دانشگاه تربیت معلم سبزوار

دانشگاه تربیت معلم سبزوار

دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر

پایان نامه جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد
ریاضی کاربردی، (گرایش آنالیز عددی)

حل معادلات دیفرانسیل کسری با روش تبدیل دیفرانسیل و حل معادلات انتگرو-دیفرانسیل کسری با استفاده از برخی موجک‌ها

استاد راهنما:

دکتر محمدتقی خداداد

استاد مشاور:

دکتر سید ابوالفضل علوی

نگارش:

مرضیه آزادی

شهریور ماه ۹۰

تقدیم به

پدر عزیز و مادر مهربانم

و به دستهای پر از مهر آنان که درخت جوانی ام را شکوفا نمودند و اینک به پاس آن همه ایثار ثمره تلاشم را به قلبهای مهربانشان تقدیم می کنم.

تقدیر و تشکر

سپاس خداوندی را که سخنوران از ستودن او عاجزند و حساب‌گران از شمارش نعمت‌های او ناتوان و تلاش‌گران از ادای حق او درمانده‌اند. خدایی که افکار ژرف اندیش، ذات او را درک نمی‌کنند و دست غواصان دریای علوم به او نخواهد رسید...

خطبه اول نهج البلاغه

با سپاس نامتناهی از پروردگار منان در اینجا لازم میدانم از زحمات استاد راهنمای ارجمند و گرانقدرم **جناب دکتر خداداد** که با راهنمایی‌های دلسوزانه مرا در انجام این پروژه یاری نمودند تقدیر و تشکر نمایم، و از استاد گرانمایه دکتر علوی به عنوان استاد مشاور نهایت تشکر را دارم، و از دوران محترم آقایان دکتر سهراب عفتی و دکتر عبدالله قلی زاده که زحمت مطالعه و داوری پایان‌نامه را برعهده داشتند، کمال تشکر و قدردانی را دارم.

پیشگفتار

پایان‌نامه مشتمل بر چهار فصل است که به صورت زیر مرتب شده است.

در فصل اول مقدمه‌ای کوتاه در مورد موجك‌ها، معادلات انتگرال و یك سری مفاهیم پایه آورده شده است.

در فصل دوم روش موجك CAS مورد بررسی قرارگرفته و سپس روش مذکور برای حل عددی معادلات انتگرال و انتگرو-دیفرانسیل فردهلم به کار گرفته شده است.

در فصل سوم حل عددی معادلات انتگرو-دیفرانسیل ولترا و فردهلم غیرخطی از مرتبه کسری بررسی شده که بدین منظور از روش موجك CAS استفاده شده است. چند مثال عددی نیز برای نشان دادن کارایی روش آورده شده است.

در فصل چهارم ابتدا مقدمه‌ای بر روش تبدیل دیفرانسیل آورده شده و سپس به حل معادلات دیفرانسیل کسری براساس روش فوق پرداخته شده است. در پایان هر فصل چند مثال عددی برای نشان دادن کارایی روش‌ها آورده شده است.

فهرست مطالب

۱ مقدمات ۱

۱.۱ موجک ۱

۲.۱ توابع بلوک پالس ۱۶

۳.۱ معادلات انتگرال ۱۹

۴.۱ حساب دیفرانسیل و انتگرال کسری ۲۵

۵.۱ معادلات دیفرانسیل کسری ۳۰

۲ حل معادلات انتگرال و انتگرو-دیفرانسیل فردهلم با موجک CAS ۳۱

۱.۲ مقدمه ۳۱

۲.۲ موجک سینوس و کسینوس ۳۱

۳.۲ تقریب توابع با استفاده از موجک CAS ۳۴

۴.۲ ماتریس‌های عملیاتی ۳۵

۵.۲ استفاده از موجک CAS برای حل معادله انتگرال فردهلم ۴۱

۶.۲ استفاده ازموجک CAS برای حل معادله انتگرو-دیفرانسیل فردهلم ۴۳

۷.۲ مثال‌های عددی ۴۶

۳ حل معادلات انتگرو-دیفرانسیل غیرخطی از مرتبه کسری با موجک CAS ۶۰

۱.۳ مقدمه ۶۰

۲.۳ تقریب توابع با استفاده از $BPFs$ ۶۰

۳.۳ ماتریس عملیاتی انتگرال ۶۳

۴.۳ ماتریس عملیاتی بلوک پالس برای انتگرال ۶۴

۵.۳ استفاده از موجک CAS برای حل معادلات انتگرو-دیفرانسیل ولترای غیرخطی از مرتبه کسری ۶۸
۶.۳ استفاده از موجک CAS برای حل معادلات انتگرو-دیفرانسیل فردهلم غیرخطی از مرتبه کسری ۷۰
۷.۳ مثال‌های عددی ۷۲

۴ حل معادلات دیفرانسیل کسری با روش تبدیل دیفرانسیل ۸۳
۱.۴ مقدمه ۸۳
۲.۴ مشتق کپیوتو و فرمول تیلور تعمیم یافته ۸۳
۳.۴ روش تبدیل دیفرانسیل تعمیم یافته ۸۷
۴.۴ کاربردها ۹۳

