دانشگاه تربیت مدرس

دانشکده علوم ریاضی

پایان‌نامه دوره کارشناسی ارشد

ریاضی (محض)

عنوان

ارتباط بین سیلو حاصلضرب‌های یک گروه و ماندهٔ حل‌پذیری آن

استاد راهنما

دکتر علی ایرانمنش

نگارش

زینب یعقوبی بشلی

بهمن ۱۳۸۸

تقدیم به

طبع منیع پدرم

مهر بی‌دریغ مادرم

برکتِ حضور همسرم

و

خنده‌های پر نشاط پسرم

تشکّر و قدردانی

> پروردگارا! توفیقم ده تا نعمتی را که به من و پدر و مادرم ارزانی داشته‌ای سپاس گویم و کار شایسته‌ای انجام دهم که تو می‌پسندی، و فرزندانم را برایم شایسته گردان. به راستی، من به درگاهت توبه آوردم و من از فرمانبردارانم.[1]

در تهیه این پایان‌نامه، به جمعی از بزرگواران به بهانه‌های گوناگون وام‌دار می باشم. بنابراین بدینوسیله نسبت به:

- استاد راهنمای خود، آقای دکتر ایرانمنش به خاطر رهنمودهای ارزشمندشان،
- داوران داخلی و خارجی خود که در مطالعه و بررسی این پایان‌نامه قبول زحمت نموده‌اند،
- دوستان عزیزم خانم‌ها ایمانی و فرودی به خاطر تمام محبت‌هایشان،
- و خانواده‌ی ارزشمندم بویژه مادر گرانقدرم به خاطر همه‌ی زحماتی که متحمل شدند

مراتب قدردانی و سپاس خود را ابراز می‌دارم.

[1] سوره احقاف، بخشی از آیه ۱۵

چکیده

سیلو دنباله‌ی کامل $\mathcal{P} = P_1, \cdots, P_m$ از یک گروه متناهی G، دنباله‌ای از m، p_i–زیرگروه سیلوی G است به طوری که، $p_1, \cdots, p_m$ تمامی مقسوم علیه‌های اول متمایز $|G|$ باشند. حاصلضرب متناظر $P_1 \cdots P_m$ را یک سیلو حاصلضرب کامل G می‌نامیم و آن را با نماد $\Pi(\mathcal{P})$ نمایش می‌دهیم.

در این پایان‌نامه دو مطلب اساسی زیر را مورد مطالعه قرار می‌دهیم:

۱) **ارتباط بین سیلو حاصلضرب‌های کامل گروه متناهی G و مانده‌ی حل‌پذیری آن:**

- ابتدا ثابت می‌شود که برای هر $\Pi(\mathcal{P})$ دلخواه، زیرگروه نرمال مینیمال یکتایی مانند N وجود دارد به طوری که $\Pi(\mathcal{P})N = G$. سپس ثابت می‌شود که حاصلضرب تمامی این زیرگروه‌ها، مانده‌ی حل‌پذیری G - کوچکترین زیرگروه نرمال G که گروه خارج قسمتی متناظر باآن حل‌پذیر است - خواهد بود.
- همچنین بررسی می‌کنیم که مانده‌ی حل‌پذیری G، به وسیله‌ی همه‌ی فاکتورهایی که در تجزیه‌ی نابدیهیِ 1_G، در سیلو حاصلضرب‌های کامل G، ظاهر می‌شوند، تولید می‌گردد.

۲) **بررسی سیلو تجزیه‌پذیری گروه متقارن** S_n :

گروه G را سیلو تجزیه‌پذیر نامند هرگاه سیلو دنباله‌ی کاملی مانند $\mathcal{P}$ وجود داشته باشد که $G = \Pi(\mathcal{P})$. بررسی خواهیم کرد که گروه‌های S_n به ازای $n \leq 8$ سیلو تجزیه‌پذیرند.

