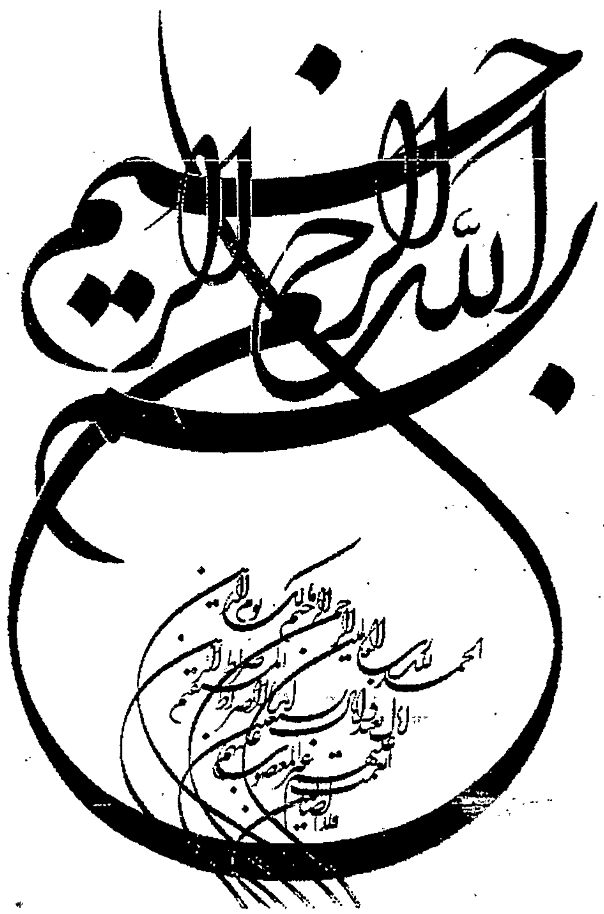
بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه پیام نور مشهد

عنوان پایان نامه

پیوستگی خود به خود همریختی های بین جبرهای باناخ و جبرهای فرشه

ارائه شده جهت اخذ درجه ی کارشناسی ارشد

در رشته ی ریاضی محض گرایش آنالیز

استاد راهنما

خانم دکتر ثریا طالبی

استاد مشاور

آقای دکتر جلیلیان

نگارنده

سیما رجب زاده اوغاز

بهمن ۸۶

تاریخ : ۱۳۸۶/۱۲/۱۵
شماره : ۸۱۲/۴۳۱۱۷
پیوست :

جمهوری اسلامی ایران

وزارت علوم و تحقیقات و فناوری

دانشگاه پیام نور

بسمه تعالی

تصویب نامه پایان نامه

پایان نامه تحت عنوان : پیوستگی خود به خود همریختی های بین جبرهای باناخ و جبرهای فرشه که توسط سیما رجب زاده اوغاز تهیه و به هیئت داوران ارائه گردیده است مورد تائید می باشد .

تاریخ دفاع : ۸۶/۱۱/۳۰ نمره ۱۶/۸۵ درجه ارزشیابی : عالی

اعضای هیئت داوران :

نام و نام خانوادگی :	هیئت داوران	مرتبه علمی	امضاء
دکتر ثریا طالبی	استاد راهنما	استادیار	
دکتر علی جلیلیان	استاد مشاور	استاد یار	
خانم صدیقه شادکام	استاد ممتحن	دانشور	
دکتر مرتضی آقائی	نماینده گروه آموزشی	استاد یار	

تقدیم به سرمایه های زندگیم

پدر عزیز و مادر مهربانم

شکر خدا که هر چه طلب کردم از خدا   بر منتهای مطلب خود کامران شدم

حمد و سپاس خداوندی را که زبان از شکر نعماتش قاصر است و خرد در ژرفای معرفتش عاجز. پروردگار متعال را شاکرم که لطف پیدا و پنهانش در لحظه لحظه ی زندگی یاریگرم بوده است. اکنون که با عنایت آن رحمت بی پایان مرحله ی دیگری از تحصیلاتم را به پایان می رسانم بر خود لازم می دانم تا مراتب سپاس و امتنان قلبی خویش را از بزرگانی که نگارش این رساله را مدیون آنها هستم ابراز نمایم.

از استاد فرهیخته و گرانقدر، سرکار خانم دکتر ثریا طالبی که همواره راهنمایی ها و نظرات ارزشمند ایشان روشنگر راهم بودند سپاسگزارم.

از استاد بزرگوار، **جناب آقای دکتر جلیلیان** که از همکاری و مشاوره ی صمیمانه ی ایشان بهره مند شده ام تشکر می نمایم.

