بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه تهران

دانشکده علوم

سرشت نمایی کمّی گروه خطی تصویری خاص در بعد ۳

نگارش : نگار شهنی کرم‌زاده

استاد راهنما : دکتر محمدرضا درفشه ۱۳۸۲/۸/۲۰

رساله برای دریافت درجهٔ دکتری

در

رشتهٔ ریاضیات محض

تیرماه، سال ۱۳۸۲

جمهوری اسلامی ایران

دانشگاه تهران

دانشکده علوم

بسمه تعالی

اداره کل تحصیلات تکمیلی دانشگاه

احتراماً به اطلاع میرساند که جلسه دفاع از رساله دوره **دکتری ریاضی محض در گرایش گروههای متناهی، خانم نگار شهنی کرم زاده** تحت عنوان:

سرشت نمایی کمّی گروه خطی تصویری خاص در بعد ۳

در تاریخ **۸۲/٤/۲** در **گروه ریاضی، آمار و علوم کامپیوتر دانشکده علوم دانشگاه تهران** برگزار گردید. **هیأت داوران** بر اساس کیفیت پایان نامه، مقالات انتشار یافته، استماع دفاعیه و نحوه پاسخ به سؤالات، **رساله** ایشان را برای دریافت **درجه دکتری (Ph.D.)** در رشته **ریاضی محض** معادل با ٢٤ واحد با درجه عالی مورد ارزشیابی قرار داد.

هیأت داوران

سمت	نام و نام خانوادگی	مرتبه دانشگاهی	دانشگاه	امضاء
۱. استاد راهنما	**دکتر محمدرضا درفشه**	استاد	تهران	
۲. استاد داور	**دکتر علیرضا جمالی**	استاد	تربیت معلم	
۳. استاد داور	**دکتر علیرضا ذکائی**	دانشیار	خواجه نصیرالدین طوسی	
٤. استاد داور	**دکتر زهره مستقیم**	استادیار	علم و صنعت	
۵. استاد مشاور	**دکتر رحیم زارع نهندی**	استاد	تهران	
٦. نماینده تحصیلات تکمیلی دانشکده **دکتر مسعود علیمحمدی**		استاد	تهران	

معاون تحصیلات تکمیلی گروه
دکترسیامک یاسمی

مدیر گروه
دکترعمید رسولیان

معاون تحصیلات تکمیلی دانشکده
دکتر مجید مدرس

تقدیم به

پدر و مادر عزیزم

سرشت‌نمایی کمی گروه خطی تصویری خاص در بعد ۳

چکیده

فرض کنید G یک گروه متناهی باشد. گراف اول گروه G عبارت است از گرافی که رئوس آن را اعداد اول شمارندهٔ مرتبه G تشکیل می‌دهند و دو راس p و q بهم متصل‌اند هرگاه گروه G عضوی از مرتبه pq داشته باشد. اگر گراف اول گروه G دارای مؤلفه‌های همبند $\pi_1, \pi_2, \cdots, \pi_{t(G)}$ باشد ($t(G)$، تعداد مؤلفه‌های همبند گروه G است)، آنگاه می‌توان $|G|$ را به صورت $|G| = m_1 \cdot m_2 \cdots m_{t(G)}$ نوشت که در آن $\pi_i = \pi(m_i)$ ($\pi(m_i)$، مجموعه‌تمام اعداد اول شمارندهٔ m_i است). $m_1, m_2, \cdots, m_{t(G)}$ را مرتبهٔ مؤلفه‌های همبند گروه G نامیده و قرار می‌دهیم $OC(G) = \{m_1, m_2, \cdots, m_{t(G)}\}$.

فرض کنید H گروهی ساده و $t(H) \geq 2$ باشد، در راستای بررسی سرشت‌نمایی گروه متناهی G حدس بر این بوده است که اگر $OC(G) = OC(H)$، آنگاه گروه G نه فروبنیوس است و نه ۲−فروبنیوس. که این موضوع در مقاله‌های مختلف برای گروه‌های خاصی به طور جداگانه ثابت شده است. اثبات درستی این حدس در حالت کلی یکی از نتایج اصلی این رساله است.

