دانشگاه صنعتی اصفهان

دانشکده علوم ریاضی

روش‌های تحلیل ماتریسی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد (آمار ریاضی)

مطهره السادات نصرآزادانی

استاد راهنما

دکتر صفیه محمودی

۱۳۹۰

دانشگاه صنعتی اصفهان

دانشکده علوم ریاضی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد (آمار ریاضی) مطهره السادات نصرآزادانی

تحت عنوان

روش‌های تحلیل ماتریسی

در تاریخ ۱۳۹۰/۱۱/۱۰ توسط کمیته تخصصی زیر مورد بررسی و تصویب نهائی قرار گرفت.

۱ــ استاد راهنمای پایان‌نامه دکتر صفیه محمودی

۲ــ استاد مشاور پایان‌نامه دکتر محمد سعید صباغ

۳ــ استاد داور ۱ دکتر افشین پرورده (دانشگاه اصفهان)

۴ــ استاد داور ۲ دکتر علی رجالی

سرپرست تحصیلات تکمیلی دانشکده دکتر اعظم اعتماد

کلیه حقوق مادی مترتب بر نتایج مطالعات، ابتکارات و نوآوری‌های ناشی از تحقیق موضوع این پایان‌نامه متعلق به دانشگاه صنعتی اصفهان است.

فهرست مطالب

چکیده:

روش‌های تحلیل ماتریسی که اولین بار توسط مارسل نیوتس مطرح شد، یک چارچوب قدرتمند و یک‌پارچه برای تحلیل دسته‌ی بزرگی از فرآیندهای تصادفی است و قابل تعمیم برای فرآیندهایی با ابعاد نامتناهی و حالت‌های ناهمگن نیز می‌باشد. مطالعه‌ی بسیاری از مدل‌های تصادفی با معرفی زنجیرهای مارکوف مشتق از آن‌ها که ساختارهای خاصی دارند، امکان‌پذیر شده است. این مسأله در تئوری صف، مدل‌های انبارداری و فرآیندهای شاخه‌ای به‌خوبی نمایان شده است. هر یک از این زمینه‌های تئوری احتمال کاربردی، کلاس‌های متعددی از زنجیرهای مارکوف را به‌وجود آورده که تحلیل‌شان پایه‌ای برای تعمیم و بسط بیشتری بوده است.

یک کلاس غنی خاص از مدل‌های زنجیرهای مارکوف، کلاسی با مدل‌های تحلیل ماتریسی است که شامل مدل‌های $GI/M/۱$ و $M/G/۱$ است و توسط نیوتس در سال‌های ۱۹۸۱ و ۱۹۸۹ معرفی شد. این فرآیندها، فرآیندهای مارکوف دو بعدی با نام طبقه و فاز هستند. در این پایان‌نامه، با در نظر گرفتن زنجیرهای مارکوف زمان‌گسسته و با استفاده از نتایج مربوط به فرآیندهای تجدید پایان‌پذیر، ساختار توزیع‌های ایستا برای دو مدل مذکور و ساختار توزیع‌های گذرا برای مدل $GI/M/۱$ بررسی می شوند. همچنین شرایط لازم برای وجود توزیع‌های ایستا یا ارگودیک بودن زنجیرها بیان می‌شوند و در نهایت به بررسی ارتباط بین دو مدل و دوگان‌های معرفی شده بین آن‌ها، می‌پردازیم.

رده‌بندی موضوعی: 60J80، 60K25، 90B25.

کلمات کلیدی: مدل‌های تحلیل ماتریسی در زنجیرهای مارکوف، سیستم $GI/M/۱$، سیستم $M/G/۱$، توزیع ایستا، توزیع گذرا.

فصل ۱

مقدمه

۱—۱ مقدمه

پیشرفت‌های حاصل شده در تکنولوژی ارتباطات و محاسبات در ۳۵ سال اخیر، نه تنها راهنمای عصر اطلاعات بوده است، بلکه علوم پایه را نیز تحت تأثیر خود قرار داده است. با توجه به افزایش قدرت محاسبات، ریاضیدانان اکنون می توانند روش‌های کلاسیک تحلیل و اثبات را بهبود بخشند. انجام محاسبات بسیار زیاد، با دقت بالا و سرعت قابل توجه، تأثیرات عمده‌ای بر علوم ریاضی دارد که برجسته‌ترین آن‌ها عبارتند از:

۱) افزایش توانایی استفاده از مدل‌های پیچیده‌ای که منجر به راه‌حل‌های روشن و فرم بسته نمی‌شوند. ضمن این‌که، این مدل‌ها باید دقیقاً منعکس کننده‌ی سیستم باشند.

