بسم الله الرحمن الرحيم

وزارت علوم، تحقیقات و فناوری

دانشگاه شهید مدنی آذربایجان

دانشکده علوم پایه

پایان‌نامه

جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

رشته ریاضی کاربردی

حل عددی معادله بلک - شولز با استفاده از روش‌های تفاضلات متناهی و بررسی آنالیز پایداری آن

استاد راهنما

دکتر مجتبی رنجبر

پژوهشگر

ویدا پورصادق

مهر ۱۳۹۳

تبریز - ایران

تقدیم به

مادر صبورم و پدر مهربانم

پروردگارا...

ای کریمی که بخشنده عطایی و ای حکیمی که پوشنده خطایی و ای صمدی که از ادراک خلق جدایی و ای احدی که در ذات و صفات بی‌همتایی و ای خالقی که راهنمایی و ای قادری که خدایی را سزایی، جان ما را صفای خود ده و دل ما را هوای خود ده و چشم ما را ضیای خود ده و ما را آن ده که آن به و مگذار ما را به که و مه.

الهی، عذر ما بپذیر، بر عیب‌های ما مگیر.

الهی، ترسانم از بدی خود؛ بیامرز مرا به خوبی خود.

الهی، در دل‌های ما جز تخم محبت خود مکار و بر تن و جان‌های ما جز الطاف و مرحمت خود منگار و بر کشته‌های ما جز باران رحمت خود مبار.

سپاس گزاری...

سپاس خداوندی را که به من آموخت در لحظه‌های شادی شکرگزار باشم و فراموش نکنم، تمام داشته‌ها و دانسته‌هایم از لطف بی‌منت اوست و آموخت که در لحظه‌های اندوهم صبور باشم که همه غم‌ها رفتنی است و سربلند کسی است که مطیع تقدیر و حکمت الهی باشد.

اینک به پاس لطف الهی که پایان‌نامه حاضر، آماده شده است بر خود واجب می‌دانم از حمایت‌های بی‌دریغ استاد راهنمای بزرگوار و اندیشمند خود جناب آقای دکتر **مجتبی رنجبر** سپاس گزاری نمایم.

از جناب آقای دکتر **ناصر آقازاده** و جناب آقای دکتر **علی خانی** نیز سپاس گزارم که قبول زحمت فرمودند و داوری این تحقیق را به عهده گرفتند.

در پایان، بوسه می‌زنم بر دستان خداوندگاران مهر و مهربانی، پدر و مادر عزیزم و بعد از خدا، ستایش می‌کنم وجود مقدس‌شان را و تشکر می‌کنم از برادران عزیزم و خواهر مهربانم به پاس عاطفه سرشار و گرمای امیدبخش وجودشان، که در این سردترین روزگاران، بهترین پشتیبان من بودند.

ویدا پورصادق

مهر ۱۳۹۳

فهرست مطالب

چکیده

این پایان‌نامه به بررسی پایداری جواب‌های عددی معادله دیفرانسیل جزئی بلک - شولز می‌پردازد. در این پایان‌نامه شبه‌گسسته‌سازی روی شبکه‌های غیر یکنواخت را با استفاده از روش تفاضلات متناهی مرکزی مرتبه دوم، بررسی می‌کنیم. آنالیز پایداری مورد بحث در این پایان‌نامه، در واقع بررسی این سوال مهم است که آیا برای ماتریس‌های شبه‌گسسته A، نرم $\|e^{tA}\|$ برای ماتریس نمائی tA برای ($t \geq ۰$) می‌تواند کراندار باشد؟

در این پایان‌نامه کران بالای مناسبی برای $\|e^{tA}\|$ روی شبکه‌های غیریکنواخت اثبات می‌شود. برای این منظور از نرم‌های طیفی مانند نرم ماکزیمم استفاده می‌شود.

واژه‌های کلیدی: معادله دیفرانسیل جزئی بلک - شولز، شبه‌گسسته‌سازی، روش تفاضلات متناهی، شبکه‌های غیر یکنواخت، پایداری، انقباض.

پیشگفتار

مسایل مالی یکی از زمینه‌هایی است که بیشترین رشد و تغییر را در تجارت جهانی دارد و اختیارات مالی بیشترین استفاده را در زمینه امور مالی دارند. طی دهه گذشته، تحقیق در رابطه با قراردادهای اختیار از ارزش بالایی برخوردار بوده است. انواع مختلفی از مدل‌های ریاضی برای قیمت‌گذاری اختیارات وجود دارد که مهم‌ترین آن‌ها مدل قیمت‌گذاری اختیارات بلک - شولز است.