همچنین در این رساله به سرشت‌نمایی گروههای $PSL_3(q)$ توسط مرتبه عناصر آنها پرداخته‌ایم. اگر مجموعه مرتبه عناصر گروه متناهی G را با $w(G)$ نمایش دهیم، $w(G)$ زیرمجموعه‌ای از مجموعه اعداد طبیعی می‌باشد. اگر Γ زیرمجموعه‌ای دلخواه از مجموعه اعداد طبیعی باشد، تعداد گروههای متناهی ناایزومورف G را که برای آنها داشته باشیم $w(G) = \Gamma$، با $h(\Gamma)$ نمایش می‌دهیم. گوئیم گروه G قابل تشخیص است هرگاه $h\left(w(G)\right) < \infty$ و گروه G را غیرقابل تشخیص گوئیم هرگاه $h\left(w(G)\right) = \infty$. همچنین گروه G را k−قابل تشخیص گوئیم هرگاه $h\left(w(G)\right) = k$. اگر $k = 1$، آنگاه گوئیم گروه G توسط مجموعهٔ مرتبه عناصرش قابل سرشت‌نمایی است. نتایج این رساله در زمینهٔ اخیر به شرح زیر است:

فرض کنید $G = PSL_3(q)$، به طوری که $q = p^f$ و p عددی اول است و $1 \neq T \leq \mathrm{Out}(G)$. در این صورت $w(G:T) \neq w(G)$، مگر در حالتی که $q \equiv 1(4)$ و $3 \nmid (q-1)$. در این حالت $w(G:<\theta>) = w(G)$، که در آن θ یک اتومورفیسم گراف G است.

همچنین اگر $q \equiv 1(4)$ و $3 \nmid (q-1)$، آنگاه $h\Big(PSL_3(q)\Big) \geq 2$.

حدس ما بر این است که اگر $q \equiv 1(4)$ و $3 \nmid (q-1)$ آنگاه $h(PSL_3(q)) = 2$. در راستای تقویت این حدسیه در حالات ۲۹ و $q = 17$ ثابت کرده‌ایم $h(PSL_3(q)) = 2$ و در حالات $q = 11, 13, 19, 23, 25, 27$ ثابت کرده‌ایم $h(PSL_3(q)) = 1$. این نتایج در مقالات زیر به چاپ رسیده است:

1. M.R. Darafsheh and N.S. Karamzadeh. *A characterization of groups $PSL(3, q)$ by their element orders for certain q*. Korean J. Comput. & Appl. Math. Vol. **9** (2002), No. 2, 409-421.

2. M.R. Darafsheh and N.S. Karamzadeh. *On the set of order elements of $G = PSL(3, q)$ when extended by a subgroup of $Out(G)$*. Alg. Groups and Geom. **18** (2001), 473-484.

در ابتدا برخود لازم می‌دانم که از استاد راهنمایم جناب آقای دکتر درفشه جهت زحمات بی‌دریغشان در طول این دوران سپاسگزاری نمایم. همچنین از جناب آقای دکتر مقدم‌فر به خاطر بحث‌های علمی ارزنده‌ای که با ایشان داشتم و از جناب آقای دکتر ذکایی بخاطر علاقه‌اشان نسبت به موضوع تحقیقات این رساله تشکر می‌کنم.

در خاتمه از پدرم که معلم و مشوق همیشگی من بوده است قدردانی می‌نمایم.

فهرست مطالب

فهرست جدولها

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم اولیه

در این فصل به معرفی تعدادی از گروههای خطی پرداخته و بعضی از خواص آنها را که مورد نیاز است، ذکر خواهیم کرد.

۱.۱ گروههای خطی عام و خاص و گروههای تصویری

تعریف ۱.۱.۱ اگر V فضای برداری روی میدان F باشد، مجموعهٔ کلیه تبدیلات خطی وارون پذیر V را با $GL(V,F)$ نمایش داده و آن را گروه خطی عام می‌نامیم. در حالتی که $\dim V = n$، قرار می‌دهیم $GL(V,F) = GL_n(F)$. همچنین اگر $F = GF(q)$ میدان گالوای q عضوی باشد، گروه خطی عام را با $GL_n(q)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۲.۱.۱ مجموعه کلیهٔ تبدیلات خطی $GL_n(F)$ با دترمینان یک را گروه خطی خاص نامیده با $SL_n(F)$، و در حالتی که F میدان گالوای q عضوی باشد آن را با $SL_n(q)$ نمایش می‌دهیم.