۲) پذیرش بیش‌تری از یک روش قابل پیاده‌سازی به عنوان یک حل و گاهی حتی یک ارجحیت برای استفاده از آن، از نظر کلیت و سهولت استفاده.

۳) توانایی تهیه‌ی جواب‌هایی به‌فرم مناسب‌تر برای کاربرد عملی.

یک روش برجسته در بین زمینه‌هایی که نشان‌دهنده‌ی این ادعا هستند، روش الگوریتمی برای مدل‌های تصادفی است که از اواسط دهه‌ی هفتاد، قدرت معنی‌داری یافته است. روش الگوریتمی در حالت کلی موضوع گسترده‌ای است و تحت مجموعه ابزاری با نام روش‌های تحلیل ماتریسی بیان می‌شود. این روش که ابتدا توسط نیوتس مطرح شد، یک چارچوب قدرتمند و یکپارچه برای تحلیل دسته‌ی بزرگی از

فرآیندهای تصادفی است و قابل تعمیم برای فرآیندهایی با ابعاد نامتناهی و حالت‌های ناهمگن نیز می‌باشد. [۴۱]

مطالعه‌ی بسیاری از مدل‌های تصادفی، با معرفی زنجیرهای مارکوف مشتق از آن‌ها که ساختارهای خاصی دارند، امکان‌پذیر شده است. این مسأله در تئوری صف، مدل‌های انبارداری و فرآیندهای شاخه‌ای به‌خوبی بکار رفته است. هر یک از این زمینه‌های تئوری احتمال کاربردی، کلاس‌های متعددی از زنجیرهای مارکوف را به‌وجود آورده است که تحلیلشان پایه‌ای برای تعمیم و بسط بیشتری بوده است. (صفحه ۱ از مرجع [۳۳])

یک کلاس غنی خاص از مدل‌های زنجیرهای مارکوف، کلاسی با مدل‌های تحلیل ماتریسی است که شامل مدل‌های $GI/M/۱$ و $M/G/۱$ است و توسط نیوتس در سال‌های ۱۹۸۱ و ۱۹۸۹ معرفی شد. روش‌های تحلیل ماتریسی، خود تحت یک چارچوب ساده و در غالب فرآیندهای شبه زاد—مرگ (QBD) ارائه می‌شوند. این فرآیندها، فرآیندهای مارکوف دو بعدی با نام طبقه و فاز هستند و در یک انتقال به چندین طبقه پرش نمی‌کنند.(انتقال در جهت طبقه پرش آزاد است.) در واقع، فرآیند مارکوفی که هم $GI/M/۱$ و هم $M/G/۱$ باشد، به عنوان فرآیند شبه زاد—مرگ شناخته می‌شود. از آن‌جایی که بسیاری از مدل‌های تصادفی تعمیمی از مدل‌های صف $GI/M/۱$ و $M/G/۱$ هستند، روش‌های تحلیل ماتریسی را در غالب این فرآیندهای کلی‌تر بیان می‌کنیم.

برای چنین فرآیندهای مارکوف و مدل‌های تصادفی مرتبط، ارائه‌ی یک تحلیل احتمالاتی و جواب‌های الگوریتمی امکان‌پذیر است. البته، تا آن‌جا که ممکن است، شرح ساختار بعضی از کمیت‌ها را از تعیین مقادیر عددی آن‌ها جدا خواهیم کرد. مزیت ارائه‌ی نتایج احتمالاتی جدا از الگوریتم‌ها این است که، به وضوح نشان داده می‌شود ویژگی‌های ساختاری به متناهی بودن یا نامتناهی بودن ابعاد فازها بستگی ندارند و تنها زمانی‌که محاسبات ماتریسی انجام می‌شود، لازم است فضای وضعیت فازها متناهی در نظر گرفته شوند. (صفحات X و XI از مرجع [۲۹])

فرآیندهای مارکوف، در دو حالت زمان‌گسسته و زمان‌پیوسته ظاهر می‌شوند. هر تحلیل در هر حالتی که سیستم مشاهده شده است، وقتی فقط در چند نقطه‌ی مشخص زمان باشد، یک سیستم زمان‌گسسته است. مثال‌ها مواردی را شامل می‌شوند که یک سیستم تنها در نقاطی از وقوع یک پیشامد مانند ورودی‌ها یا خروجی‌ها مشاهده شوند که ممکن است این نقاط در فواصل زمانی مساوی یا نامساوی باشند. برای وضوح بیش‌تر، بدون از دست دادن هیچ کلیتی، تنها مواردی را در نظر می‌گیریم که فواصل زمانی برابر دارند و به‌صورت یک دنباله‌ی $\{۰, ۱, ۲, ۳, \ldots\}$ عددگذاری شده‌اند.