A. نتیجه‌گیری و پیشنهادات ۹۹

B. برنامه کامپیوتری برای حل معادلات انتگرال فردهلم با استفاده از موجک CAS ۱۰۰

C. برنامه کامپیوتری برای حل معادلات انتگرو-دیفرانسیل فردهلم با استفاده از موجک CAS ۱۰۴

D. برنامه کامپیوتری برای حل معادلات انتگرو-دیفرانسیل ولترای غیرخطی از مرتبه کسری با استفاده از موجک CAS ۱۰۹

E. برنامه کامپیوتری برای حل معادلات انتگرو-دیفرانسیل فردهلم غیرخطی از مرتبه کسری با استفاده از موجک CAS ۱۱۶

F. برنامه کامپیوتری برای حل معادلات دیفرانسیل کسری با روش تبدیل دیفرانسیل ۱۲۳

کتاب نامه ۱۲۵

فهرست تصاویر

۱.۱ زیر فضاهای پایه موجک ۸
۲.۱ تابع موجک مادر ۱۱
۳.۱ تابع مقیاس ۱۱

۱.۲ جواب‌های دقیق و تقریبی برای مثال ۲.۲ . . . . ۵۶
۲.۲ جواب‌های دقیق و تقریبی برای مثال ۳.۲ . . . . ۵۸

۱.۳ جواب‌های دقیق و تقریبی برای مثال ۱.۳ به ازای ۲ $= k$ و ۱ $= M$ ۷۸
۲.۳ جواب‌های دقیق و تقریبی برای مثال ۱.۳ به ازای ۳ $= k$ و ۱ $= M$ ۷۸
۳.۳ جواب‌های دقیق و تقریبی برای مثال ۲.۳ به ازای ۲ $= k$ و ۱ $= M$ ۷۹
۴.۳ جواب‌های دقیق و تقریبی برای مثال ۲.۳ به ازای ۳ $= k$ و ۱ $= M$ ۷۹
۵.۳ جواب‌های دقیق و تقریبی برای مثال ۳.۳ به ازای ۲ $= k$ و ۱ $= M$ ۸۰
۶.۳ جواب‌های دقیق و تقریبی برای مثال ۳.۳ به ازای ۳ $= k$ و ۱ $= M$ ۸۰
۷.۳ جواب‌های دقیق و تقریبی برای مثال ۳.۳ به ازای ۴ $= k$ و ۱ $= M$ ۸۱
۸.۳ جواب‌های دقیق و تقریبی برای مثال ۴.۳ به ازای ۲ $= k$ و ۱ $= M$ ۸۱
۹.۳ جواب‌های دقیق و تقریبی برای مثال ۴.۳ به ازای ۳ $= k$ و ۱ $= M$ ۸۲
۱۰.۳ جواب‌های دقیق و تقریبی برای مثال ۴.۳ به ازای ۴ $= k$ و ۱ $= M$ ۸۲

فصل ۱
مقدمات

به منظور درک بهتر مطالب در این پایان‌نامه تعاریفی مورد نیاز است که در این فصل آورده شده است. ابتدا مفهوم موجك و سپس مقدمه‌ای بر توابع بلوك پالس و در ادامه معرفی معادلات انتگرال، معادلات انتگرو-دیفرانسیل، حساب دیفرانسیل و انتگرال کسری و معادلات دیفرانسیل کسری آمده است.

۱.۱ موجك

در آغاز عصر دیجیتال زمینه‌های زیادی برای جمع آوری، تحلیل و انتشار اطلاعات پدید آمد و کار با حجم زیاد اطلاعات مشکلاتی را بروز داد، تمام اطلاعات دیجیتالی باید نگهداری شده و بطریق مناسبی بازیابی شوند. یک روش برای حل این مشکل استفاده از موجك [۱] می‌باشد.

به عنوان مثال فایل‌های اثر انگشت در FBI بالغ بر ۲۵ میلیون کارت می‌باشد که در هر یک از آنها ۱۰ اثر انگشت نگهداری می‌گردد، هر کارت حدود ۱۰ مگابایت دیتا دارد. در نتیجه برای نگهداری تمام این کارت‌ها تقریباً ۲۵۰ ترابایت فضا نیاز است. بدون استفاده از هیچ نوع فشرده‌سازی برای این حجم از اطلاعات، مرتب سازی، نگهداری و جستجو در آنها تقریباً محال است.

برای حل این مشکل FBI استانداردی برای دیجیتالی‌کردن اثر انگشت‌ها با استفاده از فشرده‌سازی به کمک موجك‌ها وضع کرد که با استفاده از موجك نرخ فشردگی ۲۰ به ۱ است. در این بخش بعد از ارائه‌ی تاریخچه مختصری از موجك‌ها، به معرفی موجك‌ها و تعریف آنالیز چند ریزه‌ساز پرداخته شده است، و موجك هار به عنوان نمونه‌ای از ساده‌ترین موجك‌ها معرفی شده است. در ادامه خاصیت‌های

[۱] Wavelet

مهم موجك‌ها و كاربردهای آنها مورد بحث قرار گرفته است كه اكثر مطالب برگرفته از مراجع [۷]، [۸]، [۱۰] و [۱۹] است.