در سال ۱۹۷۳ ، فیشر بلک و میرن شولز و رابرت مرتون فرمول قیمت‌گذاری اختیارات را گسترش دادند و مقاله‌ای با عنوان «قیمت‌گذاری اختیارات و بدهی‌های سهام» در ژورنال مربوط به سیاست اقتصادی منتشر کردند. [۳] در همان سال، آقایان بلک و شولز مساله قیمت‌گذاری اختیارات را به معادله دیفرانسیل جزئی جدید (PDE) با ضرایب متغیر تبدیل کردند. ایده اصلی بلک و شولز در رابطه با ساختار اوراق بهادار بدون ریسک با به کارگیری شرایط مرزی، قیمت اختیار و سهام قرار داشت. مدل بلک - شولز نقش اساسی و محوری در موفقیت مهندسی مالی در دهه‌های ۱۹۸۰ و ۱۹۹۰ داشته است. «میرن شولز» و «رابرت مرتون» در سال ۱۹۹۷ به خاطر اهمیت مدل فوق، موفق به دریافت جایزه نوبل اقتصادی شدند.

لازم به ذکر است که معادلات با مشتقات جزئی از جمله معادلات مهم هستند که اغلب در مسائل فیزیکی و محاسبات مهندسی استفاده می‌شوند ولی تحلیل اکثر این معادلات مشکل می‌باشد. بنابراین محققین به دنبال حل عددی این معادلات هستند و روش‌های عددی گوناگون برای حل این معادلات ارائه کرده‌اند. از جمله روش‌های عددی که برای حل مسائل مربوط به قیمت‌گذاری اختیارات مورد استفاده قرار می‌گیرد، عبارتند از: مدل دوجمله‌ای، روش‌های تفاضلات متناهی و روش شبیه‌سازی مونتو - کارلو [۱].

این پایان‌نامه که بر اساس مقاله‌های [۱۴، ۲۳] و مراجع [۹، ۲۵] تنظیم شده است، به بررسی آنالیز پایداری روش تفاضلات متناهی برای حل معادله دیفرانسیل جزئی بلک - شولز می‌پردازد.

برای اولین بار آقای شوارتز [۵]، تکنیک تفاضلات متناهی را برای حل قیمت اختیار سهام به کار برد. این روش، معادله دیفرانسیل جزئی بلک - شولز را به وسیله تقریب معادله دیفرانسیل در ناحیه

[1] Monto Carlo simulation method

جواب توسط یک دستگاه معادله جبری حل می‌کرد.

ساختار کلی این پایان‌نامه به شرح زیر است:

در فصل اول، تعاریف و مقدمات لازم بیان شده است. فصل دوم، شامل مفهوم قدم‌زدن تصادفی قیمت دارایی پایه، لم ایتو و نحوه به دست آوردن معادله دیفرانسیل جزئی بلک - شولز با استفاده از لم ایتو می‌باشد. فصل سوم، به بیان مدل ریاضی بلک شولز می‌پردازد. در فصل چهارم، روش‌های تفاضلات متناهی برای حل معادله دیفرانسیل جزئی بلک - شولز بیان شده است و در آخر، در فصل پنجم، پایداری روش تفاضلات متناهی مرکزی مرتبه دوم برای حل معادله دیفرانسیل جزئی بلک - شولز بیان شده است.

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم پیش‌نیاز

در این فصل تعاریف و مفاهیمی ارائه می‌شوند که دانستن آن‌ها برای دانستن فصل‌های بعدی لازم است.

۱.۱ مفاهیم و اصطلاحات مالی

تعریف ۱.۱. توافق‌نامه‌ای مبتنی بر خرید یا فروش دارایی با قیمت مشخص را **قرارداد** گویند.

تعریف ۲.۱. دارایی مورد نیاز در قرارداد را **دارایی پایه** گویند، که در این پایان‌نامه سهام فرض شده است.

تعریف ۳.۱. **اختیار معامله** قراردادی است بین خریدار و فروشنده، به‌نحوی که خریدار از فروشنده اختیار معامله، حق خرید یا فروش یک دارایی را با یک قیمت معین خریداری می‌کند. به‌عبارت دیگر حق اختیار معامله به دارنده آن، این حق (نه الزام) را می‌دهد که معامله‌ای را در آینده انجام دهد.

به‌طور کلی دو نوع حق اختیار معامله بر اساس نوع قرارداد وجود دارد:

تعریف ۴.۱. **قرارداد اختیار خرید** [۱] به دارنده آن، این حق را می‌دهد تا دارایی موضوع قرارداد مثلا سهام را در تاریخ معینی ویا قبل از آن و با قیمت مشخصی خریداری نماید.