کلمات کلیدی:

سیلو حاصلضرب کامل ، سیلو دنباله‌ی کامل ، سیلو تجزیه‌پذیر، مانده‌ی حل‌پذیری

فهرست مندرجات

فهرست علائم

A_n	گروه متناوب روی n حرف
$\mid G \mid$	مرتبه‌ی گروه G
$\mid G : H \mid$	اندیس زیر گروه H در G
$(CSP_\tau(G))$ $CSP(G)$	مجموعه‌ی تمام سیلو حاصلضرب‌های کامل G (ازنوع τ)
$(CSS_\tau(G))$ $CSS(G)$	مجموعه‌ی تمام سیلو دنباله‌های کامل G (ازنوع τ)
$GF(q)$	میدان گالوا با q عضو
$GL_n(F)$	گروه خطی عام فضای برداری با بعد n روی میدان F
$GL_n(q)$	گروه خطی عام فضای برداری با بعد n روی میدان گالوای $GF(q)$
$GU_n(q^2)$	گروه یکانی عام در بعد n روی میدان با q^2 عضو
$H\ ch\ G$	H زیرگروه مشخصه‌ی G
$H \leq G$	H زیرگروه G
$H < G$	H زیرگروه سره‌ی G
$H \trianglelefteq G$	H زیرگروه نرمال G
$H(G)$	اشتراک تمام سیلو حاصلضرب‌های کامل G
$KerS$	هسته‌ی (چپ)S
$m_{\mathcal{P}}(g)$	چندگانگی g در $\mathcal{P}$
$N_{\Pi(\mathcal{P})}$	مکمل نرمال مینیمال $\Pi(\mathcal{P})$
$R(G)$	رادیکال حل‌پذیر گروه G
S_n	گروه متقارن روی n حرف
$\Pi(\mathcal{P})$	سیلو حاصلضرب کامل
$\pi(G)$	مجموعه‌ی تمام مقسوم علیه‌های اول $\|G\|$
$SL_n(q)$	گروه خطی خاص در بعد n روی میدان با q عضو
$SU_n(q)$	گروه یکانی خاص در بعد n روی میدان با q عضو
$SylF(G)$	مجموعه‌ی تمام فاکتورهای سیلوی 1_G
$SylF(G,\tau)$	مجموعه‌ی تمام فاکتورهای سیلوی 1_G در سیلو دنباله‌های کامل از نوع τ
$Syl_p(G)$	مجموعه‌ی تمام p زیرگروه‌های سیلوی G
$S(G)$	مانده‌ی حل‌پذیری G
x^g	عضو $g^{-1}xg$
$Y(G)$	اشتراک تمام مانده سیلو حاصلضرب‌های گروه G
$\phi(G)$	زیرگروه فراتینی G

فصل ۱

پلی به گذشته

یک مسئله می‌تواند از چند راه، حل شود. به مسیر رودخانه‌ها نگاه کنید، شاید همین ایده را تداعی کند.

هدف این فصل مروری بر مراحل پیشرفت و تکاملِ مفهوم سیلو حاصلضرب‌ها است.

۱. رده‌بندی گروه‌های حل‌پذیر

رده‌بندی گروه‌های حل‌پذیر همواره در نظریه‌ی گروه‌ها مورد توجه است. دراین قسمت دو رده‌بندی از این گروه‌ها که در سالهای ۱۹۳۷ و ۱۹۹۴ ارائه شده است را مطرح می‌کنیم.

- در سال ۱۹۳۷ «هال»[۱] در [۴] یک رده‌بندی از گروه‌های حل‌پذیر را حدس زد:

گروه متناهی G حل‌پذیراست اگروتنهااگرعناصر نابدیهی $a, b, c \in G$ وجود نداشته باشند که مرتبه‌هایشان نسبت به هم اول بوده و $abc = 1_G$.

«هال» توانست لزوم این حدس را ثابت کند و کفایت آن را«تامپسون»[۲] در سال ۱۹۶۸ در [۱۴] به اثبات رساند.

---

[۱] $P.\ Hall$
[۲] $Thompson$

- در سال ۱۹۹۴«باری»[۳] و «وارد»[۴] در [۳] با بیان اینکه «هال» در [۴] حدس دیگری را در مورد رده‌بندی گروه‌های حل‌پذیر متناهی، مطرح کرده است، برهانی برای آن ارائه کردند و آن حدس این بود:

گروه متناهی G حل‌پذیر است اگروتنهااگر حاصلضرب هر ترتیب از هر مجموعه نماینده، از زیرگروههای سیلوی G برابر G باشد. به طوری که یک مجموعه نماینده، به ازای هر عدد اول p که مرتبه‌ی G را می‌شمارد دقیقاً شامل یک p–زیرگروه سیلوی G باشد.

البته شایان ذکر است که شرط لازم این حدس را «میلر»[۵] در سال ۱۹۱۳ در [۱۳] ثابت کرده بود.