تاریخچه موجك‌ها

پیدایش موجك‌ها به اوایل قرن هیجدهم برمی‌گردد اما كاربرد وسیع آن در دهه اخیر بیش از بیش بوده است. موجك‌ها اكنون در زمینه‌های مختلفی مانند پردازش تصاویر و سیگنال‌ها، تصاویر كامپیوتری، فشرده‌سازی اطلاعات و بسیاری موارد دیگر استفاده می‌گردند.

اولین مفهوم از موجك به آثار فوریه[۲]برمی‌گردد، این ریاضیدان فرانسوی دهه آخر قرن هیجدهم، در سال ۱۸۰۷ با تحلیل آنالیز فركانس توانست دانشی را پدید آورد كه ما امروزه آن را به عنوان آنالیز فوریه می‌شناسیم. كار وی بر این حقیقت استوار بود كه توابع می‌توانند به صورت مجموعی از توابع سینوسی و كسینوسی نشان داده شوند. یكی دیگر از دستاوردهای وی تبدیل فوریه است كه یك تابع وابسته به زمان را به یك تابع وابسته به فركانس می‌نگارد، شكل این تبدیل در زیر نشان داده شده است:

$$\tilde{f}(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{(-iwt)}\mathrm{d}t.$$

قدم بعدی در جهت نیل به مفهوم فعلی موجك توسط آلفرد هار [۳] برداشته شد. آلفرد هار ریاضیدان مجارستانی بود كه در سال ۱۹۰۴ از مجارستان به آلمان رفت تا زیر نظر پروفسور هیلبرت به ادامه تحصیل بپردازد. وی در سال ۱۹۰۹ از رساله‌ی دكترای خود در زمینه دستگاه‌های متعامد توابع دفاع كرد. وی در خلال این رساله دستگاهی از توابع متعامد را بنیان‌گذاری كرده بود كه بعدها به عنوان موجك‌های هار معرفی شدند. موجك‌های هار ساده‌ترین شكل را در خانواده موجك‌ها دارا می‌باشند و بوسیله آنها مفهوم موجك‌ها به راحتی قابل درك است. در ادامه‌ی این بخش به تفضیل به شرح موجك هار می‌پردازیم.

بعد از تلاش‌های هار یك فاصله زمانی بوجود آمد كه در آن روی توابع متعامد كار چندانی صورت نگرفت تا زمان پل لوی [۴]، این ریاضیدان فرانسوی، كه بین سال‌های ۱۸۸۶ تا۱۹۷۱ می‌زیسته است،

---

[۲] Fourier
[۳] Alfred Haar
[۴] Poal Levi

در حین بررسی حرکت براونی متوجه شد که توابع ابداعی هار برای تخمین حرکت براونی بسیار بهتر از توابع فوریه عمل می‌کنند، چرا که توابع هار می‌توانستند به بازه‌های کوچکتر اختصاص یابند، اما توابع فوریه تنها بر روی یك بازه تعریف می‌شدند. همچنین هنگام تخمین جزئیات بسیار کوچك حرکت براونی، توابع هار مؤثرتر عمل می‌کردند.

اگرچه در زمینه موجك‌ها در طی سال‌های ۱۹۳۰ تا ۱۹۷۵ تلاش‌های زیادی صورت گرفت اما نتایج عمده بعدی در آثار جین مرلت [۵] در حدود سال ۱۹۷۵ پدید آمد. در حقیقت، مرلت اولین محققی بود که عنوان موجك را برای توصیف بعضی از انواع توابع به کار برد.

