دانشگاه الزهرا(س)

دانشکده فیزیک

پایان نامه جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

رشته فیزیک نظری

عنوان پایان نامه :

بررسی روش های نظریه میدان در مدل های واکنش پخش

استاد راهنما

فریناز روشنی

دانشجو

صفیه نظری دولیسکانی

خرداد ۹۰


بسم الله الرحمن الرحیم

فهرست مطالب

عنوان **صفحه**

مقدمه

در سال ۱۹۷۳ مارتین-سیگیا-رز[۱] نظریه ای برای محاسبه‌ی ویژگی‌های دینامیکی سیستم‌های کلاسیکی مطرح کردند این فرمالیسم خیلی شبیه به فرمالیسم شرودینگری درنظریه ی میدان های کوانتومی بود.

مارتین-سیگیا-رز اعتقاد داشتند که معادلاتی، مشابه معادلات توصیف کننده ی سیستم کلاسیکی که با آنها تابع های هم بستگی نوشته می شود، می توان یافت و با تابع های پاسخ (پاسخ سیستم به میدان های خارجی که به طور مستقیم بر مختصات دینامیکی سیستم اعمال می شود،است.) را محاسبه کرد.تا قبل از مطرح شدن ایده ی مارتین-سیگیا-رز،فرمالیسم های مختلفی هم به روش نمایش های گرافی و هم به روش نمایش های تابعی برای محاسبه ی تابع های هم بستگی سیستم معرفی شده بود[۱] اما هیچ کدام تابع پاسخ سیستم را محاسبه نمی کرد روش مارتین-سیگیا-رز برای حل چنین مشکلی را میتوان به صورت زیر خلاصه کرد.

اگر مختصات سیستم به صورت عملگرهای وابسته به زمان(که با ψنمایش می دهیم)در نظر گرفته شود آنگاه با معرفی عملگرهای مزدوج(که با $\hat{\psi}$ نشان می دهیم) محاسبات مربوط به محاسبه ی ویژگی های دینامیکی سیستم و تابع پاسخ کامل می شود.

۱)Martin-Siggia-Rose

در این فرمالیسم عملگر $\hat{\psi}$به گونه ای معرفی می شود که با ψجابجا نمی شود. فرمالیسم مارتین-سیگیا-رز خیلی زود در دو رویکرد مختلف مورد بررسی قرارگرفت که این دو رویکرد را به قرار زیر می توان دسته بندی کرد:

مشخصه ی رویکرد اول به این قرار است که مجموعه ای از اشیاء ناجابجا در نظر گرفته می شود این رویکرد برگرفته از مقاله ی اصلی مارتین-سیگیا-رز است[۲].این رویکرد به عنوان فرمالیسم عملگری مارتین-سیگیا-رز تعریف می شود.

در رویکرد دوم که توسط یانسن[۱]،بوش[۲]،فستین[۳]مطرح شد،به گونه ای است که یک فرمول انتگرال تابعی برای میدان های پیوسته مربوط به سیستم معرفی می شود.در این رویکرد دو میدان معرفی می شود که یکی ازمیدان ها به مختصات سیستم نسبت داده می شودو میدان جدیدی معرفی می شود که در محاسبه ی تابع پاسخ سیستم نقش دارد.بنابراین در این رویکرد در مقایسه با فرمالیسم عملگری،که یک عملگر مزدوج معرفی می شود ، یک میدان مزدوج تعریف می شود که آقای یانسن از این فرمالیسم با این رویکرد،به عنوان فرمالیسم لاگرانژی مارتین-سیگیا-رز[۳] نام می برد. باید به این نکته توجه داشته باشیم که لغت تابعی برای تشخیص این دو رویکرد مفید واقع نمی شود،زیرادر هر دو روش ،عملگری و روش تابعی ،از تابع- های مولد برای محاسبه ی تابع های پاسخ استفاده می شود ،اما تنها در روش انتگرال تابعی از انتگرال های تابعی استفاده می شود.