قضیه ۳.۱.۱

الف) $|GL_n(q)| = q^{\binom{n}{2}} \prod_{i=1}^{n}(q^i - 1)$

ب) $|SL_n(q)| = q^{\binom{n}{2}} \prod_{i=2}^{n}(q^i - 1)$

اثبات. به [38] صفحه ۱۶ مراجعه شود. □

لم ۴.۱.۱

الف) $Z(GL_n(F)) = \{\lambda I | \lambda \in F^\times\}$

ب) $Z(SL_n(F)) = \{\lambda I | \lambda \in F^\times, \lambda^n = 1\}$

اثبات. به [38] صفحه ۱۶ مراجعه شود. □

تعریف ۵.۱.۱ قرار می‌دهیم $Z = Z(GL_n(F))$ و $\frac{GL_n(F)}{Z}$ را گروه خطی عام تصویری نامیده و با $PGL_n(F)$ نمایش می‌دهیم و همچنین قرار می‌دهیم

$$PSL_n(F) = \frac{SL_n(F)}{Z \cap SL_n(F)}$$

و آن را گروه خطی خاص تصویری می‌نامیم. در حالتی که $F = GF(q)$ آنها را به ترتیب با $PGL_n(q)$ و $PSL_n(q)$ نمایش می‌دهیم.

لم ۶.۱.۱ $PGL_n(F)$ دارای زیرگروه نرمالی یکریخت با $PSL_n(F)$ است.

اثبات. برای اثبات قرار می‌دهیم $Z = Z(GL_n(F))$. با استفاده از قضیه یکریختی گروهها داریم:

$$\frac{ZSL_n(F)}{Z} \cong \frac{SL_n(F)}{Z \cap SL_n(F)} = PSL_n(F)$$

از طرفی $\frac{GL_n(F)}{Z} \trianglelefteq \frac{ZSL_n(F)}{Z}$ و در نتیجه خواهیم داشت:

$$\frac{ZSL_n(F)}{Z} \trianglelefteq PGL_n(F). \qquad \square$$

تعریف ۷.۱.۱ یک تبدیل شبه خطی فضای V روی میدان F عبارت است از نگاشت $T : V \longrightarrow V$ با شرایط زیر:

(۱) $T(u+v) = T(u) + T(v)$

$$T(\lambda v) = \lambda^{\tau} T(v) \qquad (۲)$$

به طوری که u و v بردارهای دلخواهی از V و τ یک خود ریختی میدان F و $\lambda \in F$ عضوی دلخواه باشد.

تعریف ۸.۱.۱ گروه تبدیلات شبه خطی وارون پذیر V را با $\Gamma L(V,F)$ نمایش داده آن را گروه شبه خطی می‌نامیم. اگر $V = V_n(F)$ و $F = GF(q)$ آنگاه این گروه را با $\Gamma L_n(q)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۹.۱.۱ گروه $\dfrac{\Gamma L_n(F)}{Z}$ را گروه شبه خطی تصویری نامیده با $P\Gamma L_n(F)$ نمایش می‌دهیم. در حالتی که $F = GF(q)$ این گروه را با $P\Gamma L_n(q)$ نشان می‌دهیم.

لم ۱۰.۱.۱

$$GL(V,F) \trianglelefteq \Gamma L(V,F) \qquad (۱)$$

$$\frac{\Gamma L(V,F)}{GL(V,F)} \cong \mathrm{Aut}\,(F) \qquad (۲)$$

$$|\Gamma L_n(p^m)| = m|GL_n(p^m)| \qquad (۳)$$

اثبات. برای اثبات کافیست $f : \Gamma L(V,F) \to \mathrm{Aut}\,(F)$ را چنین تعریف کنیم که $f(T_\sigma) = \sigma^{-1}$. این نگاشت، همومورفیسم پوشاست و $\mathrm{Ker}\, f = GL(V,F)$. بنابراین

$$GL(V,F) \trianglelefteq \Gamma L(V,F)$$

و بنا به قضیه یکریختی گروهها $\dfrac{\Gamma L(V,F)}{GL(V,F)} \cong \mathrm{Aut}\,(F)$. حال اگر قرار دهیم $F = GF(p^m)$ آنگاه

$$\frac{\Gamma L_n(p^m)}{GL_n(p^m)} \cong \mathrm{Aut}\,(GF(p^m)) \cong Z_m$$

و در نتیجه خواهیم داشت:

$$|\Gamma L_n(p^m)| = m|GL_n(p^m)|. \quad \square$$

۲.۱ ترانسوکشن‌ها و ارتباط آنها با گروه $SL_n(F)$

تعریف ۱.۲.۱ اگر H یک ابر صفحه در فضای n بعدی V باشد، تبدیل خطی $T \neq I$ یک ترانسوکشن به ابر صفحهٔ H نامیده می‌شود، هرگاه:

الف) $T(v) = v$، به ازای هر $v \in H$

ب) $T(v) - v \in H$، به ازای هر $v \in V$.