قبل از سال ۱۹۷۵، محققان بسیاری از جمله دنیس گابور [۶] بر روی ایده آنالیز فوریه پنجره‌ای تحقیق می‌کردند، این ایده باعث می‌شود تا بتوان توابع سیگنال‌ها را هم در مقیاس زمان و هم در فرکانس سنجید. آنالیز فوریه پنجره‌ای با بررسی یك سیگنال به صورت قطعه به قطعه (یا پنجره به پنجره) در ارتباط است. مرلت نیز در هنگام کار در یك شرکت نفتی بر روی همین نوع آنالیز کار می‌کرد. یکی از اهداف این شرکت پیدا کردن منابع نفتی در زیر زمین بود و روش کار آنها بدین صورت بود که پالس‌هایی را به زیر زمین ارسال می‌کردند آنالیز پالس بازگشتی اطلاعاتی راجع به ضخامت پوسته زمین و حجم منابع نفتی در برداشت و اغلب آنالیز فوریه یا آنالیز فوریه پنجره‌ای برای تحلیل پالس بازگشتی به کار می‌رفت. آنالیز فوریه فرآیندی وقت گیر بود، بنابراین مرلت به دنبال راه‌حل جدیدی می‌گشت. وی زمانی که بر روی آنالیز کار می‌کرد متوجه شد که ثابت نگه داشتن یك پنجره کار اشتباهی است بنابراین او دقیقاً عکس این کار را انجام داد، او فرکانس تابع را ثابت نگه داشت و پنجره‌ها را تغییر داد. در حقیقت شباهت‌های بسیاری بین موجك‌های مرلت و توابع سینوسی فوریه وجود دارد و همین‌طور این توابع به موجك‌های هار نیز شبیه هستند، مثلاً اولین سری از توابع موسوم به نسل اول دختران همانند موجك هار از تخصیص تابع موجك مادر از بازه $[۰, ۱]$ به بازه $[۰, \frac{۱}{۲}]$ و $[\frac{۱}{۲}, ۱]$ بوجود می‌آیند بطوریکه شکل تابع ثابت مانده و تنها کوچکتر بنظر می‌رسد. با اینکه مرلت به راستی تأثیر زیادی در تاریخچه پیدایش موجك‌ها دارد اما آثار وی زمانی کامل می‌گردد که در سال ۱۹۸۱ با ریاضیدان دیگری به

[۵] Jeon Morlet
[۶] Denis Gubore

نام آلکس گراسمن [۷] به کار می‌پردازد، در این هنگام آنها متوجه می‌شوند که یك سیگنال تبدیل یافته به موجك را می‌توان به ضرایب اولیه بازگرداند، بدون اینکه مجبور به از دست دادن اطلاعات باشیم. همچنین از آنجائیکه موجك با دو متغیر زمان و فرکانس درگیر است آنها فکر می‌کردند برای برگرداندن ضرایب موجك به حالت سیگنال اولیه به یك انتگرال دوگانه نیاز دارند اما در سال ۱۹۸۴ گراسمن دریافت که این امر تنها با یك انتگرال یگانه امکان‌پذیر است. در حین کار بر روی این ایده آنها موارد جالب دیگری را نیز دریافتند از جمله این که یك متغیر کوچك در ضرایب موجك‌ها باعث تغییر اندکی در سیگنال اولیه می‌گردد. این مسئله امروزه در فشرده‌سازی اطلاعات کاربرد وسیعی دارد چرا که وقتی یك سیگنال به ضرایب موجك انتقال می‌یابد، می‌توان کلیه اعداد نزدیك به صفر را صفر در نظر گرفت و بعد به وسیله الگوریتم‌های متفاوت موجود اطلاعات را فشرده کرد، مثلاً می‌توان یك دنباله از صفرها را تنها با یك عدد نشان داد، در رویه بازگشت به سیگنال اولیه این تغییرات باعث تغییر چندانی در سیگنال اولیه نخواهد شد.

دو دانشمند مهم دیگر در زمینه موجك‌ها میر [۸] و استفان مالات [۹] بوده‌اند، اگرچه هر دو در فرانسه تحصیل کردند اما اولین ملاقات آنها در آمریکا صورت گرفت. مالات به یکی از مقالات میر در زمینه‌ی موجك‌های متعامد علاقمند بود آنها سه روز کامل را بر روی بررسی انواع زمینه‌های کاربردی موجك‌ها سپری کردند. پس از پایان این تحقیق بود که آنالیز چند ریزه‌ساز شکل گرفت. ایده‌ی آنالیز چند ریزه‌ساز قدمی بزرگ در تحقیق در زمینه موجك‌ها بود. در اینجا بود که مفهوم تابع مقیاس برای اولین بار مورد توجه قرار گرفت و این به محققان اجازه می‌داد تا موجك دلخواه خود را با استفاده از ضوابط موجود بنیان‌گذاری کنند.

آخرین محققی که لازم است در اینجا خاطر نشان کنیم، خانم اینگیرید دابیشز[۱۰] است که هم اکنون استاد تمام دانشگاه پرینستون می‌باشد که دکترای خود را در رشته فیزیك در سال ۱۹۸۰ دریافت کرد و اولین استاد تمام زن دانشگاه پرینستون است. در حدود سال ۱۹۸۸، دابیشز از ایده آنالیز چندگانه

---
[۷] Alex Grossman
[۸] Yves Meyer
[۹] Stephan Mallat
[۱۰] Ingrid Daubechies

استفاده کرد تا بتواند یك خانواده از موجك‌ها را بنیان گذاری کند. این موجك‌ها که به نام موجك‌های دابیشز نام‌گذاری شده‌اند شمار بیشتری از خواص مطلوب را برآورده می‌کنند آنها دارای خواص محمل فشرده، متعامد بودن، منظم بودن و پیوستگی هستند. کتاب معروف این دانشمند، ده مقاله نام دارد که در آن به تبیین شرایط موجك‌های خود پرداخته است.