تعریف ۵.۱. **قرارداد اختیار فروش** [۲] به دارنده آن، حق فروش دارایی موضوع قرارداد را در تاریخ معین ویا قبل از آن و با قیمت مشخص می‌دهد.

---

[۱] call option

[۲] put option

تعریف ۶.۱. خرید اختیار معامله نیاز به یک مبلغ حق شرط دارد، که این مبلغ را **قیمت اختیار** گویند.

به بیان دیگر در اختیار معامله همانند تمام قراردادها، هر طرف امتیازی را به طرف مقابل اعطاء می‌کند، خریدار اختیار به فروشنده مبلغی تحت عنوان حق شرط پرداخت می‌کند که در واقع همان قیمت اختیار معامله می‌باشد. فروشنده نیز حق خرید یا فروش دارایی مذکور را با یک قیمت معین به خریدار اعطاء می‌نماید.

تعریف ۷.۱. قیمت فعلی دارایی پایه در بازار را **قیمت جاری** [۳] (S) گویند.

تعریف ۸.۱. قیمت تعیین شده در قرارداد را قیمت توافقی یا **قیمت اعمال** [۴] (K) گویند.

تعریف ۹.۱. تاریخ ذکر شده در قرارداد را اصطلاحا تاریخ انقضا، تاریخ اعمال، تاریخ توافقی یا **تاریخ سررسید** [۵] (T) گویند.

تعریف ۱۰.۱. **عایدی یا بازده** [۶] یک اختیار معامله خرید در سررسید به‌صورت

$$max(S_T - K, 0)$$

و برای اختیار معامله فروش به‌صورت

$$max(K - S_T, 0)$$

می‌باشد.

هر اختیار معامله از نظر نحوه اعمال می‌تواند آمریکایی و یا اروپایی باشد. تفاوت این دو نوع اختیار ربطی به منطقه‌ی جغرافیایی ندارد.

تعریف ۱۱.۱. **اختیار معامله آمریکایی** [۷] در هر زمان از طول دوره عمر قرارداد تا سررسید و یا در تاریخ سررسید قابل اعمال است، یعنی لازم نیست سرمایه‌گذار تا مدت زمان سررسید اختیار معامله صبر کند. [۶]

تعریف ۱۲.۱. **اختیار معامله اروپایی** [۸] تنها در تاریخ سررسید آن قابل اعمال است. [۶]

[۳] stock price

[۴] strike price - Exercise price

[۵] Expiration date - Exercise date - Strike date - Maturity date

[۶] Payoff

[۷] American option

[۸] European option

تذکر: بیشتر اختیار معامله‌هایی که در بازارهای بورس مبادله می‌شوند، از نوع آمریکایی هستند، ولی تجزیه و تحلیل اختیار معامله‌های اروپایی عموما آسان‌تر از اختیار معامله‌های نوع آمریکایی است و برخی فرمول‌های اختیار معامله‌های آمریکایی از اختیار معامله‌های اروپایی نظیر آنها استنتاج می‌گردد.

تعریف ۱.۱۳. در هر قرارداد اختیار معامله، دو طرف **معامله‌گر** وجود دارد:
یک طرف معامله کننده، سرمایه‌گذاری است که موقعیت خرید اتخاذ کرده و اختیار معامله را خریده است و در طرف دوم قرارداد، سرمایه‌گذار موقعیت فروش اتخاذ کرده است؛ یعنی اختیار معامله را صادر کرده یا فروخته است.

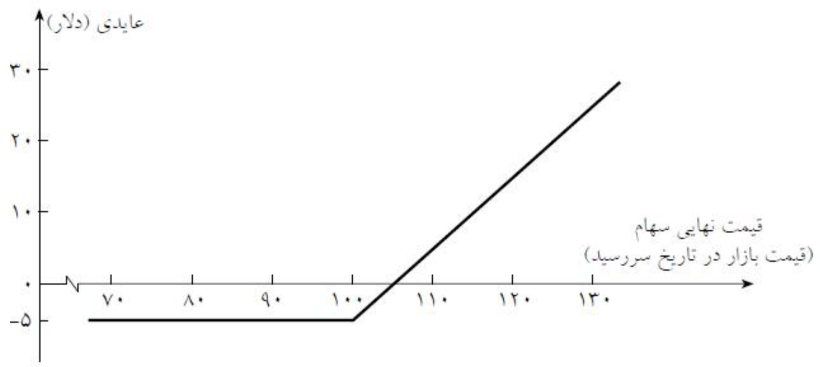
نکته: خریدار یا دارنده اختیار معامله، هیچ‌گونه تعهدی در قبال قرارداد ندارد، این در حالی است که فروش یا صدور اختیار معامله برای فروشنده تعهدآور است. بدین معنی که فروشنده، مبلغ قیمت اختیار را دریافت می‌کند و در مقابل متعهد می‌شود که در صورت اعمال اختیار معامله توسط خریدار، به مفاد قرارداد عمل کند.