همچنین از استاد محترم، **سرکار خانم دکتر شادکامی** که زحمت مطالعه و داوری این رساله را متقبل و نکات لازم را متذکر شدند متشکرم.

در پایان، از همه ی دوستان و عزیزانی که به نحوی مرا در به سرانجام رساندن این پایان نامه یاری کرده اند سپاسگزاری می نمایم.

سیما رجب زاده
بهمن ۱۳۸۶

چکیده

در این پایان نامه به پیوستگی های خود به خود روی جبرهای باناخ و فرشه پرداخته ایم.

فصل اول را با تعاریف و قضایای مورد نیاز در مورد جبر های باناخ و فرشه، طیف، شعاع طیفی، فضای جداساز، رادیکال، شبه وارون پذیر، Q- جبر و ... آغاز می کنیم و با طرح سؤالی معروف به « مسئله ی مایکل » که می گوید: آیا هر تابعی خطی ضربی روی جبرهای فرشه ی جابجایی پیوسته ی خود به خود است؟ و همچنین با طرح سؤالی باز و قدیمی روی جبرهای باناخ، فصل یک را به پایان می رسانیم.

در فصل دو به بیان قضیه ی مشهوری که به جانسون منسوب است پرداخته ایم و به نتیجه ی مشهور آن که به «قضیه ی منحصر به فردی نرم جانسون » معروف است می رسیم. همچنین این قضیه را با اثبات کوتاه رنسفورد بیان می کنیم و آن را به جبرهای باناخ نیمه ساده تعمیم می دهیم.

در فصل سه ابتدا به مسئله ی مایکل در حالت خاصی جواب مثبت می دهیم و در آخر فصل آن سؤال قدیمی و باز را که روی جبرهای باناخ در فصل یک مطرح کردیم روی جبرهای فرشه می بریم و به نتیجه ی جالبی می رسیم.

فهرست

مقدمه

در ۱۹۸۹، رنسفورد[1] اثبات کوتاهی از قضیه ی منحصر به فردی نرم جانسون «اگر A جبری باناخ و نیمه ساده باشد، آن گاه A نرمی کامل و منحصر به فرد دارد» ارائه داد. ما همان روش را ادامه می دهیم و بر اساس مقاله ی پیوستگی خود به خود همریختی ها بین جبرهای باناخ و جبرهای فرشه (طاهر قاسمی هنری) نشان می دهیم اگر A و B جبرهای فرشه، B نیمه ساده و $T : A \to B$ همریختی پوشا باشند تحت شرایطی خاص T پیوسته است.تاتا

به ویژه وقتی A جبری باناخ باشد نتیجه می گیریم که هر برووریختی $T : A \to B$ خود به خود پیوسته است. و همچنین هر جبر باناخ نیمه ساده یک توپولوژی منحصر به فردی به عنوان جبر فرشه دارد که توسیعی از قضیه ی منحصر به فردی نرم جانسون[2] است.

---

[1] T. J. Ransford
[2] Johnson

اگر A و B جبرهای باناخ، B نیمه ساده و $T:A\rightarrow B$ همریختی با برد چگال باشد، آنگاه پیوستگی T سؤالي باز و قدیمی است. در این مقاله ما به این پرسش باز با یک شرط اضافی روی T جواب مثبت می دهیم و سپس برای مسئله ی معروف مایکل[1] که مطرح می کند، آیا هر تابعی خطی ضربی روی جبرهای فرشه ی جابجایی پیوسته ی خود به خود است؟ یک جواب جزئی ارائه می دهیم.

همچنین نتایج مشابهی برای همریختی های با برد چگال از جبر های فرشه به دست آورده ایم.

در آخر، نشان می دهیم که اگر سؤال بالا روی پیوستگی همریختی های با برد چگال از جبرهای باناخ دارای جواب مثبت باشد، آنگاه همان سؤال برای جبر های فرشه نیز جوابی مثبت دارد.

---

[1] Michael

فصل یک

مفاهیم و مقدمات

در این بخش، مختصری از نکات عمده، تعریف ها و نتیجه های معلوم آن را بیان می کنیم.

۱-۱ تعریف. مجموعه ی ناتهی R را با اعمال $+$ و $\circ$ در نظر می گیریم.

$(R,+,\circ)$ یک عمل حلقه نام دارد هرگاه به ازای هر $a,b,c \in R$ شرایط زیر برقرار باشند.

۱. $(R,+)$ گروه آبلی باشد.