۲. طرح یک سئوال

در سال ۱۹۹۳ «هولت»[۶] و «رولی»[۷] در [۵] با طرح یک سئوال به مطالعه‌ی چند نوع گروه پرداختند:

فرض کنیم G گروهی متناهی باشد. آیا می‌توان به ازای هر عدد اول p که مرتبه‌ی G را می‌شمارد، p_i–زیرگروه‌های سیلوی P_i از G را بیابیم که، برای یک ترتیب خاص، $G = \Pi P_i$؟

«هولت» و «رولی» با مطالعه‌ی این سئوال در مورد برخی از گروه‌ها از جمله A_5 و $SU_3(9)$ به مثال نقضی برای این سئوال دست پیدا کردند و در واقع نشان دادند که همه‌ی گروه‌ها سیلو تجزیه‌پذیر نیستند.

۳. مفهوم سیلو حاصلضرب‌ها

[۳] $Barry$
[۴] $Ward$
[۵] $Miller$
[۶] $Holt$
[۷] $Rowley$

در سال ۲۰۰۵، «کاپلان»[۸] و «لوی»[۹]، [۱۰] در [۸] و [۷] با معرفی مفهوم سیلو حاصلضرب‌ها و سیلو دنباله‌های کاملِ یک گروه متناهی، به مطالعه‌ی ارتباط آن‌ها با رادیکالِ حل‌پذیری گروه پرداخته و صورت قابل استفاده‌ی دیگری از آنچه «باری» و «وارد» در سال ۱۹۹۴ ثابت کرده‌اند را مطرح کردند:

گروه متناهی G حل‌پذیر است اگروتنهااگر G با هر سیلو حاصلضرب کامل خودش از یک نوع خاص، برابر باشد.

در سال ۲۰۰۶ نیز «کاپلان» و «لوی» با استفاده از مفهوم سیلو حاصلضرب‌ها به مطالعه‌ی ارتباط بین حل‌پذیری و تجزیه‌پذیری عناصر در گروه‌های متناهی پرداختند.

و بالاخره در سال ۲۰۰۸، این دو ریاضیدان در [۱۱] که مرجع اصلی این پایان‌نامه می‌باشد، رابطه‌ی بین سیلو حاصلضرب‌ها و مانده‌ی حل‌پذیری در گروه‌های متناهی را مورد بررسی قرار می‌دهند.

---

[۸] $Kaplan$

[۹] $Levy$

[۱۰] ازجمله‌ی مهمترین کسانی هستند که در ارتباط با سیلو حاصلضرب‌ها کار کردند.

فصل ۲

پیش‌نیازها

هر کتاب به نمایشنامه‌ای ماند که بایستی پیش از آغاز داستان، شخصیت‌ها و بازیگران آن را معرفی نمود.

۱.۲ تعاریف و قضایای مقدماتی

۱.۱.۲ یادآوری

تعریف ۱.۱.۲ فرض کنیم G یک گروه باشد، یک سری زیر نرمال G، زنجیری است متناهی از زیرگروه‌های G مانند

$$1 = G_0 \leq G_1 \leq \cdots \leq G_r = G$$

به طوری که به ازای هر i که $1 \leq i \leq r$، $G_{i-1} \lhd G_i$.

همچنین سریِ فوق را یک سری نرمال برای G نامیم هر گاه به ازای هر $1 \leq i \leq r$، G_i در G نرمال باشد.

تعریف ۲.۱.۲ سری نرمال $1 = G_\circ \leq \cdots \leq G_r = G$ را یک سری مرکزی گوئیم هرگاه به ازای هر i که $1 \leq i \leq r$ ، داشته باشیم $G_i/G_{i-1} \leq Z(G/G_{i-1})$.

درتعاریف فوق، هر G_i را یک جمله‌ی سری و r را طول سری و گروه‌های خارج قسمتی G_i/G_{i-1}، $1 \leq i \leq r$ را عوامل سری می نامند.

بدیهی است که هر سری نرمال، یک سری زیر نرمال است.

مثال ۳.۱.۲ گروه S_4 را در نظر می گیریم. فرض کنیم $V =< (12)(34), (23)(14) >$ و $U =< (12)(34) >$. سری $1 \leq V \leq S_4$ یک سری نرمال و سری $1 \leq U \leq V \leq S_4$ یک سریِ زیرنرمال برای S_4 می‌باشد که البته نرمال نیست.