از آن‌جایی که امروزه سیستم‌های ارتباط از راه دور بیش‌تر بر اساس تکنولوژی دیجیتال هستند تا آنالوگ، نیاز به استفاده از تحلیل‌های صف‌های زمان‌گسسته مهم‌تر می‌شود. در کنار این صف‌ها، صف‌های زیادی

نیز یافت می‌شوند که تحلیل آن‌ها به‌روش زمان‌گسسته آسان‌تر از تحلیل به روش زمان‌پیوسته است. البته استفاده از روش زمان‌گسسته معایبی نیز دارد. برای آنالیز بعضی سیستم‌های صف، مزایای استفاده از این روش عبارتند از:

۱) اغلب برای مدل‌هایی مناسب است که با روش الگوریتمی سازگار هستند.

۲) برای به مدل در آوردن یک سیستم در زمان‌های مختلف به‌آسانی می‌توان بعضی توزیع‌های احتمالی را ارائه کرد که در حالت زمان‌پیوسته انجام این کار مشکل خواهد بود.

۳) هنگام کنترل مسائلی که براساس پارامترهای زمان هستند، برای کار کردن بسیار مفید است.

۴) برای صف‌هایی که پارامترهای آن‌ها تنوع زمان دارند، کار با آن ساده تر است.

۵) در موارد کلی بکار می‌روند.

معایب آن نیز عبارتند از:

۱) مشکل بودن تصمیم‌گیری در مورد اندازه‌ی فواصل زمانی گسسته.

۲) مشکلات مربوط به فواصل کوچک و نادرستی‌های مرتبط با فواصل بزرگ، ضمن این‌که اطلاعات زیادی در فواصل بزرگ با هم یک‌جا جمع شده‌اند.

۳) اجازه‌ی وقوع بیش از یک اتفاق در یک فاصله.

۴) مشکل بودن استفاده از این روش، زمانی‌که سیستم از چند سرویس‌دهنده تشکیل شده است.

این‌ها فقط چند مورد از مزایا و معایب کلیدی هستند که واضح هستند و اغلب در تصمیم‌گیری‌ها برای استفاده کردن یا نکردن از تحلیل زمان‌گسسته نقش دارند. [۵]

با توجه به مطالب فوق، فرآیندهای مارکوف زمان‌گسسته یا زنجیرهای مارکوف زمان‌گسسته را در نظر می‌گیریم و با استفاده از نتایج فرآیندهای تجدید پایان‌پذیر(مختوم)، ساختار توزیع‌های ایستا و توزیع‌های گذرا برای دو مدل $GI/M/1$ و $M/G/1$، همچنین شرایط لازم برای وجود توزیع‌های ایستا را بررسی خواهیم کرد. ماتریس R برای مدل $GI/M/1$ و ماتریس G برای مدل $M/G/1$، نقش مهمی را در ساختار توزیع‌های ایستا ایفا می‌کنند. (r,k) امین عضو ماتریس R برای یک طبقه‌ی مفروض n ($n \geq 1$)، متوسط دفعاتی است که زنجیر با شروع از فاز r طبقه‌ی n، فاز k طبقه‌ی $n+1$ را ملاقات کند، بدون این‌که در قدم‌های میانی از طبقات $\{0,1,\ldots,n-1\}$ گذر کرده باشد.

(r,k) امین عضو ماتریس G برای یک طبقه‌ی n ($n \geq 0$)، احتمال این است که زنجیر با شروع از فاز r طبقه‌ی $n+1$، سرانجام فاز k را در طبقه‌ی n ملاقات کند، بدون این‌که در قدم‌های میانی از طبقات $\{0,1,\ldots,n-1\}$ گذر کرده باشد.

برای ارزیابی این دو ماتریس، چندین الگوریتم به‌دست آمده است که در مراجع زیر آورده شده‌اند [۴۴]. [۴]، [۸]، فصل‌های ۹—۶ از [۹] ، [۱۰]، [۲۸]—[۲۶]، فصل ۸ از [۲۹]، [۳۱]، صفحات ۴۰—۳۶ از

[۳۳]، صفحه ۹۵ از [۳۴].

یک روش برای محاسبه‌ی این دو ماتریس، استفاده از ماتریس‌های نرخ و تولید یک الگوریتم بر اساس آن‌ها است که در بخش‌های ۴—۲—۳ و ۴—۲—۴ به معرفی آن‌ها خواهیم پرداخت.