تعریف ۱.۱۴. به‌طور کلی چهار موقعیت برای یک اختیار معامله وجود دارد:
۱. موقعیت خرید در قرارداد اختیار خرید
۲. موقعیت فروش در قرارداد اختیار خرید
۳. موقعیت خرید در قرارداد اختیار فروش
۴. موقعیت فروش در قرارداد اختیار فروش

برای درک بهتر، مفهوم اختیار معامله را با مثال‌هایی توضیح می‌دهیم:

قرارداد اختیار خرید

موقعیت سرمایه‌گذاری را در نظر بگیرید که یک اختیار خرید اروپایی با قیمت اعمال ۱۰۰ دلار برای خرید ۱۰۰ سهم مایکروسافت را در اختیار دارد.
فرض کنید قیمت سهم در حال حاضر ۹۸ دلار و عمر اختیار معامله چهار ماهه و قیمت اختیار معامله بابت خرید یک سهم ۵ دلار می‌باشد.
با این اطلاعات، مبلغ سرمایه‌گذاری اولیه ۵۰۰ دلار است. از آنجایی که اختیار معامله مذکور از نوع اروپایی می‌باشد لذا فقط در سررسید آن قابل اعمال است.
اگر در طول عمر اختیار معامله (چهار ماه) قیمت سهام به کمتر از ۱۰۰ دلار کاهش یابد، به نفع خریدار است که اختیار خرید را به اجرا نگذارد (دلیلی وجود ندارد سهامی را که می‌توان با قیمت

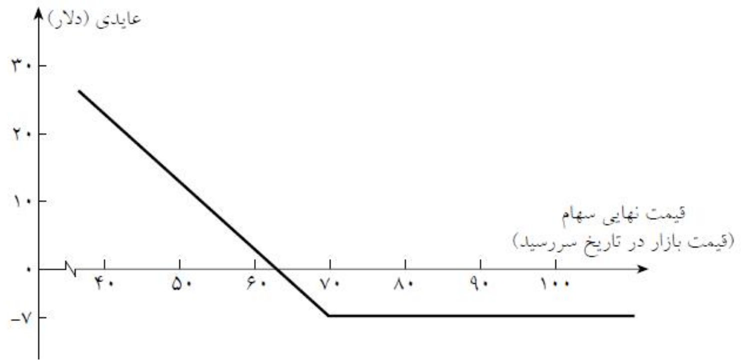


شکل ۱.۱: سود و زیان خرید اختیار خرید اروپایی با قیمت اختیار = ۵ و قیمت اعمال = ۱۰۰

کمتر از ۱۰۰ دلار در بازار خریداری نمود با استفاده از حق اختیار معامله، به ۱۰۰ دلار بخریم).
بنابرین در این حالت، سرمایه‌گذار مبلغ ۵۰۰ دلار سرمایه اولیه را از دست می‌دهد.
اگر قیمت سهام در تاریخ سررسید، به بالاتر از ۱۰۰ دلار افزایش یابد، به نفع خریدار است که اختیار خرید را به اجرا بگذارد.
به عنوان مثال فرض کنید که قیمت سهام به ۱۱۵ دلار افزایش یابد. با اعمال اختیار خرید، سرمایه‌گذار می‌تواند صد سهم را به قیمت هر سهم ۱۰۰ دلار بخرد. اگر سرمایه‌گذار فوق، بلافاصله سهام خریداری شده با استفاده از حق اختیار معامله را در بازار بفروشد، به ازای هر سهم، ۱۵ دلار و در مجموع ۱۵۰۰ دلار با صرفنظر از هزینه معاملات، درآمد نصیب سرمایه‌گذار می‌شود.
برای محاسبه سود خالص، باید قیمت خرید اختیار معامله (هزینه اولیه) را از درآمد حاصله کسر نماییم که در این‌صورت، سود خالص سرمایه‌گذار معادل ۱۰۰۰ دلار می‌شود.
نمودار شکل ۱.۱ ، سود خالص یا زیان دارنده اختیار خرید سهام را با تغییرات قیمت سهام در زمان سررسید اختیار معامله، برای این مثال نشان می‌دهد.
نکته: گاهی اوقات، سرمایه‌گذار با وجود این‌که در مجموع متحمل زیان می‌شود ولی اختیار معامله را اعمال می‌کند. فرض کنید که در همان مثال بالا، قیمت هر سهم در پایان مدت زمان اختیار معامله به ۱۰۲ دلار برسد.
سرمایه‌گذار با اعمال اختیار معامله، درآمدی معادل ۲۰۰ دلار نصیب خود می‌سازد یعنی:

$$(۱۰۲ - ۱۰۰) \times ۱۰۰ = ۲۰۰$$

برای محاسبه سود یا زیان خالص، هزینه خرید اختیار معامله را از درآمد فوق کسر می‌کنیم. در این صورت سرمایه‌گذار متحمل زیان خالصی معادل ۳۰۰ دلار می‌گردد. در حالی‌که عدم اعمال اختیار معامله، باعث ایجاد زیان ۵۰۰ دلاری برای سرمایه‌گذار می‌شود. مقایسه این دو نشان می‌دهد که در این حالت اعمال اختیار معامله حتی با وجود زیان خالص بهتر از عدم اعمال آن است.



شکل ۲.۱: سود و زیان خرید اختیار فروش اروپایی با قیمت اختیار = ۷ و قیمت اعمال = ۷۰

قرارداد اختیار فروش

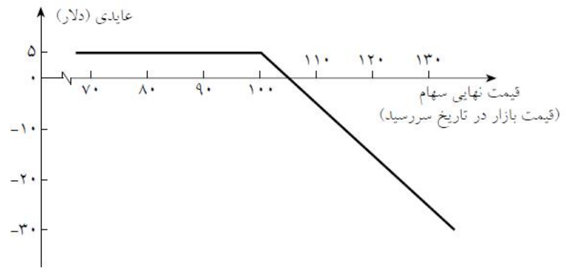
فرض کنید سرمایه‌گذاری، یک اختیار فروش اروپایی برای فروش صد سهم را با قیمت توافقی ۷۰ دلار می‌خرد. اگر قیمت جاری سهم را ۶۵ دلار، مهلت انقضای اختیار معامله را سه ماهه و قیمت اختیار معامله برای فروش یک سهم را ۷ دلار فرض کنیم، سرمایه‌گذاری اولیه این شخص، بابت خرید اختیار فروش سهام مذکور ۷۰۰ دلار می‌شود. از آنجا که اختیار معامله مزبور از نوع اروپایی است، لذا فقط در صورتی اعمال می‌شود که در تاریخ سررسید اختیار معامله، قیمت سهام کمتر از ۷۰ دلار باشد.

فرض نمایید که در تاریخ سررسید اختیار معامله، قیمت سهام به ۵۵ دلار کاهش یابد در آن صورت با اعمال اختیار معامله، سرمایه‌گذار می‌تواند هر سهم را به قیمت ۵۵ دلار از بازار خریداری نموده و تحت اختیار معامله به قیمت ۷۰ دلار بفروشد و عایدی معادل ۱۵ دلار بابت هر سهم و در مجموع ۱۵۰۰ دلار نصیب خود سازد (مجددا فرض می‌کنیم که هزینه معاملات صفر است).

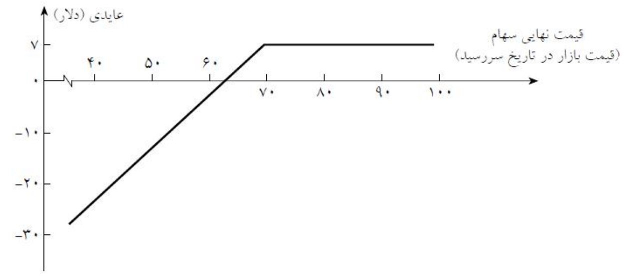
اما در صورتی که قیمت سهام به بالاتر از ۷۰ دلار افزایش یابد، اختیار معامله خریداری شده فاقد ارزش می‌شود و سرمایه‌گذار مبلغ ۷۰۰ دلار سرمایه‌گذاری اولیه را از دست می‌دهد. نمودار شکل ۲.۱، سود خالص یا زیان دارنده اختیار فروش معامله را با توجه به قیمت‌های مختلف احتمالی سهام در تاریخ سررسید اختیار معامله، برای این مثال نشان می‌دهد.

تذکر: خریدار اختیار خرید امیدوار است که قیمت سهم افزایش یابد، در حالی‌که خریدار اختیار فروش انتظار دارد که قیمت سهم کاهش یابد.

