دانشگاه پیام نور

مرکز تهران شرق

پایان نامه

برای دریافت مدرک کارشناسی ارشد

در رشته ریاضی محض

گرایش آنالیز

عنوان:

مدول میانگین پذیری تقریبی جبرهای باناخ

نگارنده:

حمیدرضا اداوی

استاد راهنما:

داود ابراهیمی بقا

استاد مشاور:

پروانه نجمدی

اردیبهشت ماه ۱۳۹۳

(گواهی اصالت ، نشر و حقوق مادی و معنوی اثر)

اینجانب حمید رضا اداوی دانشجوی ورودی سال ۱۳۸۹ مقطع کارشناسی ارشد رشته ریاضی گواهی می نماید چنانچه در پایان نامه خود از فکر ، ایده و نوشته دیگری بهره گرفته ام با نقل قول مستقیم یا غیر مستقیم منبع و ماخذ آن نیز در جای مناسب ذکر کرده ام . بدیهی است مسئولیت تمامی مطالبی که نقل قول دیگران نباشد بر عهده خویش می دانم و جوابگوی آن خواهم بود.

دانشجو تایید می نماید که مطالب مندرج در این پایان نامه (رساله) نتیجه تحقیقات خودش می باشد . و در صورت استفاده از نتایج دیگران مرجع آن را ذکر نموده است.

نام نام خانوادگی دانشجو حمید رضا اداوی

تاریخ و امضا ۹۳/۶/۷

اینجانب حمید رضا اداوی دانشجوی ورودی سال ۸۹ ۱۳مقطع کارشناسی ارشد رشته ریاضی گواهی می نمایم چنانچه بر اساس مطالب پایان نامه خود اقدام به انتشار کتاب و........................... نمایم ضمن مطلع نمودن استاد راهنما با نظر ایشان نسبت به نشر مقاله ، کتاب و................ و به صورت مشترک و با نام استاد راهنما مبادرت نمایم.

نام نام خانوادگی دانشجو حمید رضا اداوی

تاریخ وامضا ۹۳/۶/۷

کلیه حقوق مادی مترتب از نتایج مطالعات ، آزمایشات و نوآوری ناشی از تحقیق موضوع این پایان نامه متعلق به دانشگاه پیام نور می باشد.

شهریور ماه ۱۳۹۳

یاد خدا:

خداوندا تورا شکر می گویم به خاطر همه ی

داده هایت ،

نداده هایت،

و

گرفته هایت.

چراکه

داده هایت نعمت است،

نداده هایت حکمت است

و

گرفته هایت امتحان.

یاد ایام:

از پاییز ۱۳۶۱ شمسی که وارد دبستان شدم تا زمستان ۱۳۹۲ که با یاری خداوند مهربان در شرف دریافت دومین مدرک کارشناسی ارشد خود هستم بیش از سه دهه می گذرد.

بی شک در طول سه دهه تحصیل و کار افراد و اشخاص بسیاری تلاش نموده و در پیشرفت و موفقیت من تاثیرگذار بوده اند.ابتدا خانواده ، آشنایان ،دوستان ،همبازی ها و همسایگان به عنوان محیط غیر آموزشی و سپس دبستان و مدرسه و دبیرستان و دانشگاه و عوامل و کارکنان این مراکز به عنوان محیط اصلی آموزش و تعلیم و تربیت ،عوامل تاثیر گذار در این فرآیند بوده اند.

برخود واجب می دانم که از زحمات همه ی عزیزان دوست داشتنی که دوستم داشتند و به خاطر اثبات دوستیشان در این راه یار و یاور من بوده اند تقدیر و تشکر نمایم و به رسم ادب و دوستی از آموزگاران مهربان دبستان شهید فریدنی ، دبیران محترم مدرسه راهنمایی شهید مفتح ، دبیران ارجمند دبیرستان امام خمینی (ره) ، مدرسین فرهیخته مرکز تربیت معلم شهید میرشاکی الیگودرز، اساتید ارجمند دانشگاه آزاد اراک،

اساتید گرامی موسسه آموزش عالی آموزش و پژوهش مدیریت و برنامه ریزی استان لرستان و اساتید محترم دانشگاه پیام نور مرکز تهران شرق و عوامل و دست اندرکاران این مراکز تقدیر و تشکر نمایم.