مثال ۴.۱.۲ نمایش $G =< a, b | a^2 = b^4 = (ab)^2 = 1 >$ را برای D_8 در نظر می گیریم. از آنجا که $Z(D_8) =< b^2 >$، سری $1 \leq< b^2 >\leq G$ یک سری مرکزی برای G می‌باشد.

تعریف ۵.۱.۲ فرض کنیم G یک گروه باشد. دنباله‌ی $\{G^{(n)}\}_{n=\circ}$ از زیرگروه‌های G را به استقرأ چنین تعریف می کنیم:

$$G^{(\circ)} = G \quad , \quad G^{(n)} = [G^{(n-1)}, G^{(n-1)}]$$

به آسانی بررسی می‌شود که به ازای هر n صحیح نامنفی، $G^{(n)} \leq G^{(n-1)}$.

تذکر: اگر G یک گروه باشد و $N \trianglelefteq G$، خواهیم داشت:

$$(G/N)' \;=\; [G/N, G/N]$$

$$= \ < [aN, bN] | aN, bN \in G/N >$$

$$= \ < [a, b]N | a, b \in G >$$

$$= \ (G'N)/N.$$

بنابراین به استقرا می‌توان ثابت کرد:

$$(G/N)^{(n)} = (G^{(n)}N)/N.$$

تعریف ۶.۱.۲ فرض کنیم G یک گروه باشد. سری

$$G \geq G^{(۱)} \geq G^{(۲)} \geq G^{(۳)} \geq \ \cdots$$

را سری مشتق G می‌نامند.

تعریف ۷.۱.۲ گروه G را پوچ‌توان نامند هرگاه دارای یک سری مرکزی باشد. طول کوتاهترین سری مرکزی G را رده‌ی پوچ‌توانی G می‌نامند.

قضیه ۸.۱.۲ فرض کنید G یک گروه پوچ‌توان از رده‌ی r باشد. در این صورت

۱) هر زیرگروه G پوچ‌توان از رده‌ی حداکثر r است.

۲) هر تصویر همریخت G پوچ‌توان از رده‌ی حداکثر r است.

برهان. به قضیه‌ی ۳.۱.۱۰ از [۱] مراجعه نمائید. ■

تعریف ۹.۱.۲ اگر $G \neq \{۱\}$ یک گروه باشد، اشتراک همه‌ی زیرگروه‌های ماکسیمال G را زیرگروه فراتینی G گوییم و با $\phi(G)$ نشان می‌دهیم.

$$\phi(G) = \bigcap\{M|\ G \text{ زیرگروه ماکسیمال } M\}$$

در صورتی که G زیرگروه ماکسیمال نداشته باشد تعریف می‌کنیم $\phi(G) = G$. البته باید توجه کرد که هر گروه متناهی و به طور کلی هر گروه متناهیاً تولید شده زیرگروه ماکسیمال دارد.

مثال ۱۰.۱.۲ از آنجا که زیرگروه‌های ماکسیمال $Q_۸$ عبارت‌اند از $< i >$، $< j >$ و $< k >$، خواهیم داشت:

$$\phi(Q_۸) = < i > \cap < j > \cap < k > = \{۱, -۱\}.$$

قضیه ۱۱.۱.۲ فرض کنیم G یک گروه متناهی باشد و $\phi(G) \leq N \lhd G$. در این صورت، N پوچ‌توان است اگروتنهااگر $N/\phi(G)$ پوچ‌توان باشد.

برهان. به قضیه‌ی ۲.۳.۱۰ از [۱] مراجعه نمائید. ■

قضیه ۱۲.۱.۲ فرض کنیم $\phi(G)$ زیرگروه فراتینی گروه G و P خاصیتی از گروه‌ها باشد که در شرایط زیر صدق می‌کند:

۱) اگر $G/\phi(G)$ خاصیت P را داشته باشد آنگاه G خاصیت P را دارد.

۲) اگر G خاصیت P را داشته باشد آنگاه تصویر هر بروریختی از G خاصیت P را خواهد داشت.

آنگاه اگر G/N خاصیت P را داشته باشد، زیرگروه U از G وجود خواهد داشت که از خاصیت P بهره‌مند بوده و $G = NU$.