سود یا زیان فروشنده اختیار، درست عکس سود یا زیان خریدار اختیار می‌باشد. نمودارهای ۳.۱ و ۴.۱ تغییرات سود و زیان صادر کننده اختیار را در مقایسه با سود و زیان دارنده اختیار در نمودارهای شکل ۱.۱ و ۲.۱ نشان می‌دهد.



شکل ۳.۱: سود و زیان فروش اختیار خرید اروپایی با قیمت اختیار = ۵ و قیمت اعمال = ۱۰۰



شکل ۴.۱: سود و زیان فروش اختیار فروش اروپایی با قیمت اختیار = ۷ و قیمت اعمال = ۷۰

تعریف ۱۵.۱. نرخ بهره بدون ریسک [۹] (r) ، یکی از عوامل تاثیرگذار بر قیمت اختیار معامله است. نحوه تاثیر این نرخ بر قیمت قرارداد اختیار معامله چندان روشن نیست ولی به هر حال چیزی که در این مورد مشخص است این است که با افزایش نرخ بهره در اقتصاد، نرخ رشد مورد انتظار قیمت سهام نیز افزایش می‌یابد. از طرف دیگر، افزایش نرخ بهره، موجب کاهش ارزش فعلی جریانات نقدی دارندگان اختیار معامله خواهد شد. تاثیر همزمان این دو پدیده، باعث می‌شود که قیمت اختیار معامله فروش با افزایش نرخ بهره کاهش یابد.
در حالی‌که تاثیر افزایش نرخ بهره بر قیمت اختیار خرید به گونه دیگری است؛ به این صورت که افزایش نرخ بهره باعث افزایش نرخ رشد مورد انتظار قیمت سهام می‌شود و در نتیجه قیمت اختیار خرید افزایش می‌یابد.
بنابرین می‌توانیم نتیجه بگیریم که افزایش نرخ بهره می‌تواند موجب افزایش قیمت اختیار خرید شود.

تعریف ۱۶.۱. نوسان‌پذیری قیمت [۱۰] (σ) ، نشان‌دهنده میزان تغییرپذیری قیمت دارایی پایه است که در ریاضیات مالی **تلاطم** نیز می‌نامند. به بیانی دیگر نوسان‌پذیری یک سهم، معیاری برای اندازه‌گیری عدم اطمینان در مورد بازده‌های آن سهم می‌باشد.
هرگاه درجه نوسان‌پذیری افزایش یابد، احتمال کاهش یا افزایش قیمت سهام نیز افزایش می‌یابد.

[۹] Risk free interest rate

[۱۰] Volatility

برای سهامدار، احتمال افزایش قیمت سهام ممکن است در مجموع با احتمال کاهش قیمت سهام معادل باشد، در حالی‌که وضعیت برای شخصی که صاحب اختیار خرید یا فروش سهام است، فرق می‌کند. دارنده اختیار خرید، از افزایش قیمت سهام سود می‌کند و حال آن‌که ریسک کاهش قیمت سهام که متوجه اوست، محدود می‌باشد؛ زیرا بیشترین زیان دارنده اختیار خرید، همان قیمت اختیار است. به‌همین‌ترتیب، دارنده اختیار فروش از کاهش قیمت، سود می‌برد، اما ریسک افزایش قیمت سهام که متوجه اوست، محدود می‌باشد. نتیجه این‌که قیمت اختیارهای خرید و فروش به ازای افزایش درجه نوسان‌پذیری قیمت دارایی، افزایش می‌یابد. [۲، ۹]

سه اصطلاح رایج در مورد اختیار معامله‌ها عبارتند از: با قیمت [۱۱] یا سودمند، بی‌قیمت [۱۲] یا بی‌ارزش، به‌قیمت [۱۳] یا بی‌تفاوت.

تعریف ۱.۱۷. یک اختیار معامله **سودمند**، اختیاری است که برای دارنده آن در صورت اعمال فوری این حق، جریان نقدی مثبتی به ارمغان می‌آورد.

تعریف ۱.۱۸. یک اختیار معامله **بی‌تفاوت**، اختیار معامله‌ای است که در صورت اجرای فوری آن، هیچ جریان نقدی مثبت یا منفی برای دارنده این ورقه به همراه ندارد.

تعریف ۱.۱۹. یک اختیار معامله **بی‌ارزش**، اختیار معامله‌ای است که در صورت اعمال فوری آن، جریان نقدی منفی برای دارنده اوراق اختیار معامله به ارمغان می‌آورد.