۱.Janssen
۲.Bausch
۳.Phythian

در این تحقیق با استفاده از رویکرد دوم این فرمالیسم می باشدکه سعی بر آن شده است که با در نظر گرفتن این رویکرد مشخصه های دینامیکی یک سیستم غیر تعادلی را بدست آوریم.

این پایان نامه در پنج فصل تنظیم می شود که به قرار زیر می باشد:

فصل اول:فصل اول اختصاص داده می شود به معرفی مدلی که به عنوان مدل S.I.R خطی شناخته می شود می خواهیم با استفاده از فرمالیسم مارتین-سیگیا-رز مشخصه های دینامیکی آن را به دست آوریم.

فصل دوم:در این فصل مفاهیم مقدماتی مورد نیاز برای تشریح فرمالیسم مارتین-سیگیا-رز را مطرح می کنیم.

فصل سوم:این فصل اختصاص داده شده به معرفی یک فرمالیسم که سیستم های غیر تعادلی را مورد بررسی قرار می دهد برای به دست آوردن کنش فرمالیسم مارتین-سیگیا-رز ما از این روش کمک می گیریم.

فصل چهارم:این فصل در نهایت به شرح فرمالیسم مارتین –سیگیا-رزمی پردازد و تابع مولد این فرمالیسم ومشخصه های دینامیکی سیستم را بدست آوریم .

فصل پنجم: دراین فصل مدل SIR خطی را با روش مارتین- سیگیا –رز حل می کنیم و گشتاورها و تابع پاسخ مربوطه را محاسبه می کنیم.

فصل اول

مدل پخش بیماری

۱.۱همه گیر شناسی

اپیدمی یا همه گیری عبارت است از بروز مواردی از یک بیماری در یک ناحیه یا جامعه که آشکارا از تعداد پیش بینی شده بیشتر است ودر واقع اپیدمی به هر بیماری قابل انتقال یا غیر قابل انتقال و یا هر چیزی که به سلامتی انسان را به خطر بیندازد چناچه موارد ابتلای آن بیش از حد انتظار باشد گفته می شود .همه گیر شناسی در اصطلاح لغوی به معنی«شناخت آنچه بر مردم می گذارد» و اگر چه وضعیت بهداشت و پزشکی جامعه مد نظر باشد، ولی با اقتصاد، جامعه شناسی، فرهنگ، مذهب و ... ارتباط نزدیک دارد[۴]. و بنابراین این اصطلاح تنها به بیماریهای انسانی اطلاق نمی شود و مدل های که در همه گیر شناسی استفاده می شود در بسیاری از علوم دیگر نیز کاربرد دارد و مورد استفاده قرار می گیرد. که از جمله می تواند پخش یک شایعه در جامعه باشد و یا نحوه ی بازار یابی شغلی در جامعه ی شغلی و موارد دیگر.

برای توصیف این نوع از اپیدمی ها مدلهای ریاضی ساخته شد که بر اساس آنها روند گسترش برای مثال یک بیماری می تواند توصیف شود که از جمله ی این روش ها می توان به روش های گرافی یا حل عددی [۵] معادلات مربوط به سیستم می توان نام برد.

در قسمت های بعد مفاهیمی مربوط به ساختن یک مدل ریاضی مطرح می شود و در نهایت مدلی را که مورد بررسی قرار خواهیم داد ذکر می شود.

۱.۱ سیستم های دینامیک[۱]

منظور از سیستم های دینامیک فرمول بندی ریاضی یک پدیده‌ی تعینی است یعنی سیستم هایی که در گذر زمان دست خوش تحول می شوند؛ $\dot{x} = \frac{dx}{dt} = g(x)$

بنابراین یک سیستم دینامیکی را می توان توسط سه پارامتر زمان، حالت هایی که در فضای حالت ها وجود دارد و قاعده هایی که بیانگر نحوه‌ی تحول این سیستم ها است و به آن ها عملگرهای گذر حالت می گویند، توصیف می شوند.

۲.۱ سیستم های خطی[۲]

سیستم هایی که در آن ها یک رابطه‌ی خطی میان سرعت و موقعیت برقرار می شود سیستم های خطی به شمار می آیند، تکامل تدریجی سیستم های خطی نیز فرآیندی خطی است.