فضای $L^p(a,b)$

$L^P(a,b)$ یک فضای تابعی است که عناصر آن توابع اندازه‌پذیر روی بازه (a,b) بوده و در شرط زیر صدق می‌کنند:

$$\int_a^b |f(x)|^p \mathrm{d}x < \infty. \tag{۱.۱}$$

در تعریف فوق اگر قرار دهیم $p = ۲$ ، فضای فوق $L^۲(a,b)$، فضای توابع به طور مربعی انتگرال‌پذیر می‌باشد که ضرب داخلی دو تابع u و v در این فضا به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$< u, v >= \int_a^b u(x)v(x)\mathrm{d}x. \tag{۲.۱}$$

بنابراین $L^۲(a,b)$ یک فضای ضرب داخلی می‌باشد، نرم تابع u در این فضا به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$||u|| = \sqrt{< u, u >} = (\int_a^b u^۲(x)\mathrm{d}x)^{\frac{۱}{۲}} \tag{۳.۱}$$

تعریف ۱.۱. مجموعه توابع $\{f_i : i \in \mathbb{Z}\}$ یک پایه ریس[۱۱] برای فضای $L^۲(a,b)$ نامیده می‌شود هرگاه:

۱) هر عضو u در $L^۲(a,b)$ را بتوان به صورت ترکیب خطی از اعضای $\{f_i : i \in \mathbb{Z}\}$ نوشت، یعنی

$$u(x) = \sum_{i\in\mathbb{Z}} c_i f_i(x) \tag{۴.۱}$$

به عبارت دیگر

$$\overline{span\{f_i : i \in \mathbb{Z}\}} = L^۲(a,b), \tag{۵.۱}$$

[۱۱] Riesz Basis

۲) اعداد مثبت A و B موجود باشند به‌گونه‌ایکه برای هر u دلخواه از $L^2(a,b)$ با ترکیب خطی (۴.۱) داشته باشیم:

$$A||u||^2 \leq \sum c_i^2 \leq B||u||^2. \qquad (۶.۱)$$

تعریف ۲.۱. محمل تابع f را که آن را با $suppf$ نشان می‌دهیم برابر است با $\overline{\{x : f(x) \neq 0\}}$.

پایه‌های موجکی

خانواده توابع به شکل $h_{a,b}$، با تعریف

$$h_{a,b}(x) = |a|^{-\frac{1}{2}} h\Big(\frac{x-b}{a}\Big), \qquad a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0,$$

که از انتقال‌ها و انبساط‌های تابع h بدست می‌آیند و یك پایه برای فضای $L^2(\mathbb{R})$ را تشکیل می‌دهند، به نام موجك مشهور هستند. همانند تبدیل فوریه، براین اساس دو نوع تبدیل موجك معرفی می‌شود: تبدیل موجك پیوسته و تبدیل موجك گسسته.

۱. تبدیل موجك پیوسته: برای هر f و ϕ تبدیل موجك پیوسته به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$W_\phi f(a,b) = \int_{\mathbb{R}} f(x) \frac{1}{\sqrt{a}} \overline{\phi(\frac{x-a}{b})} \mathrm{d}x, \qquad a > 0, b \in \mathbb{R}.$$

تابع ϕ تابع موجك مادر نامیده می‌شود.

۲. تبدیل موجك گسسته: برای حالت $a = k$ و $b = j$ که $j, k \in \mathbb{Z}$، خواهیم داشت:

$$\phi_{j,k}(x) = 2^{\frac{j}{2}} \phi(2^j x - k).$$

اساس کار در این پایان نامه بر تبدیل موجك گسسته بنا نهاده شده است و می‌توان نوشت:

$$f(x) \cong \sum_{j,k} a_{j,k} \phi_{j,k}(x)$$

در بسیاری از کتاب‌ها به بسط فوق بسط سری موجك نیز گفته می‌شود، همانطور که مشاهده می‌شود این بسط بر حسب دو اندیس j و k می‌باشد. k معرف انتقال بر روی بردار زمان و j معرف مقیاس است.

آنالیز چند ریزه‌ساز [۱۲]

می‌توان گفت که اکثر توابع موجك با خاصیت‌های مفید در آنالیز چند ریزه‌ساز صدق می‌نمایند.
یك آنالیز چند ریزه‌ساز (یا تقریب چند ریزه‌ساز) برای $L^{2}(\mathbb{R})$ یك دنباله $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ از زیر فضاهای بسته‌ی خطی $L^{2}(\mathbb{R})$ است که در شرایط زیر صدق می‌کند:

۱) برای هر $j \in \mathbb{Z}$ ، $V_j \subset V_{j+1}$،

۲) $\overline{\bigcup_{j\in\mathbb{Z}} V_j} = L^{2}(\mathbb{R})$، $\bigcap_{j\in\mathbb{Z}} V_j = \{0\}$،

۳) برای هر $j \in \mathbb{Z}$، $f(x) \in V_j$ اگر و فقط اگر $f(2x) \in V_{j+1}$،

۴) برای هر $j \in \mathbb{Z}$، $f(\cdot) \in V_0$ اگر و فقط اگر $f(\cdot - j) \in V_0$،

۵) تابعی مانند $\phi \in V_0$ وجود دارد بطوری که خانواده‌ی $\{\phi(\cdot - j) : j \in \mathbb{Z}\}$ یك پایه متعامد یکه برای V_0 است.