این پایان‌نامه شامل ٦ فصل می‌باشد. در فصل ۲، ابتدا به معرفی فرآیندهای تجدید و در ادامه فرآیندهای تجدید پایان‌پذیر می‌پردازیم. همچنین، شرحی بر زنجیرهای مارکوف و صف‌های $GI/M/۱$ و $M/G/۱$ خواهیم داشت. در فصل ۳، به بررسی ساختار توزیع‌های ایستا برای فرآیندهای پرش آزاد به سمت بالا و پرش آزاد به سمت پایین، همچنین ساختار توزیع‌های گذرا برای فرآیندهای پرش آزاد به سمت بالا خواهیم پرداخت، که این فرآیندها حالت خاصی از مدل‌های $GI/M/۱$ و $M/G/۱$ هستند.

در فصل ۴، ساختار توزیع‌های ایستا برای مدل‌های $GI/M/۱$ و $M/G/۱$، همچنین ساختار توزیع‌های گذرا برای مدل $GI/M/۱$ بررسی و شرایط لازم برای وجود توزیع‌های ایستا در این دو مدل بیان می‌شوند.

در فصل ۵ نیز، به بررسی ارتباط بین زنجیرهای مارکوف $GI/M/۱$ و $M/G/۱$ می‌پردازیم. در نهایت در فصل ٦، با ارائه‌ی مثال، نتایج کلی رانشان خواهیم داد. ضمناً، این مجموعه براساس مراجع [۴۰] و [۴۴] تهیه شده است و تحقیقات نیوتس و همکارانش ([۳۳] و [۳۴])، پایه‌ی اصلی این مراجع می‌باشند.

فصل ۲

مفاهیم و پیش نیازها

۲–۱ مقدمه

در این فصل، ابتدا به معرفی فرآیندهای تجدید می‌پردازیم و فرآیندهای تجدید پایان‌پذیر را به دلیل اهمیت اساسی آن‌ها شرح خواهیم داد. در ادامه، زنجیرهای مارکوف و ویژگی‌های آن، همچنین مفاهیم و روابطی که در فصل‌های بعدی مورد نیاز هستند، ذکر خواهند شد. مفهوم زمان‌برگشت‌پذیری نیز، برای بررسی ارتباط بین زنجیرهای مارکوف، مطرح خواهد شد.

۲–۲ فرآیندهای تصادفی

برای یک مجموعه‌ی T، خانواده‌ی متغیرهای تصادفی $X = \{X_t, t \in T\}$ را که روی یک فضای احتمال تعریف شده‌اند، یک فرآیند تصادفی با فضای پارامتر T و فضای وضعیت S گویند. فضای وضعیت، فضایی است که مقادیر ممکن تمام X_t ها در آن قرار دارند. در حالتی که $S = \{۰, ۱, ۲, \ldots\}$، X را یک فرآیند با فضای وضعیت گسسته و هرگاه $S = (-\infty, \infty)$، X را یک فرآیند با مقدار حقیقی می‌نامند. همچنین اگر $T = \{۰, ۱, \ldots\}$، گویند X فرآیندی زمان‌گسسته و اگر $T = [۰, \infty)$، X را فرآیندی زمان‌پیوسته می‌نامند. (صفحه ۲۶ از مرجع [۲۱])

تعریف ۱.۲ فرآیند شمارشی. فرآیند تصادفی $\{N_t, t \geq ۰\}$ را فرآیند شمارشی گویند، هرگاه در شرایط زیر صدق کند.

i) $N_t \geq ۰$.

ii) N_t صحیح مقدار باشد.

iii) اگر $s < t$، آن‌گاه $N_s \leq N_t$.

iv) برای $s < t$، $N_t - N_s$ برابر تعداد پیشامدهایی باشد که در فاصله‌ی $(s, t]$ رخ داده‌اند.

فرآیند شمارشی دارای نموهای مستقل است، اگر تعداد پیشامدهایی که در فاصله‌های زمانی جدا از هم رخ می‌دهند، مستقل باشند. این بدان معنی است که تعداد پیشامدهایی که تا زمان t رخ داده‌اند (یعنی، N_t) باید مستقل از تعداد پیشامدهایی که بین زمان‌های t و $t+s$ رخ داده‌اند (یعنی، $N_{t+s} - N_t$) باشد.
همچنین فرآیند شمارشی دارای نموهای ماناست، اگر توزیع تعداد پیشامدهایی که در یک فاصله زمانی دلخواه رخ می‌دهند، فقط به طول فاصله‌ی زمانی بستگی داشته باشد. به عبارت دیگر، اگر $N_{t+s} - N_t$ به ازای تمام t ها دارای یک توزیع باشد. یکی از مهمترین انواع فرآیندهای شمارشی، فرآیند پواسون است که در زیر تعریف می‌شود: (صفحه ۴۲ از مرجع [۴۶])