اگر دو جواب برای سیستم خطی داشته باشیم مجموع آن ها نیز یک جواب برای سیستم است.

۳.۱ فضای حالت[۳]

فضای حالت در یک سیستم ساده با کمک مکان x و سرعت $\dot{x}$ رسم می شود. لذا می توان گفت که مجموعه جواب هایی به صورت x_t و ..$\dot{x}_t$.. ، نشانگر یک نقطه‌ی در حال حرکت در روی مسیر[۴]ی در این فضا خواهد بود.

---

۱. Dynamical System
۲. Liner System
۱.State bSpace
۲. Trajectory

۴.۱ مدل S.I.R

در مدل استاندارد همه گیرشناسی سه حالت برای افراد جامعه در نظر می گیریم، کسانی که به بیماری مبتلا نیستند و می توانند به آن مبتلا شوند که از این به بعد آن ها را با S [۱] نشان می دهیم، گروه دیگر بیمارانی هستند که ناقل بیماری اند و در صورت داشتن بیماری از جنس s می توانند بیماری را به آن ها منتقل کنند، که ما این گروه را با I [۲] نشان می دهیم و آخرین گروه افرادی هستند که پس از یک دوره از بیماری، نسبت به آن ایمن شده اند. این دسته، دسته ای هستند که قادر نیستند دوباره آلوده به بیماری شوند و ما آن ها را با R [۳] نمایش می دهیم، معادلات تحول این گونه ها به شکل زیر اند:

$$\dot{s} = bN - \lambda s - ds$$

$$I = \lambda S - gI - dI$$

$$\dot{R} = gI - dR$$

که در آن λ احتمال بیماری از فرد مبتلا به مستعد، g احتمال بهبود، b نرخ تولد و d نرخ مرگ طبیعی است که البته در مسأله ای که بررسی خواهیم کرد، نرخ تولد و مرگ در این کار صفر در نظر گرفته شده است و این معادلات به سه معادله‌ی خطی ساده تبدیل می گردد. به گروهی از مدل ها که چنین شرایطی دارند SIR می گویند. مدلی که مورد نظر قرار داده ایم یک مدل ساده است اما روشی که برای این بررسی مورد استفاده قرار می گیرد قابل بسط به مدل های مشکل تر وبه عبارتی غیر خطی هم می باشد.

---

۳. Susceptible
٤. Infected
۱. Recovered

فصل دوم

مفاهیم اولیه از نظریه میدان های آماری

۱.۲تابع های چگالی احتمال [۱]

کامل ترین توصیف یک متغیر رندوم پیوسته $\tilde{x}$ (ـ گاهی اوقات x) به وسیله‌ی PDF،داده می شود. $\mathrm{P(x)} = P_{\mathrm{X}}(\mathrm{x})$: احتمال اینکه $\tilde{x}$ در بازه‌ی *dx* مقدار *x* را اختیار کند، برابر است با P(x)dx. متغیر رندوم *x* مختصات مشاهده نامیده می شود.

اصولاً روی میدان های رندوم ψ(x,t) که وابسته به پارامترهای فضا و زمان هستند بحث می شود. به طور کلی یک تابع چگالی احتمال p[ψ] تعریف می شود که براکت وابستگی تابعی را مشخص می کند.

۲.۲ گشتاور [۲]

Nام گشتاور از P(x), PDF به صورت $\mathrm{M_n} = <\mathrm{x^n}>$ تعریف می شود (که البته این مقادیر ممکن است که بی نهایت هم بشوند).