لم ۲.۲.۱ کلیه ترانسوکشن‌ها عناصری از $SL_n(F)$ می‌باشند.

اثبات. به [38] صفحه ۳۱ مراجعه شود. □

لم ۳.۲.۱ اگر H یک ابر صفحه در $V_n(F)$ باشد، تابعک خطی $\mu : V_n(F) \to F$ وجود دارد که $H = \operatorname{Ker} \mu$.

اثبات. بردار $v \in V_n(F) - H$ را در نظر می‌گیریم، خواهیم داشت

$$V_n(F) = H \oplus < v >$$

حال نگاشت $\mu : V_n(F) \to F$ را چنین تعریف می‌کنیم: $\mu(h) = 0$، برای هر $h \in H$ و $\mu(v) = 1$، در این صورت μ تابعک خطی مورد نظر است. □

قضیه ۴.۲.۱ اگر T ترانسوکشنی با ابر صفحه H و μ یک تابعک خطی روی $V_n(F)$ باشد، به طوری که $H = \operatorname{Ker} \mu$، در این صورت بردار $0 \neq a \in H$ وجود دارد به طوری که، $T(v) = v - \mu(v)a$ برای هر $v \in V_n(F)$. بنابراین قرار می‌دهیم $T = T_{a,\mu}$.

اثبات. به [38] صفحه ۳۰ مراجعه شود. □

قضیه ۵.۲.۱ $SL_n(F)$، $n > 1$، بوسیله ترانسوکشن‌ها تولید می‌شود.

اثبات. به [38] صفحه ۳۳ مراجعه شود. □

۳.۱ ساده بودن گروه $PSL_n(F)$

تعریف ۱.۳.۱ فرض کنید G یک گروه و Ω یک مجموعه باشد و G روی Ω عمل کند، در این صورت زیر مجموعهٔ B از Ω یک بلوک نامیده می‌شود هر گاه به ازای هر $g \in G$ داشته باشیم $B^g = B$ یا $B^g \cap B = \varnothing$، که $B^g = \{b^g | b \in B\}$.

بلوکهای Ω و $\varnothing$ و زیر مجموعه‌های تک عضوی $\{\alpha\}$، که $\alpha \in \Omega$ را بلوکهای بدیهی می‌نامیم.

تعریف ۲.۳.۱ اگر G به طور انتقالی روی Ω عمل کند، آنگاه G را یک گروه جایگشتی اولیه گوئیم اگر و تنها اگر بلوک‌هایش بلوکهای بدیهی باشند. در غیر اینصورت G را گروه جایگشتی غیر اولیه می‌نامیم.

لم ۳.۳.۱ هر گروه جایگشتی ۲ـانتقالی اولیه است.

اثبات. به [38] صفحه ۴۱ مراجعه شود. □

قضیه ۴.۳.۱ فرض کنید $(G|\Omega)$ انتقالی باشد، در این صورت $(G|\Omega)$ اولیه است اگر و فقط اگر G_α برای هر $\alpha \in \Omega$ زیر گروه ماکسیمال G باشد.

اثبات. به [38] صفحه ۴۲ مراجعه شود. □

قضیه‌ای از ایواساوا وجود دارد که محکی برای ساده بودن گروههای جایگشتی می‌باشد و در مورد گروههای خطی بکار می‌رود، زیرا این گروهها روی مجموعه نقاط تصویری، گروههای جایگشتی هستند.

قضیه ۵.۳.۱ (ایواساوا) فرض کنید $(G|\Omega)$ اولیه است و داشته باشیم:

الف) $G = G'$

ب) به ازای هر $\alpha \in \Omega$، گروه G_α شامل زیر گروه نرمال و حل پذیری چون R است، به طوری که $G =< R^g | g \in G >$، $(R^g = g^{-1}Rg)$.