۲. $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$

۳. $a \circ (b + c) = a \circ b + a \circ c$

۴. $(b + c) \circ a = b \circ a + c \circ a$

غالباً به جای آن که گفته شود "$(R,+,\circ)$ حلقه است" می نویسیم "R حلقه است" و به جای $a \circ b$ می نویسم ab.

حلقه ی R یکدار است هرگاه عضوی مانند e در R باشد که به ازای هر $a \in R$،

$$ea = ae = a$$

معمولاً e را عضو همانی R می‌گوییم و از این به بعد عضو همانی حلقه ی R را با 1 نمایش می دهیم.

۱-۲ تعریف. فضای برداری A را روی میدان F، یک جبر روی میدان F گوییم (اگر $F=\mathbb{R}$، A را یک جبر حقیقی و اگر $F=\mathbb{C}$، A را یک جبر مختلط می نامیم) هرگاه نگاشت $(a,b)\to ab$ از $A\times A$ به A موجود باشد به طوری که برای هر $\alpha\in F$ و $a,b,c\in A$،

۱. $a(bc)=(ab)c$

۲. $a(b+c)=ab+ac$ و $(a+b)c=ac+bc$

۳. $(\alpha a)b=\alpha(ab)=a(\alpha b)$.

۱-۳ تعریف. تابع $\|\ \|:X\to R$ را روی فضای خطی (حقیقی یا مختلط) نرم گوییم هرگاه

۱. به ازای هر $x\in X$، $\|x\|\geq 0$.

۲. به ازای هر $x\in X$ و هر $\lambda\in\mathbb{C}$، $\|\lambda x\|=|\lambda|\|x\|$.

۳. به ازای هر $x,y\in A$، $\|x+y\|\leq\|x\|+\|y\|$.

۴. به ازای هر $x\in X$، $\|x\|=0$ اگر و فقط اگر $x=0$.

۱-۴ تعریف. یک جبر نرمدار A جبری است با یک نرم $\|\cdot\|$ به طوری که به ازای هر $x,y\in A$،

$$\|xy\|\leq\|x\|\|y\|$$

۱-۵ ملاحظه. در این مقاله فرض می کنیم تمام جبرها یکه دار هستند.

۱-۶ تعریف. هر فضای نرمدار را می توان یک فضای متری گرفت که در آن فاصله ی $d(x,y)$ بین x و y مساوی $\|x-y\|$ است. خواص مهم d عبارتند از:

1. به ازای هر x و y، $0 \leq d(x,y) < \infty$.
2. $d(x,y)=0$ اگر و فقط اگر $x=y$.
3. به ازای هر x و y، $d(x,y)=d(y,x)$.
4. به ازای هر x و y و z، $d(x,z) \leq d(x,y)+d(y,z)$.

۱-۷ تعریف. یک فضای توپولوژیک (S,τ)، مجموعه ای است مانند S که در آن τ گردایه ای از زیرمجموعه های S (به نام مجموعه های باز) با خواص معین شده ی زیر است:

1. S و $\varnothing$ باز هستند.
2. اشتراک هر دو مجموعه ی باز، باز است.
3. اجتماع هر گردایه ی دلخواه از مجموعه های باز، باز است.

۱-۸ تعریف. متر d روی فضای برداری X پایا نامیده می شود اگر

$$d(x+z,y+z)=d(x,y)$$

۱-۹ تعریف. فرض کنیم d یک متر بر مجموعه ی X باشد. دنباله ی $\{x_n\}$ در X یک دنباله ی کشی است اگر به هر $\varepsilon > 0$ یک عدد صحیح مانند N چنان نظیر باشد که هر وقت $m > N$ و $n > N$، آنگاه $d(x_m, x_n) < \varepsilon$.

۱-۱۰ تعریف. هرگاه هر دنباله ی کشی در X به نقطه ای از X همگرا باشد، آنگاه می گوییم d یک متر کامل بر X است.

۱-۱۱ تعریف. توپولوژی τ بر مجموعه ی X را مترپذیر گوییم اگر یک متر مانند d بر X باشد که با τ سازگار باشد.

۱-۱۲ تعریف. X یک F-فضاست اگر توپولوژی τ آن به وسیله ی یک متر پایای کامل مانند d القا شده باشد.

۱-۱۳ تعریف. مجموعه ی $C \subset X$ محدب است اگر برای $0 \le t \le 1$،

$$tC + (1-t)C \subset C$$

به عبارت دیگر، اگر $x \in C$، $y \in C$ و $0 \le t \le 1$ باید C شامل $tx + (1-t)y$ باشد.