تابع ϕ یك تابع مقیاس برای $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ نامیده می‌شود و نیز $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ را یك آنالیز چند ریزه‌ساز تولید شده توسط ϕ گویند.

قضیه ۱.۳. (قضیه تجزیه متعامد) [۳]: اگر W یك زیرفضا با بعد متناهی از فضای ضرب داخلی V باشد، در این صورت هر $v \in V$ را به طور یکتا می‌توان به صورت $v = w \oplus w^{\perp}$ نوشت که در آن $w \in W$ و $w^{\perp} \in W^{\perp}$.

در ادامه اگر زیر فضای W دارای پایه‌ی متعامد $\{w_1, w_2, \cdots, w_k\}$ باشد، آنگاه تصویر $v \in W$ بر W به صورت زیر بدست می‌آید.

$$v = \frac{< v, w_1 >}{< w_1, w_1 >} w_1 + \frac{< v, w_2 >}{< w_2, w_2 >} w_2 + \cdots + \frac{< v, w_k >}{< w_k, w_k >} w_k$$

با توجه به قضیه فوق، حال W_j را به عنوان فضای مکمل متعامد فضای V_j در فضای V_{j+1} تعریف می‌کنیم. به عبارت دیگر داریم

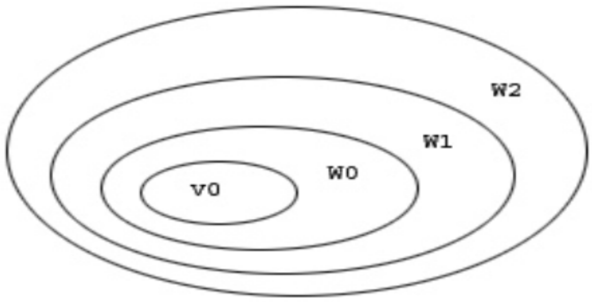
$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j.$$

---
[۱۲] Multi Resolution Analysis

و از آنجائیکه $V_j \subset V_{j+1}$، پس

$$\begin{aligned} V_{j+1} =& V_j \oplus W_j = V_{j-1} \oplus W_{j-1} \oplus W_j \\ &= V_{j-2} \oplus W_{j-2} \oplus W_{j-1} \oplus W_j = \cdots \\ &= V_0 \oplus W_0 \oplus W_1 \oplus \cdots \oplus W_j. \end{aligned}$$

مفهوم عبارت بالا در شکل زیر مشخص شده است:



شکل ۱.۱: زیر فضاهای پایه موجک

اگر $\{\psi(x-k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$پایه‌ای متعامد یکه برای W_0 باشد، آنگاه تابع ψ تابع موجک مادر نامیده می‌شود. همچنین $\{\psi_{j,k}(x)\}$ پایه‌ای متعامد یکه برای $L^2(\mathbb{R})$ تشکیل می‌دهند.

حال اگر بخواهیم تابع f را بر فضای V_j تصویر کنیم می‌توان نوشت

$$f(x) \cong f_j \in V_j = V_0 \oplus W_0 \oplus W_1 \oplus \cdots \oplus W_{j-1}.$$

به عبارت دیگر داریم

$$f(x) \cong f_j = \sum_{j,k} w_{j,k}\psi_{j,k} + \sum_k s_k\phi_k.$$

از طرف دیگر، از آنجائیکه $\phi(t) \in V_0 \subset V_1$، پس $\phi(t)$ را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\phi(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a(n)\phi(2^n t - k).$$

به رابطه‌ی بالا رابطه تصفیه گفته می‌شود، در بسیاری از انواع موجک‌ها تابع تحلیلی تابع مقیاس موجود نمی‌باشد و تنها رابطه تصفیه موجود است. در این شرایط با استفاده از رابطه تصفیه می‌توان از موجک مربوطه در پیدا کردن تبدیل‌های مربوط به آن استفاده کرد. حال به معرفی موجک هار می‌پردازیم.

موجك هار

به دلیل سادگی بیان این نوع از موجک‌ها، اولین مثال برای معرفی هرچه بیشتر موجک‌ها در بسیاری از کتاب‌ها، موجک هار می‌باشد. البته لازم به ذکر است علیرغم سادگی، این موجک‌ها از خواص مفیدی برخوردار می‌باشند، و در بسیاری از مسائل هم‌پای دیگر توابع پایه‌ای بکار می‌روند.