تبدیل فوریه‌ی P(x) برابر است با:

$$Z(k)= \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, e^{-ikx}\ p(x) \qquad (۲.۱)$$

$$\Rightarrow z(k)= < \exp (-ik\tilde{x}) > \qquad (۲.۲)$$

---

۱. Probablity Density Functions
۳. Moment

z(k) اصولاً تابع مشخصه نامیده می شود. برای مثال تابع مشخصه یک PDF گائوسی به صورت $P(x)= (۲\pi\sigma۲)^{-۱/۲} \exp(-\frac{(x-\bar{x})^۲}{۲\sigma۲})$ پس از انتگرال گیری برابر می شود با:

$$z_G(k)= \exp(-ik\bar{x}- \frac{۱}{۲} k^۲\sigma^۲)$$

که زیر اندیس G در این نمایش معرف PDF گاوسی است. Z(k) هم چنین می تواند تابع مولد برای گشتاور ها باشد، که این از بسط تیلور Z(k) می توان دریافت:

$$Z(k)=\sum_{n=o}^{\infty} \frac{(-ik)^n}{n!} M_n \quad , \qquad M_n=\frac{\partial^۲ z(k)}{\partial (-ik)^n}\Big|_{k=0} \qquad (۲.۳)$$

با توجه به اینکه P(x) معرف تابع چگالی احتمال است پس انتظار داریم که P(x) نرمالیزه شده باشد $M_0 = ۱$.

۳.۲ کومولنت[۱]

گشتاورها اصولاً توصیف ضعیفی را برای تقریب های آماری مطرح می کنند. بعضی مواقع گشتاورها با افزایش مرتبه ممکنه است که به طور نمایی رشد پیدا کنند، برای مثال برای یک توزیع گائوسی با واریانس[۲] واحد می توانیم $M_{۲n} = (۲n-۱)!!$ محاسبه کنیم. بنابراین شرایط، ما کومولنت ها را تعریف می کنیم که نسبت به گشتاورها توصیف بهتری از تقریب های آماری را برای فراهم می کنند. یک کومولنت در مرتبه‌ی n به صورت $c_n \equiv \ll x^n \gg$ تعریف می شود. تابع مولد این کومولنت ها به صورت لگاریتم تابع مشخصه در نظر گرفته می شود و آن با w(k) نمایش

۱. Cumulant
۲. Variance

داده می شود و بنابر تعریف می نویسیم w(k)=Ln z(k)، با بسط تیلور این تابع می توانیم کومولنت ها را در مراتب مختلف بدست آوریم:

$$W(k)=\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{(-ik)^n}{n!} c_n \quad ; \quad c_n=\frac{\delta W(k)}{(-ik)^n}\Big|_{k=0} \qquad (۲.۴)$$

با توجه به تعریف تابع مولد گشتاورها و تابع مولد کومولنت ها، می توانیم بین گشتاورها و کومولنت ها روابطی بیایم که برای چند مرتبه‌ی اول این روابط به صورت زیر خلاصه می شود:

M(۱)= C(۱)

M(۱,۲)= C(۱) C(۲) + C (۱,۲)

M(۱,۲,۳)= C (۱) C(۲) C(۳) + [C (۱) C(۲,۳)+ ۲عبارت دیگر]

+ c(۱,۲,۳)

با توجه به آنچه که در بالا مطرح شد برای یک توزیع گائوسی[۱]:

$$Z(k)= < \exp(-ik\tilde{x}) >$$

از طرفی با توجه به تعریف w(k):

$$Z(k)=\exp (w(k))= \exp\left(\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{(-ik)^n}{n!} c_n\right)$$

چون برای توزیع گائوسی برای۳ ≥n، c_n =۰ می شود بنابراین داریم:

۱.Gaussian

$$\exp\left(\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{(-ik)^n}{n!}c_n\right)=\exp\left(c_۱+\frac{۱}{۲}c_۲\right) \qquad (۲.۵)$$

بنابر آنچه که در مورد رابطه‌ی چند مرتبه‌ی اول گشتاورها و کومولنت ها ذکر کردیم:

$$C_۱=M_۱ \qquad , \quad C_۲=\ll \tilde{X}^۲ \gg=<\tilde{x}^۲>-<\tilde{x}>^۲=<\delta\tilde{X}^۲>$$

در نهایت برای یک توزیع گاوسی در مورد Z(k) به رابطه‌ی زیر می رسیم:

$$Z(K)=<\exp(-ik\tilde{x})> \rightarrow \exp(-ik<\tilde{x}>-\frac{۱}{۲}k^۲<\delta\tilde{x}^۲>) \qquad (۲.۶)$$

فصل سوم

سیستم های غیر تعادلی