می باشد و کلیه تعاریف ارائه شده در این زمینه به صورتی است که تعمیمی از مفاهیم، قضایا و تعاریف ارائه شده در مورد مشتق و انتگرال مراتب صحیح بوده و همان‌طور که در حساب دیفرانسیل کلاسیک (مرتبه صحیح) به بیان یک سری تعاریف و قضایا در مورد مشتق و انتگرا های کلاسیک می پردازیم، بحث عمده در حساب دیفرانسیل مراتب کسری ارائه یک سری تعریف و قضایا برای مشتق و انتگرال غیر کلاسیک می باشد. تا کنون تعاریف متنوع و زیادی از مفاهیم مشتق و انتگرال مراتب کسری ارائه شده که منجر به ایجاد تنوع زیادی در مسائل مرتبط به این زمینه گردیده است که اصولاً ارائه هریک از این تعاریف و مفاهیم بدون آشنایی با مفاهیم و تعاریف توابع خاص که شامل تابع بتا، گاما، تابع میتاگ لفلر و تابع رایت می باشد امری امکان ناپذیر می باشد. از این رو در ادامه به معرفی اجمالی توابع خاص و در نهایت ارائه تعاریف مرسوم تر مشتق و انتگرال مرتبه کسری پرداخته و برخی از خواص مربوط به این تعاریف را مورد بررسی قرار خواهیم داد.

۲.۱ توابع خاص در حساب دیفرانسیل و انتگرال مرتبه کسری

این توابع شامل تابع بتا[۳]،تابع گاما[۴] ، توابع میتاگ لفر[۵] و تابع رایت [۶] می باشند که نقش بسیار مهمی را در ارائه تعاریف مشتق و انتگرال از مرتبه دلخواه در فصول آتی به عهده دارند.

[۱] Fokker- Planck
[۲] Airy Functions
[۳] Beta function
[۴] Gamma function
[۵] Mittag Leffler functions
[۶] Wright function

۱.۲.۱ تابع گاما

تابع گاما یا تابع اویلر [۱] نوع دوم یکی از پرکاربردترین توابع در مقوله حساب دیفرانسیل مرتبه کسری [۲] می‌باشد که تعمیمی از تابع فاکتوریل[۳] را به دست می دهد. در ادامه به تعریف تابع گامای اویلر می پردازیم.

تعریف ۱.۲.۱. برای هر $z \in \mathbb{C}$ تابع گاما یا انتگرال اویلر نوع دوم را که با نماد $\Gamma(z)$ نشان می دهیم، به صورت زیر تعریف می شود

$$\Gamma(z) = \int_{0}^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt, \tag{۱.۱}$$

که در آن $t^{z-1} = e^{(z-1)Lnt}$ و انتگرال اخیر برای کلیه اعداد مختلطی که $Re(z) > 0$ همگراست.

با استفاده از روش انتگرال گیری جزء به جزء می توان به یکی از ویژگی های مهم آن اشاره کرد :

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$$

که می توان آن را به صورت زیر ثابت کرد :

$$\Gamma(z+1) = \int_{0}^{\infty} e^{-t} t^{z} dt = \left[-e^{-t} t^{z}\right]_{t=0}^{\infty} + z\int_{0}^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt = z\Gamma(z)$$

با استفاده از این رابطه می توان تابع اویلر را برای $Re(z) < 0$ به شرح ذیل تعریف کرد :

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n)}{(z)_n}, \quad \left(Re(z) > -n, n \in \mathbb{N}, z \in \mathbb{Z}_0^- = \{0, -1, -2, \cdots\}\right). \tag{۲.۱}$$

که در آن $(z)_n$ همان نماد پاچ هامر [۴] می باشد که برای $z \in \mathbb{C}$ و $n \in \mathbb{N} \cup \{0\} = \mathbb{N}_0$ به صورت زیر تعریف می شود :

$$(z)_0 = 1, (z)_n = z(z+1)(z+2)\cdots(z+n-1), \quad n \in \mathbb{N}. \tag{۳.۱}$$

با توجه به رابطه (۲.۱) در می یابیم که اولاً تابع $\Gamma(z)$ یک تابع تحلیلی در کل صفحه مختلط مگر در نقاط $z = 0, -1, -2, \cdots$ می باشد و در ثانی تمامی این نقاط قطب های ساده $\Gamma(z)$ می باشد.

[۱] Euler
[۲] Fractional calculus
[۳] Factorial
[۴] Pochhammer Symbol