۱-۱۴ تعریف. پایه ی موضعی فضای برداری توپولوژیک X، گردایه ای مانند β از همسایگی های $\circ$ است به طوری که هر همسایگی $\circ$ شامل عضوی از β می باشد.

۱-۱۵ تعریف. اگر X یک فضای برداری توپولوژیک باشد، آنگاه X موضعاً محدب است هرگاه یک پایه ی موضعی مانند β که اعضایش محدب هستند موجود باشد.

۱-۱۶ تعریف. X یک فضای فرشه است اگر X یک F- فضای موضعاً محدب باشد.

۱-۱۷ تعریف. جبر نرمداری را که یک فضای متریک کامل باشد جبر باناخ گوییم. اگر جبر باناخ A دارای همانی 1 باشد، آنگاه $\|1\| = 1$ و آن را جبر باناخ یکدار می نامیم.

۱-۱۸ مثال. اگر X فضای باناخ و $B = B(X)$ مجموعه ی عملگرهای خطی کراندار از X به X باشد، آنگاه B (تحت عمل جمع و ترکیب عملگرها) تحت نرم عملگر

$$\| f \| = \sup \{ \| f(x) \| : \| x \| = ۱ \}$$

جبر باناخ است.

۱-۱۹ تعریف. فرض کنید A یک جبر باشد. یک زیر فضای خطی I از A ایده آل چپ است اگر $A.I \subset I$ و یک ایده آل راست است اگر $I.A \subset I$.

پس بنا بر تعریف، I یک ایده آل است هرگاه $A.I+I.A\subset I$.

۱-۲۰ تعریف. فرض کنید A یک جبر باشد. یک ایده آل ماکزیمال در A یک عضو ماکزیمال در خانواده ای از ایده آل های محض در A است.

۱-۲۱ تعریف. یک رادیکال (جیکوبسن) از یک جبر A، اشتراک همه ی ایده آل های چپ (راست) ماکزیمال در A است که به صورت $\operatorname{rad} A$ نمایش داده می شود.

۱-۲۲ تعریف. اگر $\operatorname{rad} A=\{0\}$، آنگاه جبر A نیمه ساده نامیده می شود.

۱-۲۳ گزاره. در جبر یکدار A، مجموعه ی همه ی عناصر وارون پذیر را با $\operatorname{Inv}(A)$ نمایش می دهیم.

۱-۲۴ تعریف. فرض کنید A یک جبر باناخ باشد و $x\in A$. طیف x که با $\sigma_A(x)$ یا به صورت ساده تر با $\sigma(x)$ نمایش داده می شود، مجموعه ی تمام اعداد مختلط مانند λ است که $\lambda I-x$ در A وارون پذیر نباشد، یعنی

$$\sigma_A(x)=\{\lambda\in\mathbb{C}\,|\,\lambda I-x\notin\operatorname{Inv}A\}$$

مکمل $\sigma(x)$ در $\mathbb{C}$ را مجموعه ی حلال x نامیم.

۱-۲۵ قضیه. فرض کنید A یک جبر باناخ باشد و $x \in A$، در این صورت $\sigma(x)$ ناتهی است.

[۱۶ ؛۱.۳]

۱-۲۶ قضیه. فرض کنید A یک جبر باناخ باشد و $x \in A$، در این صورت $\sigma(x)$ در $\mathbb{C}$ فشرده است و در قرص بسته‌ی $\{ z \in \mathbb{C} : |z| \leq \|x\| \}$ قرار دارد.

[۱۶ ؛ ۳.۳]

۱-۲۷ تعریف. فرض کنید A یک جبر باناخ باشد و $x \in A$. عدد

$$r(x) = \sup \{ |\lambda| : \lambda \in \sigma(x) \}$$

را شعاع طیفی x نامند.

۱-۲۸ نتیجه. بنا بر قضیه‌ی ۱-۲۶ همواره داریم $\circ \leq r(x) \leq \|x\|$.

[۱۶ ؛ ۸.۳]

۱-۲۹ قضیه. اگر x و y در جبر باناخ A باشند، آنگاه $1-xy$ وارون پذیر است اگر و فقط اگر $1-yx$ وارون پذیر باشد.

[۱۶ ؛ ۴.۳]

۱-۳۰ نتیجه. فرض کنید A یک جبر باناخ باشد و $x,y\in A$، در این صورت

$$\sigma(xy)\cup\{0\}=\sigma(yx)\cup\{0\}$$

[۱۶ ؛ ۵.۳]

۱-۳۱ نتیجه. فرض کنید A یک جبر باناخ باشد و $x,y\in A$، در این صورت $r(xy)=r(yx)$.