برهان. به قضیه‌ی ۹.۳ از [۶] مراجعه نمایید. ■

تبصره ۱۳.۱.۲ با توجه به قضیه‌ی ۸.۱.۲ و ۱۱.۱.۲ از [۱]، پوچ‌توانی از آن دسته از خاصیت‌های گروه است که دو شرط قضیه‌ی قبل را دارد. از طرف دیگر با دقت در روند برهان قضیه‌ی قبل عضو مینیمال مجموعه‌ی

$$\mathcal{M} = \{U | U \leq G, G = NU\}$$

همان زیرگروه مورد نظر خواهد بود. همچنین ثابت می شود که $U \cap N \leq \phi(U)$ و از آنجا که زیرگروه فراتینی یک گروه، پوچ‌توان می‌باشد می‌توان نتیجه گرفت که $U \cap N$ گروهی پوچ‌توان است.

تعریف ۱۴.۱.۲ گروه G را حل‌پذیر نامند هرگاه دارای یک سری زیر نرمال با عوامل آبلی باشد.

تذکر: به راحتی قابل بررسی است که G حل‌پذیر است اگروتنهااگر عدد صحیح نامنفی مانند n وجود داشته باشد به طوریکه $G^{(n)} = ۱$.

قضیه ۱۵.۱.۲ گروه متناهی G حل‌پذیراست اگروتنهااگرعناصر نابدیهی $a, b, c \in G$ وجود نداشته باشند که مرتبه‌هایشان نسبت به هم اول بوده و $abc = ۱_G$.

برهان. به [۱۴] صفحه‌ی ۳۸۹ مراجعه شود. ■

مثال ۱۶.۱.۲ گروه متناهی $A_۵$ را در نظر می گیریم. قرار می‌دهیم $a = (۳\ ۲\ ۵)$ ، $b = (۱\ ۳\ ۴\ ۵\ ۲)$ و $c = (۱\ ۲)(۳\ ۴)$. به راحتی محاسبه می‌شود که $abc = ۱_G$.

۲.۱.۲ مانده‌ی حل‌پذیری

تعریف ۱۷.۱.۲ مانده‌ی حل‌پذیری [۱] گروه G، کوچکترین زیرگروه نرمال G است که، گروه خارج‌قسمتی متناظر با آن حل‌پذیر باشد.

قضیه ۱۸.۱.۲ فرض کنیم $N \trianglelefteq G$، G/N حل‌پذیر است اگروتنهااگر N شامل مانده‌ی حل‌پذیری G باشد.

برهان. فرض کنیم $S(G)$ کوچکترین عضو سری مشتق G باشد. اگر G/N حل‌پذیر باشد، به ازای یک عدد صحیح نامنفی مانند m داریم:

$$\begin{aligned}(G/N)^{(m)} &= (G^{(m)}N)/N \\ &= \{N\}\end{aligned}$$

بنابراین $S(G) \leq G^{(m)} \leq N$.

از طرف دیگر اگر $S(G) \leq N$ باشد و n کوچکترین عدد صحیح نامنفی‌ای باشد که $G^{(n)} = S(G)$، خواهیم داشت:

$$(G/N)^{(n)} = (G^{(n)}N)/N$$

[۱] solvable residual

$$= (S(G)N)/N$$
$$= \{N\}$$

و این یعنی G/N حل‌پذیر است.

در حقیقت تا اینجا ثابت کردیم که: G/N حل‌پذیر است اگروتنهااگر N شامل $S(G)$ باشد. با توجه به حل‌پذیری $G/S(G)$، تعریف مانده‌ی حل‌پذیری و آنچه در بالا ثابت کردیم کاملاً واضح است که $S(G)$، همان مانده‌ی حل‌پذیری G می‌باشد و در نتیجه برهان به پایان می‌رسد. ■

تبصره **۱۹.۱.۲** مانده‌ی حل‌پذیریِ G، که با توجه به قضیه‌ی قبل، کوچکترین عضوِ سری مشتق G است، رادیکال تام G[۲](بزرگترین زیرگروه تام G که منحصربفرد هم هست) نیز می‌باشد. توجه شود که اگر گروهی حل‌پذیر باشد، مانده‌ی حل‌پذیری آن زیرگروه همانی است.(قضیه‌ی ۱۶.۳.۲ را ببینید.) و اگر گروهی حل‌پذیر نباشد حتماً مانده‌ی حل‌پذیری نابدیهی خواهد داشت چرا که جملات سری مشتقِ آن، از یک جا به بعد برابر می‌باشند.

مثال **۲۰.۱.۲** چون A_n به ازای $n \geq ۵$، گروهی ساده و ناآبلی است، سری مشتق S_n عبارت است از $\cdots = A_n = A_n \geq S_n$. بنابراین مانده‌ی حل‌پذیری S_n به‌ازای $n \geq ۵$، A_n می‌باشد.