تعریف ۲.۲ فرآیند شمارشی $\{N_t, t \geq ۰\}$ را یک فرآیند پواسون با نرخ λ، $\lambda > ۰$ گویند، هرگاه

i) $N(۰) = ۰$.

ii) فرآیند دارای نموهای مستقل باشد.

iii) تعداد پیشامدها در هر فاصله‌ی دلخواه به طول t دارای توزیع پواسون با میانگین λt باشد. یعنی، به ازای هر $s, t \geq ۰$،

$$P\{N_{t+s} - N_s = n\} = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}, \quad n = ۰, ۱, \ldots$$

همچنین از شرط iii) نتیجه می‌شود که فرآیند پواسون دارای نموهای ماناست. (صفحه ۴۳ از مرجع [۴۶])

۲—۳ فرآیندهای تجدید

دنباله‌ای از پیشامدها که در آن زمان‌های بین رخداد دو پیشامد مستقل و هم توزیع با توزیع F باشند را در نظر گرفته و S_n را زمان n امین پیشامد تعریف می‌کنیم. دنباله‌ی $S = \{S_n : n \in \mathbb{N}\}$ را فرآیند تجدید

گویند و اگر X_n زمان بین رخداد پیشامد n ام و $(n-۱)$ ام تعریف شود، در این‌صورت:

$$S_\circ = \circ, \quad S_n = \sum_{i=۱}^{n} X_i, \quad n \geq ۱,$$

(صفحات ۷۷–۷۶ از مرجع [۴۶])

چون تعداد پیشامدها تا زمان t برابر بزرگترین مقدار n است که به‌ازای آن پیشامد nام قبل از زمان t روی داده است، N_t، تعداد پیشامدها در بازه‌ی $[\circ, t]$، به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$N_t = \sum_{n=\circ}^{\infty} I_{[\circ,t]}(S_n), \qquad t \geq \circ, \tag{۲–۱}$$

که در آن $I_A(x)$ برحسب آن‌که $x \notin A$ یا $x \in A$، برابر با صفر یا یک است. (صفحه ۳۷۲ از مرجع [۴۵])

مثال ۱.۲ فرآیندهای پواسون. فرآیند پواسون $\{N_t, t \geq \circ\}$ با پارامتر λ را می‌توان یک فرآیند مارکوف شمارشی تجدید در نظر گرفت که توزیع بین هر دو رخداد متوالی نمایی باشد یعنی، $F(x) = \{۱ - e^{-\lambda x}\} I_{(\circ,\infty)}(x)$. (صفحه ۱۷۰ از مرجع [۲۱])

تعریف ۳.۲ صف $M/G/۱$. فرض کنید مشتری‌ها به یک مرکز سرویس‌دهی براساس فرآیند پواسون با نرخ λ وارد شوند. یک سرویس دهنده موجود است و ورودی‌هایی که سرویس‌دهنده را آزاد بیابند بلافاصله وارد سرویس می‌شوند. سایرین در صف خواهند ایستاد تا نوبت آن‌ها برسد. زمان‌های سرویس مشتری‌های متوالی، مستقل و هم توزیع، با توزیع مشترک عمومی G فرض می‌شوند. همچنین فرض می‌شود که زمان‌های سرویس از فرآیند ورودی مستقل باشند.

سیستم فوق را سیستم صف $M/G/۱$ می‌نامند. حرف M نشان‌دهنده‌ی این واقعیت است که توزیع بین ورودی مشتری‌ها نمایی است. G توزیع دلخواه سرویس است و عدد ۱ بیان می‌کند که یک سرویس‌دهنده وجود دارد.

اگر سیستم را در لحظاتی که یک مشتری از آن عزیمت می‌کند مطالعه کنیم، یعنی فرض کنیم X_n تعداد مشتری‌های موجود در سیستم به هنگام n امین $(n \geq ۱)$ عزیمت باشند، آن‌گاه $\{X_n, n = ۱, ۲, \ldots\}$ یک زنجیر مارکوف است. (صفحات ۱۳۹–۱۳۸ از مرجع [۴۶])

اگر

$$a_j = \int_\circ^\infty e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^j}{j!} dG(x),$$