تابع مقیاس این نوع از موجک‌ها به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\phi(t)=\begin{cases} 1 & 0\leq t<1 \\ 0 & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

با توجه به تعریف $\phi(t)$ فضای V_0 به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$V_0=\{(\phi(t-k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$$

همچنین رابطه تصفیه برای آن به صورت زیر است:

$$\phi(t)=\sum_k a_k\phi(2t-k)=\phi(2t)+\phi(2t-1).$$

این موجک‌ها دارای محمل فشرده می‌باشند و به عنوان مثال محمل تابع $\phi(t)$ بازه $[0,1]$ است. در این نوع موجک، موجک مادر با رابطه زیر تعریف می‌شود.

$$\psi(t)=\begin{cases} 1 & 0\leq t<\frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2}\leq t<1 \\ 0 & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

بین تابع مقیاس و موجک مادر می‌توان رابطه‌ی زیر را برقرار کرد

$$\psi(t)=\sum_k a_k\phi(2t-k)=\phi(2t)-\phi(2t-1).$$

خواص موجك هار

۱. متعامد بودن تابع مقیاس: برای هر $j,k\in\mathbb{Z}$،

$$<\phi(x-j),\phi(x-k)>=\delta_{j,k},$$

۲. متعامد بودن تابع موجک مادر: برای هر $j,k\in\mathbb{Z}$،

$$<\psi(x-j),\psi(x-k)>=\delta_{j,k},$$

۳. متعامد بودن زیر فضاهای $V_\circ$ و $W_\circ$: برای هر $j,k\in\mathbb{Z}$،

$$<\phi(x-j),\psi(x-k)>=\circ,$$

۴. محمل فشرده:

$$supp\phi = supp\psi = [\circ,\text{۱}],$$

۵. تابع مقیاس متقارن است،

۶. دارای گشتاور صفر به فرم زیر می‌باشد:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\psi(t)\mathrm{d}t=\circ.$$

در شکل‌های ۲.۱ و ۳.۱ تابع موجک مادر و تابع مقیاس نشان داده شده‌اند.

موجک‌های متعامد و شبه متعامد

موجک $\psi\in L^{\text{۲}}(\mathbb{R})$ یک موجک متعامد[۱۳] نامیده می‌شود اگر مجموعه توابع $\{\psi_{j,k}\}$ در رابطه زیر صدق کنند:

$$<\psi_{j,k},\psi_{l,m}>=\delta_{j,l}\cdot\delta_{m,k},\qquad m,l,j,k\in\mathbb{Z}, \tag{۷.۱}$$

که در آن

$$\delta_{i,j}=\begin{cases}\text{۱} & i=j,\\ \circ & i\neq j.\end{cases} \tag{۸.۱}$$

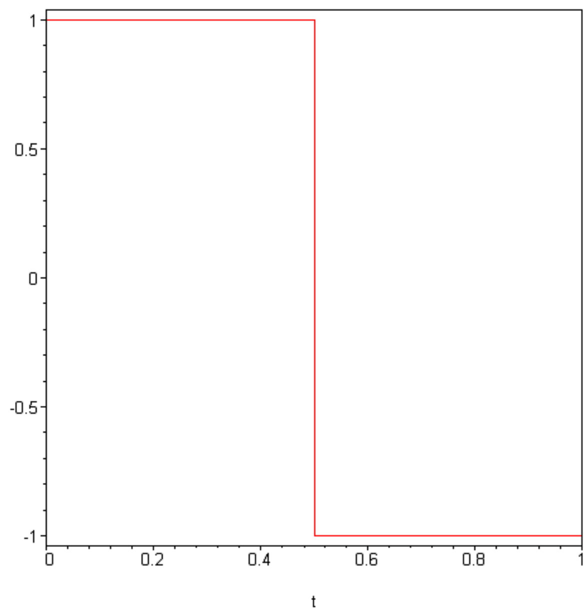
و اگر

$$<\psi_{j,k},\psi_{l,m}>=\circ,\qquad j\neq l \tag{۹.۱}$$

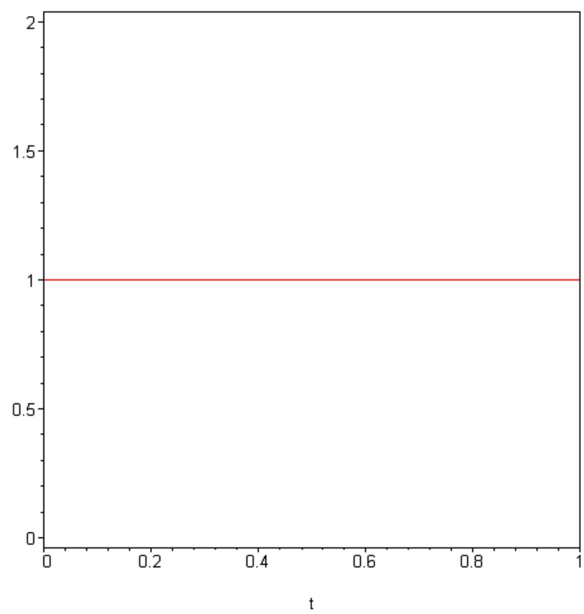
موجک ψ موجک شبه متعامد[۱۴] نامیده می‌شود.