تعریف ۱.۲۰. **ارزش ذاتی** [۱۴] یک اختیار معامله عبارت است از حداکثر مقدار بین صفر و ارزش اختیار معامله در صورتی که بلافاصله اعمال شود.

۱.۲ مفاهیم آنالیزی و احتمالی

تعریف ۱.۲۱. هر معادله بر حسب $x, y, z, ..., u$ و مشتقات جزئی u نسبت به $x, y, z, ...$ را یک **معادله دیفرانسیل جزئی** (PDE) نامند. فرم کلی یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی برای تابع $u(x, y, z, ...)$ به صورت زیر است:

$$F(u, x, y, z, ..., u_x, u_y, u_z, ..., u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}, ...) = 0$$

تعریف ۱.۲۲. به بالاترین مرتبه مشتق جزئی ظاهر شده در PDE، مرتبه PDE گویند.

[۱۱] In the money

[۱۲] At the money

[۱۳] Out of the money

[۱۴] Intrinsic value

تعریف ۲۳.۱. متغیر تصادفی، تابعی است که به هر پیشامد از فضای نمونه‌ای S عددی حقیقی نسبت دهد.

تعریف ۲۴.۱. حرکت براونی ، یک نوع حرکت تصادفی است که برای اولین بار بشولیه از آن برای مدل‌سازی تغییر قیمت سهام در زمان استفاده کرد. به عبارت دقیق‌تر او فرض کرد که قیمت سهام به شکل غیرقابل پیش‌بینی تصادفی است. سپس قراردادهای اختیار خرید و فروش را با استفاده از آن قیمت‌گذاری کرد.

تعریف ۲۵.۱. حرکت براونی هندسی، فرایند تصادفی پیوسته مربوط به لگاریتم کمیت تصادفی است که از حرکت براونی پیروی می‌کند، به این فرایند حرکت براونی هندسی گویند. [۱۲، ۱۶]

تعریف ۲۶.۱. مدل بلک - شولز، فرمول ریاضی طراحی شده برای قیمت اختیار است به‌طوری‌که به صورت تابعی با متغیرهای قیمت سهام، قیمت اعمال، نوسان‌پذیری، زمان سررسید (تاریخ انقضا) و سود سهام و نرخ بهره بدون ریسک برای اختیارات اروپایی توسط فیشر بلک، میرن شولز و رابرت مرتون کشف شده‌است.

تعریف ۲۷.۱. فرض کنید (Ω, F, P) فضای احتمال باشد و فرض کنید Y_t، $t \in \mathbb{R}_+$ فرایند تصادفی باشد. به‌طوری‌که $Y : \Omega \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ به‌علاوه فرض کنید:

$$a(Y_t, t) : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \quad , \quad b(Y_t, t) : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$$

توابع انتگرال‌پذیر تصادفی برای $t \in \mathbb{R}_+$ باشند. بنابراین معادله زیر، **معادله دیفرانسیل تصادفی** (SDE) نامیده می‌شود.

$$dY_t = a(Y_t, t)dt + b(Y_t, t)dX_t \tag{۱.۱}$$

توجه کنید که معادله (۱.۱) حتما باید به صورت معادله انتگرال تصادفی زیر باشد:

$$Y_t = Y_۰ + \int_۰^t a(Y_s, s)ds + \int_۰^t b(Y_s, s)dX_s \tag{۲.۱}$$

توابع $a(Y_t, t)$ و $b(Y_t, t)$ به‌ترتیب توابع جابجایی (همرفت یا وزش) و انتشار (پخش) نامیده می‌شوند.

تعریف ۲۸.۱. فرایند ایتو یعنی فرایند تصادفی Y_t در معادله زیر صدق کند:

$$dY_t = a(Y_t, t)dt + b(Y_t, t)dX_t$$

تعریف ۲۹.۱. فرض کنید $b = b(t)$ تابع انتگرال‌پذیر تصادفی باشد به‌طوری‌که دنباله b_n، $n \in N$ در رابطه زیر صدق کند:

$$\lim_{n\to\infty} E\left(\int_۰^T (b(t) - b_n(t))^۲ dt\right) = ۰$$

در این‌صورت، **انتگرال ایتو** برای تابع b به‌صورت زیر تعریف می‌شود:
$$\int_{\circ}^{T} b(t)dX_t = \lim_{n\to\infty}\int_{\circ}^{T} b_n(t)dX_t$$

تعریف ۳۰.۱. **تابع توزیع** متغیر تصادفی X که با $F_X(x)$ نشان داده می‌شود، تابعی است بر مجموعه اعداد حقیقی که به‌صورت زیر تعریف می‌شود:
$$F_X(x) = P(X \leq x)$$

تعریف ۳۱.۱. متغیر تصادفی X دارای **توزیع نرمال** است اگر و تنها اگر چگالی احتمال آن به‌صورت

$$n(x;\mu,\sigma) = \frac{۱}{\sigma\sqrt{۲\pi}}e^{-\frac{۱}{۲}(\frac{x-\mu}{\sigma})^{۲}} \qquad -\infty < x < \infty$$

باشد که در آن $\sigma > ۰$.