۳.۱.۲ زیرگروه‌های هال

[۲] perfect radical

تعریف ۲۱.۱.۲ فرض کنیم G یک گروه باشد و $H \leq G$ ، زیرگروه K از G را یک متمم (در G) گویند هر گاه $G = HK$ و $H \cap K = 1$.

تعریف ۲۲.۱.۲ فرض کنیم G گروهی متناهی و $|G| = mn$ باشد به طوری که $(m, n) = 1$. هر زیرگروه G از مرتبه‌ی m را یک زیرگروه هال می‌نامند.به عبارت دیگر، زیرگروه H از G را زیرگروه هال گویند در صورتی که اعداد طبیعی $|H|$ و $|G : H|$ نسبت به هم اول باشند.

قضیه ۲۳.۱.۲ فرض کنیم G یک گروه حل‌پذیر متناهی از مرتبه‌ی mn باشد که در آن m و n دو عدد طبیعی متباین‌اند، در اینصورت:

۱) G دارای یک زیرگروه هال از مرتبه‌ی m است.

۲) هر دو زیرگروه هال G از مرتبه‌ی m ، مزدوج‌اند.

۳) اگر $m'|m$ و S زیرگروهی از مرتبه‌ی m' باشد آنگاه S زیرمجموعه‌ی یک زیرگروه هال از مرتبه‌ی m است.

برهان. قضیه‌ی ۶.۲.۱۱ از [۱]. ■

نتیجه ۲۴.۱.۲ اگر G یک گروه حل‌پذیر متناهی و H یک زیرگروه هال آن باشد، آنگاه H در G یک متمم است.

قضیه **۲۵.۱.۲** فرض کنیم G یک گروه حل‌پذیر متناهی باشد و $\{p_1, \cdots, p_m\}$ مجموعه‌ی تمام اعداد اول متمایزی باشد که، $| G |$ را عاد می کنند. دراینصورت مجموعه‌ای از زیرگروههای سیلوی G مانند $\{P_1 , \cdots, P_n\}$ ، که در آن $P_i \in Syl_{P_i}$ ، وجود دارد به طوری که به ازای هر i و j که $1 \leq i, j \leq n$ ، $P_iP_j = P_jP_i$.

برهان. فرض کنیم $|G| = p_1^{e_1} \cdots p_n^{e_n}$. باتوجه به قضیه‌ی ۲۳.۱.۲ ، به ازای هر $1 \leq i \leq n$ ، G دارای زیرگروه هالی مانند H_i است به طوریکه $|G : H_i| = p_i^{e_i}$. دراینصورت به ازای $i \neq j$ ، $(|G : H_i|, |G : H_j|) = 1$ و در نتیجه $|G : H_i \cap H_j| = p_i^{e_i} p_j^{e_j}$. واین یعنی $H_i \cap H_j$ زیرگروه هالی از G است. به همین ترتیب به ازای هر $i \neq j \neq k$ ، خواهیم داشت:

$$|G : H_i \cap H_j \cap H_k| = p_i^{e_i} p_j^{e_j} p_k^{e_k}.$$

به ویژه $P_i = \bigcap_{i \neq j} H_j$ یک p_i سیلو زیرگروه G و $Q_{ij} = \bigcap_{k \neq i,j} H_k$ یک زیرگروه هال از G است که $|Q_{ij}| = |P_iP_j|$ ، اما $P_iP_j \subseteq Q_{ij}$ ، درنتیجه $P_iP_j = Q_{ij}$. و این در حالی است که در تعریف ترتیب i و j مهم نیست، بنابراین $P_iP_j = Q_{ij} = P_jP_i$. ■

قضیه **۲۶.۱.۲** فرض کنیم G یک گروه متناهی باشد، $N \lhd G$ ، و $N \leq M \leq G$. دراین صورت $M/N \in Syl_p(G/N)$ اگر و تنها اگر $M = PN$ که در آن $P \in Syl_p(G)$.

برهان. قضیه‌ی ۱۹.۱.۴ از [۱]. ■

قضیه **۲۷.۱.۲** فرض کنیم G یک گروه متناهی و p عددی اول باشد. به علاوه فرض کنیم $P \in Syl_p(G)$ و $N \trianglelefteq G$. در اینصورت، $P \cap N$ یک p–زیرگروه سیلوی N است.

برهان. قضیه‌ی ۱۸.۱.۴ از [۱]. ■