در این صورت می‌توان نشان داد که برای هر j، a_j احتمال j ورودی در طول یک دوره‌ی سرویس است. آن‌گاه، احتمال‌های تغییر وضعیت برای این زنجیر به‌صورت:

$$P_{0j} = a_j,$$
$$P_{ij} = a_{j-i+1}, \quad j > 0, \quad j \geq i-1,$$
$$P_{ij} = 0, \quad j < i-1.$$

است. بنابراین ساختار ماتریس احتمال انتقال، به شکل زیر می‌باشد. (صفحات ۱۵۳−۱۵۲ از مرجع [۴۶])

$$P = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & \cdots \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

مثال ۲.۲ **فرآیندهای تجدید مربوط به صف‌ها.** هرگاه زمان‌های ورود مشتری یک فرآیند تجدید تشکیل دهند، آن‌گاه زمان‌های شروع دوره‌های سرویس‌دهی متوالی، فرآیند تجدید دیگری را تولید می‌کند. (صفحه ۱۷۱ از مرجع [۲۱])

تعریف ۴.۲ **صف $GI/M/1$.** فرض کنید مشتری‌ها به یک مرکز سرویس تک سرویس‌دهنده براساس یک فرآیند تجدید دلخواه با توزیع بین ورودی G وارد شوند. علاوه براین، فرض کنید که توزیع زمان هر سرویس، نمایی با نرخ μ باشد.
اگر X_n تعداد مشتری‌هایی در سیستم باشد که توسط nامین ورودی دیده خواهند شد، آن‌گاه به آسانی می‌بینیم که فرآیند $\{X_n, n \geq 1\}$ یک زنجیر مارکوف است. همچنین اگر تعداد سرویس‌ها در زمانی به طول t در نظر گرفته شوند، احتمال‌های تغییر وضعیت این زنجیر مارکوف یا همان P_{ij} ها، به‌صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$P_{i,j} = \int_0^\infty e^{-\mu t} \frac{(\mu t)^{i+1-j}}{(i+1-j)!} dG(t) = a_{i+1-j}, \quad j = 0, 1, \ldots, i,$$

$$P_{i,0} = \int_0^\infty \sum_{k=i+1}^{\infty} e^{-\mu t} \frac{(\mu t)^k}{k!} dG(t), \quad i \geq 0.$$

لذا ساختار ماتریس احتمال انتقال به شکل زیر است. (صفحه ۱۳۹ از مرجع [۴۶])

$$P = \begin{bmatrix} b_0 & a_0 & 0 & 0 & \dots \\ b_1 & a_1 & a_0 & 0 & \dots \\ b_2 & a_2 & a_3 & a_0 & \dots \\ b_3 & a_3 & a_2 & a_1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

مقادیر عددی a_k $(k \geq 0)$، چگالی احتمال روی اعداد صحیح نامنفی هستند و برای $n \geq 0$، $b_n = 1 - \sum_{k=0}^{n} a_k$.

۲-۳-۱ فرآیندهای تجدید پایان‌پذیر

در فصل‌های بعد به وفور از قضایای حدی در فرآیندهای تجدید پایان‌پذیر استفاده می‌کنیم و به‌همین دلیل مرور مختصری بر آن‌ها خواهیم داشت.
یک فرآیند تجدید، پایان‌پذیر نامیده می‌شود، اگر $\lim_{x \longrightarrow \infty} F(x) = F(\infty) < 1$ و در نتیجه $P(X = \infty) = 1 - F(\infty)$. به‌عبارتی، برای یک فرآیند تجدید پایان‌پذیر زمان انتظار تا تجدید بعد با احتمال مثبت $1 - F(\infty)$ نامتناهی می‌شود. در این حالت، تعداد کل تجدیدها در $[0, \infty)$ با احتمال ۱ متناهی است. بنابراین اگر تعداد کل تجدیدها را با N نشان دهیم، به‌آسانی دیده می‌شود که

$$P(N = n) = (F(\infty))^{n-1}(1 - F(\infty)), \quad n \geq 1. \tag{۲-۲}$$

تابع تجدید را با R نشان می‌دهیم که به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} R(t) = E[N_t] &= \sum_{n=0}^{\infty} E[I_{[0,t]}(S_n)] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P\{S_n \leq t\} = \sum_{n=0}^{\infty} F^n(t) \end{aligned} \tag{۳-۲}$$

F^n، nامین پیچش F با خودش و F^0 توزیع تباهیده در صفر است. اگر اولین تجدید در زمان ۰ اتفاق افتد، $R(t)$ متوسط تعداد تجدیدها در $[0, t]$ است.
در کاربردها، دو حالت برای F وجود دارد:

i) F یک توزیع گسسته روی اعداد صحیح مثبت یا یک زیرمجموعه از آن و با چگالی f است.

ii) F یک توزیع مطلقاً پیوسته روی اعداد حقیقی مثبت با چگالی f است.