تعریف ۳۲.۱. توزیع نرمال با $\mu = ۰$ و $\sigma = ۱$، را **توزیع نرمال استاندارد** گویند.

تعریف ۳۳.۱. (i): تابع $y = f(x)$ در نقطه $x_{\circ}$ **پیوسته** است، اگر $f(x_{\circ})$ تعریف شود و
$$\lim_{x\to x_{\circ}} f(x) = f(x_{\circ})$$

(ii): تابع $f(x)$ در بازه $(a,b) = \{x|a < x < b\}$ **پیوسته** است، اگر $f(x)$ در هر نقطه از بازه (a,b) پیوسته باشد.

تعریف ۳۴.۱. فرض کنید F تابع معلومی از x و y و مشتقات y باشد. آن‌گاه معادله زیر، **معادله دیفرانسیل معمولی صریح** از مرتبه n نامیده می‌شود.
$$F(x,y,y',...,y^{(n-۱)}) = y^{(n)}$$

در کل، **معادله دیفرانسیل معمولی ضمنی** از مرتبه n به صورت زیر است:
$$F(x,y,y',...,y^{(n)}) = ۰$$

تعریف ۳۵.۱. تابع حقیقی $\|.\|$ تعریف شده بر فضای برداری X را **نرم** نامیم، اگر در سه خاصیت زیر صدق کند:

۱)به ازای هر $x \in X$ داشته باشیم: $\|x\| \geq ۰$ و $\|x\| = ۰$ اگر و فقط اگر $x = ۰$.

۲)به ازای هر $x, \alpha \in \mathbb{R}$ داشته باشیم: $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$.

۳)به ازای هر $x, y \in X$ داشته باشیم: $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$. (خاصیت نامساوی مثلثی)

تعریف ۳۶.۱. برای بردار x نرم‌های برداری به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\|x\|_1 = \sum_{j=1}^{n} |x_j|$$

$$\|x\|_\infty = \max_{1\leq j\leq n} |x_j|$$

$$\|x\|_2 = (\sum_{j=1}^{n} |x_j|^2)^{\frac{1}{2}}$$

تعریف ۳۷.۱. فرض کنید $1 \leq p < \infty$ باشد، p - نرم به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\|x\|_p = (\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p)^{1/p}$$

تعریف ۳۸.۱. یک **نرم ماتریسی** روی $\mathbb{R}^{m\times n}$ تابعی است از $\mathbb{R}^{m\times n}$ به $\mathbb{R}$ به‌طوری‌که در شرایط زیر صدق کند:

۱)به ازای هر $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$، $\|A\| \geq 0$. بعلاوه $\|A\| = 0$ اگر و فقط اگر $A = 0$.

۲)به ازای هر $\alpha \in \mathbb{R}$ و $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$، $\|\alpha A\| = |\alpha|\|A\|$.

۳)به ازای هر $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$، $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$. (خاصیت نامساوی مثلثی)

تعریف ۳۹.۱. نرم‌های ماتریسی به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\|A\|_1 = \max_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^{m} |a_{i,j}|$$

$$\|A\|_\infty = \max_{1\leq i\leq m} \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|$$

$$\|A\|_2 = (\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} |a_{i,j}|^2)^{\frac{1}{2}}$$

تعریف ۴۰.۱. هرگاه تعریف نرم برای ماتریس‌ها بسط داده شود در این حالت به نرم ماتریسی اصطلاحا **نرم القایی ماتریس** گفته می‌شود.

تعریف ۴۱.۱. فرض کنید A یک ماتریس مربعی باشد و $\|.\|$ نرم ماتریسی القایی باشد. در این صورت **نرم لگاریتمی** ماتریس A به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mu[A] = \lim_{h\downarrow 0^+} \frac{\|I + hA\| - 1}{h}$$

که در آن I ماتریس همانی هم‌بعد با ماتریس A است و h عدد حقیقی مثبت است.

همان‌طور که از تعریف نرم ماتریسی می‌دانیم $\|A\|$ همواره برای $A \neq 0$ مثبت است، اما این امر برای