[۱۶ ؛ ۶.۳]

۱-۳۲ تعریف. یک همریختی از جبر A به جبر B نگاشت خطی $\varphi:A\to B$ است به طوری که برای هر $a,b\in A$، $\varphi(ab)=\varphi(a)\varphi(b)$.

۱-۳۳ گزاره. $\ker(\varphi)$ در A یک ایده‌آل است و برد $\varphi(A)$ زیرجبری از B است.

۱-۳۴ گزاره. اگر φ یک همریختی از جبر باناخ A به توی جبر باناخ دیگری مانند B باشد که یکه‌ی A را به یکه‌ی B ببرد، آنگاه $\sigma_B(\varphi(x))\subseteq\sigma_A(x)$ و در نتیجه $r(\varphi(x))\le r(x)$.

اثبات. فرض کنید $\lambda\in\sigma(\varphi(x))$، در این صورت $\varphi(x)-\lambda I\notin \mathrm{Inv}(B)$. چون

$$\varphi(x)-\lambda I=\varphi(x-\lambda I)$$

پس $x-\lambda I\notin \mathrm{Inv}(A)$، بنابراین

$$\lambda\in\sigma(x)$$

همچنین

$$r(\varphi(x)) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(\varphi(x))\}$$
$$\leq \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(x)\} = r(x)$$

و حکم برقرار است. ■

۱-۳۵ قضیه ی نگاشت طیفی. فرض کنید A یک جبر باناخ باشد. اگر $x \in A$ و $f(z)$ در $|z| \leq \|x\|$ تحلیلی باشد، آنگاه $\sigma(f(x)) = f(\sigma(x)) = \{f(\lambda) : \lambda \in \sigma(x)\}$.

[۱۶ ؛ ۴.۵]

۱-۳۶ یادآوری. سری $\sum a_n z^n$ را در نظر بگیرید و قرار دهید

$$L = \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}$$

دایره ی همگرایی این سری $|z| < \frac{1}{L}$ و دایره ی واگرایی آن $|z| > \frac{1}{L}$ می باشد.

۱-۳۷ قضیه. اگر $(A, \|\cdot\|)$ جبر باناخ (نه ضرورتاً جابجایی) باشد، آنگاه

$$r_A(x) = \lim_{n\to\infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \|x\|$$

اثبات. طبق تعریف داریم $\sigma(x^n) = \{\lambda^n : \lambda \in \sigma(x)\}$، بنا بر قضیه ی نگاشت طیفی و قضیه ی ۱-۲۸ داریم $\|x^n\| \geq r(x^n) = r(x)^n$، پس $r(x) \leq \|x^n\|^{\frac{1}{n}}$، بنابراین

$$r(x) \le \liminf_{n\to\infty} \| x^n \|^{\frac{1}{n}} \qquad (۱)$$

برای اثبات $r(x) \ge \limsup_{n\to\infty} \| x^n \|^{\frac{1}{n}}$ دامنه

$$\Omega = \{ z \in \mathbb{C} : |z| > r(x) \}$$

را در نظر می گیریم. اگر $\lambda \in \Omega$، آنگاه $|\lambda| > r(x)$، پس بنا بر ۱- ۲۷، $\lambda \notin \sigma(x)$، بنابراین $\lambda \cdot 1 - x \in \operatorname{Inv} A$. پس می توانیم تعریف کنیم

$$\begin{aligned} f &: \Omega \to \mathbb{C} \\ \lambda &\mapsto (\lambda \cdot 1 - x)^{-1} \end{aligned}$$

f در Ω تحلیلی است و دارای بسط لورنی به صورت زیر است

$$f(\lambda) = \frac{1}{\lambda - x} = \frac{1}{\lambda(1 - \frac{x}{\lambda})} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda} \left(\frac{x}{\lambda}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{\lambda^n}$$

که $\left| \frac{x}{\lambda} \right| < 1$، بنابراین $(\lambda \cdot 1 - x)^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{\lambda^n}$ که $|\lambda| > r(x)$. با توجه به ۱- ۳۶ دایره ی همگرایی f به صورت زیر است

$$|z| = \left| \frac{1}{\lambda} \right| \le \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \| x^n \|^{\frac{1}{n}}}$$

پس $|\lambda| \ge \limsup_{n\to\infty} \| x^n \|^{\frac{1}{n}}$، بنابراین

$$r(x) \ge \limsup_{n\to\infty} \| x^n \|^{\frac{1}{n}} \qquad (۲)$$

از روابط (۱) و (۲) نتیجه می شود $r(x) = \lim_{n\to\infty} \| x^n \|^{\frac{1}{n}}$. ■