در حالت زمان‌گسسته، تابع تجدید یک چگالی تجدید r دارد، یعنی $R(n) = \sum_{0 \leq k \leq n} r(k)$ و $r(k)$ احتمال

این است که یک تجدید در زمان k اتفاق بیفتد.

در حالت زمان‌پیوسته نیز، تابع تجدید یک چگالی تجدید r دارد و $R(t) = 1 + \int_0^t r(u)du$. کمیت $r(t)dt$ ممکن است به عنوان احتمال اولیه‌ی رخداد یک تجدید در فاصله‌ی $(t, t+dt)$ تفسیر شود.

یک معادله‌ی تجدید، معادله‌ای به شکل $g = h + F * g$ است. زمانی‌که h معلوم و g نامعلوم است و جواب یکتای آن توسط $g = R * h$ به‌دست می‌آید.

در حالت زمان‌گسسته، معادله تجدید و جواب آن به‌ترتیب:

$$g(x) = h(x) + \sum_{0 \le \nu \le x} f(\nu) g(x - \nu)$$

و

$$g(x) = \sum_{0 \le \nu \le x} r(\nu) h(x - \nu)$$

و در حالت زمان‌پیوسته، معادله تجدید و جواب آن به‌ترتیب:

$$g(x) = h(x) + \int_{[0,x]} g(x-u) dF(u)$$

و

$$\begin{aligned} g(x) &= \int_{[0,x]} h(x-u) dR(u) \\ &= h(x) + \int_0^x r(u) h(x-u) du \end{aligned}$$

هستند. همان‌طور که مشاهده می‌شود، معادله‌ی تجدید با شرط‌گذاری برروی اولین مرحله‌ی تجدید به‌دست می‌آید و جواب آن نیز با درنظر گرفتن تمام مراحل تجدید تا زمان x محاسبه می‌شود.

در بسیاری از کاربردها، دانستن حد جواب معادله‌ی تجدید، زمانی‌که $x \to \infty$، مورد توجه است. در ارتباط با فرآیندهای تجدید پایان‌پذیر، این حد به متوسط تعداد کل تجدیدها بستگی دارد و از آن‌جایی‌که تعداد کل تجدیدها دارای توزیع هندسی با پارامتر $1 - F(\infty)$ است، به‌آسانی از (۲—۲) دیده می‌شود که

$$R(\infty) = \frac{1}{1 - F(\infty)} < \infty. \qquad (۲—۴)$$

قضیه ۱.۲ فرض کنید تابع توزیع F به‌گونه‌ای است که $F(\infty) < 1$ و h روی هر مجموعه‌ی فشرده کران‌دار است و $h(\infty) = \lim_{x\to\infty} h(x)$ وجود دارد. آن‌گاه

$$\lim_{x\to\infty} h * R(x) = h(\infty) R(\infty) = h(\infty)/(1 - F(\infty)). \qquad (۲—۵)$$

اثبات. تعریف h را بسط می‌دهیم به‌گونه‌ای که برای مقادیر منفی x، $h(x)$ برابر با صفر است. با استفاده از فرمول پیچش، داریم:

$$\begin{aligned} h * R(x) &= \int_{[0,x]} h(x-u)dR(u) \\ &= \int_{[0,\infty)} h(x-u)dR(u). \end{aligned}$$

از آن‌جایی که $h(\infty)$ متناهی است، یک عدد ثابت M وجود دارد، به‌گونه‌ای که برای هر x، $|h(x)| \leq M$.
بنابراین، با استفاده از قضیه‌ی همگرایی کران‌دار می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\infty} h * R(x) &= \lim_{x\to\infty} \int_{[0,\infty)} h(x-u)dR(u) \\ &= \int_{[0,\infty)} \lim_{x\to\infty} h(x-u)dR(u) \\ &= \int_{[0,\infty)} h(\infty)dR(u) \\ &= h(\infty)R(\infty). \end{aligned} \qquad (۲-۶)$$

حال چون $R(\infty)$ متوسط تعداد کل تجدیدها در $[0,\infty)$ است، با استفاده از (۲-۴)، نتیجه به‌دست می‌آید. (صفحات ۸۶-۸۴ از مرجع [۲۹]) ■