موجک‌هایی که به طور وسیع در پردازش سیگنال مورد استفاده قرار می‌گیرند موجک‌های متعامد هستند. در کاربردهای مذکور برخلاف روش‌های حل معادلات انتگرال خود موجک هیچگاه ساخته نمی‌شود و توابع مقیاس و ضرایب بسط موجک مورد نیاز هستند.

[۱۳] Orthogonal
[۱۴] Semi Orthogonal



شکل ۲.۱: تابع موجک مادر



شکل ۳.۱: تابع مقیاس

ویژگی‌های مطلوب موجك‌ها

بعد از معرفی مختصر موجك‌ها، در این بخش برخی از ویژگی‌های مطلوب آنها را كه منجر به كارایی بیشتر نسبت به سایر پایه‌های كلاسیك در حل معادلات انتگرال و دیفرانسیل و $\cdots$ می‌شوند بیان می‌كنیم.

تعامد

متعامدبودن توابع پایه از جمله موجك‌ها موجب می‌شود كه ضرایب بسط به راحتی قابل محاسبه باشند و نیز تقریب توابع با پایه‌های متعامد نسبت به آشفتگی در ضرایب بسط تابع پایدار است، یعنی آشفتگی در ضرایب بسط تغییرات شدیدی در كل بسط ایجاد نمی‌كند. بعنوان مثال محاسبه عددی ضرایب همواره با خطا تؤام می‌باشد، ولی اگر پایه متعامد باشد خطای مذكور تغییر قابل توجهی در كل ایجاد نمی‌كند.

داشتن محمل فشرده[۱۵]

اكثر سیستم‌های موجك (توابع مقیاس و موجك‌ها) دارای محمل فشرده می‌باشند. فشرده بودن محمل مزیت‌های متعددی دارد. اگر موجك‌ها با محمل $[0,1]$ باشند،

الف. تعامد انتقال‌های صحیح آنها بطور خودكار نتیجه می‌شود،

ب. با بازه‌های كراندار به سادگی تطبیق پذیرند.

در عمل موجك‌های با محمل فشرده بیشتر مورد توجه هستند.

داشتن فرم بسته

یك تابع دارای فرم بسته است اگر بتوان آنرا با ضابطه ریاضی بیان كرد. تمام موجك‌ها فرم بسته ندارند ولی موجك‌هایی با فرم بسته به علت اینكه در روش‌های عددی منجر به سادگی مسئله می‌شوند بیشتر مورد توجه هستند.

---

[۱۵] Compact Support

داشتن ممان‌های صفر

$i-$ امین ممان تابع مقیاس و موجک به صورت زیر تعریف می شود:

$$M(i) = \int_{-\infty}^{\infty} x^i \phi(x) \mathrm{d}x, \qquad i = ۰, ۱, ۲, \cdots, \tag{۱۰.۱}$$

$$M_۱(i) = \int_{-\infty}^{\infty} x^i \psi(x) \mathrm{d}x, \qquad i = ۰, ۱, ۲, \cdots. \tag{۱۱.۱}$$

اگر داشته باشیم $M_۱(L) = ۰$، که $L = ۰, ۱, \cdots, p-۱$، می‌گوییم p ممان اول موجک ψ صفر است و هر اندازه که تعداد ممان‌های صفر بیشتر باشد، موجک ψ مطلوبتر است زیرا داشتن ممان‌های صفر درکاربردهای حل معادلات انتگرال و دیفرانسیل و $\cdots$ موجب می شود که با ماتریس‌های تنک مواجه شویم، و بنابراین کار با این نوع موجک‌ها نیاز به حافظه و مدت زمان کمتری برای انجام عملیات ریاضی دارد. در نتیجه در مواردی که نیاز به فشرده‌سازی اطلاعات داریم موجک‌های با ممان‌های صفر بالا بیشتر مورد توجه هستند.

قضیه ۴.۱. در یک سیستم متعامد و شبه متعامد، مرتبه تقریب p است اگر و تنها اگر موجک متناظر با این سیستم حداقل دارای p ممان صفر باشد.

کاربرد موجک‌ها در علوم مختلف

پیدایش موجک‌ها تحولات عظیمی را در بسیاری از شاخه‌های علوم مختلف از قبیل دینامیک مولکولی، فیزیک، نجوم، زلزله‌شناسی، اپتیک، مکانیک کوانتوم، پردازش تصویر، آنالیز فشار خون، ضربان قلب، آنالیز DNA ، هواشناسی، پردازش گفتار و $\cdots$ پدید آورده است.

در زیر به طور خلاصه به بیان برخی از این پیشرفت‌ها می‌پردازیم.

بینایی مصنوعی برای روبات‌ها

در اوایل دهه ۱۹۸۰، دیوید مار، در لابراتور هوش مصنوعی MIT شروع به کار روی بینایی مصنوعی برای روبات‌ها نمود. او با مطالعه‌ی سیستم بینایی انسان در پی یافتن راهی برای ساخت روبات‌های