۲-۳-۲ فرآیندهای تجدید با تأخیر

دنباله‌ی $S = \{S_n, n \in \mathbb{N}\}$ را یک فرآیند تجدید با تأخیر گویند، هرگاه $\hat{S} = \{S_n - S_0; n \in \mathbb{N}\}$ یک فرآیند تجدید و $S_0 \geq 0$ مستقل از $\hat{S}$ باشد.
G تابع توزیع S_0 و F توزیع مشترک فواصل زمانی بین تجدیدها یعنی $S_1 - S_0$، $S_2 - S_1$، ... در نظر گرفته می‌شود. وقتی برای همه‌ی مقادیر $t \geq 0$، $G(t) = 1$، یعنی وقتی به‌طور تقریباً مطمئن $S_0 = 0$، فرآیند تجدید با تأخیر تبدیل به فرآیند تجدید معمولی می‌شود. با نوشتن $S_n = S_0 + (S_n - S_0)$ و توجه به استقلال S_0 و $S_n - S_0$، می‌بینیم که توزیع S_n، پیچش توزیع‌های S_0 و $S_n - S_0$، یعنی به‌ترتیب G و F^n است. بنابراین

$$P\{S_n \leq t\} = G * F^n(t), \quad t \geq 0.$$

اگر N_t تعداد تجدیدهایی باشد که در بازه‌ی $[0,t]$ رخ داده است، دقیقاً مانند (۲-۳) داریم:

$$\hat{R}(t) = E[N_t] = \sum_{n=0}^{\infty} P\{S_n \leq t\} = \sum_{n=0}^{\infty} G * F^n(t)$$

یا

$$\hat{R}(t) = E[N_t] = G * R(t) = R * G(t).$$

رفتار حدی این امید ریاضی شبیه R است، البته انتظار هم همین است، زیرا اثر توزیع اولیه باید در دراز مدت محو شود، به‌شرط آن‌که سرانجام اولین تجدید رخ دهد. (صفحات ۳۹۳—۳۹۲ از مرجع [۴۵])

قضیه ۲.۲ اگر $F(\infty) < ۱$، آن‌گاه

$$\hat{R}(\infty) = G(\infty)R(\infty) = \frac{G(\infty)}{۱ - F(\infty)}$$

(صفحه ۳۹۴ از مرجع [۴۵])

۲—۴ زنجیرهای مارکوف

فرآیند تصادفی $\{X_n, n = ۰, ۱, ۲, \ldots\}$ که مجموعه مقادیر ممکن آن متناهی و یا شماراست در نظر گرفته می‌شود. این مجموعه مقادیر ممکن فرآیند را، با مجموعه‌ی اعداد صحیح نامنفی $\{۰, ۱, ۲, \ldots\}$ نشان می‌دهند، مگر آن‌که خلاف آن بیان شود. اگر $X_n = i$، گویند فرآیند در زمان n در حالت i است. فرض می‌شود هرگاه که فرآیند در حالت i است، با احتمال ثابت P_{ij} حالت بعدی آن j خواهد بود. یعنی، فرض می‌شود به ازای هر $n \geq ۰$ و به‌ازای حالت‌های $i_۰$، $i_۱$، ...، $i_{n-۱}$، i و j

$$P\{X_{n+۱} = j \,|X_n = i, X_{n-۱} = i_{n-۱}, \ldots, X_۱ = i_۱, X_۰ = i_۰\} = P_{ij} \qquad (۲—۷)$$

چنین فرآیندی را یک زنجیر مارکوف گویند. تساوی (۲—۷) را می‌توان این‌گونه تعبیر کرد که در زنجیر مارکوف، توزیع شرطی هر حالت آینده، مثلاً $X_{n+۱}$، با معلوم بودن حالت‌های گذشته‌ی $X_۰$،$X_۱$،...،$X_{n-۱}$ و حالت فعلی X_n، از حالت‌های گذشته مستقل است و فقط بستگی به حالت فعلی دارد. این ویژگی را ویژگی مارکوفی می‌گویند. مقدار P_{ij} احتمال آن است که تغییر وضعیت بعدی فرآیند، وقتی که در حالت i است، حالت j باشد. چون احتمال‌ها نامنفی‌اند و فرآیند باید به حالتی تغییر وضعیت دهد، داریم:

$$P_{ij} > ۰, \quad i, j \geq ۰; \quad \sum_{j=۰}^{\infty} P_{ij} = ۱, \quad i = ۰, ۱, \ldots$$

و ماتریس

$$P = \begin{bmatrix} P_{۰۰} & P_{۰۱} & P_{۰۲} & \cdots \\ P_{۱۰} & P_{۱۱} & P_{۱۲} & \cdots \\ \vdots & & & \\ P_{i۰} & P_{i۱} & P_{i۲} & \cdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{bmatrix}$$