امیدوارم که به عنوان یک معلم با خدمت صادقانه به این عزیزان و به فرزندان عزیز این مرز و بوم بتوانم پاسخ گوی لطف و محبت همه ی این عزیزان باشم.ضمن آرزوی سلامت و سعادت و عاقبت به خیری برای همه ی این عزیزان دوست داشتنی از خداوند منان خواستارم که سعادت دانشجو و دانش پژوه بودن را در طول عمر نصیب من کرده و لحظاتی را که صرف یادگیری و آموزش می کنم را از بهترین لحظه ی زندگی من قرار دهد.

خدایا چنان کن سرانجام کار توخشنود باشی و من رستگار

یاد استاد:

استاد ارجمند و فرهیخته جناب آقای دکتر سید هاشم پروانه مسیحا :

از اینکه در کمال صبر و شکیبایی و با دقت و حوصله ی استادانه این پایان نامه را به داوری نشسته ، صفحه به صفحه و خط و به خط مطالعه فرموده و اشکالات علمی و نگارشی بنده را متذکر شد ه اید بسیار سپاسگزارم. آنچه مسلم است زحمات اساتید ارجمند راهنما و مشاور و تلاش های بنده در کنار قضاوت و داوری شما استاد فرزانه و گرانقدر تکمیل گردیده که زحمات شما استاد عزیز موجب امتنان و قدردانی است.

اساتید ارجمند و فرهیخته جناب آقای دکتر داود ابراهیمی بقا و سرکار خانم دکتر پروانه ی نجمدی

زحمات شما و راهنمایی های استادانه و خردمندانه ی شما در تهیه و تنظیم این پایان نامه قابل تقدیر و تشکر و امتنان است بدینوسیله از زحمات شما در طول تهیه ی این پایان نامه و همچنین کلیه ی

زحمات شما در طول این دوره ی تحصیلی تشکر و قدردانی می نمایم و از اینکه در طول این دوره ی تحصیلی افتخار شاگردی شما را داشته ام برخود می بالم. برای شما و تمامی اساتید دلسوز ی که در راه اعتلای علم و فرهنگ و دانش ایران عزیز تلاش و کوشش می کنند آرزوی سلامت، سعادت، پیروزی و بهروزی دارم.

در پایان به رسم شاگردی و متعلم بودن از زحمات دیگر **اساتید ارجمند دانشگاه پیام نور، سرکار خانم دکتر خدیجه احمدی آملی ، سرکار خانم دکتر فرح ناجی و جناب آقای دکتر فیصل حسنی** که در طول این دوره افتخار شاگردیشان را داشته ام تقدیر و تشکر نموده و برای این عزیزان آرزوی سلامت و سعادت دارم.

تا جهان را بقا بود ممکن   عز و جاه تو در ترقی باد

یاد یار مهربان:

همیشه در موفقیت و پیشرفت هر مردی ، زنی دخیل است و من نیز از این قاعده مستثنا نیستم.

همسر مهربان و همکار ارجمندم:

به خاطر تمام زحماتی که در طول این دوره ی تحصیلی متحمل شدید، همه ی وقت هایی که تنها بودید و به تنهایی به کارها رسیگی می کردید و نقش دوگانه ی پدر و مادر را برای فرزندانمان بازی کردید، همه ی وقت هایی که بدرقه ام کردید و همه وقت هایی که به استقبالم آمدید، همه ی تشویق ها و همراهی هایتان و همه ی تلاشی که در کمک به من نمودید ، همه ی سکوت ها و تحمل سختی ها ، به خاطر همه ی گفته ها و ناگفته هاوبه خاطر .... از شما تقدیر و تشکر می نمایم.

مطمئن باش که از هیچ تلاشی برای جبران زحمات شما و خوشبختی در زندگیمان دریغ نخواهم کرد و امیدوارم لیاقت این همه لطف و محبت شما را داشته باشم.

پرندگان به برکه های آرام پناه می برند و انسان ها به دل های پاک ،

زیرا دل های پاک چون برکه های آرامند ، بی انتها و قابل اعتماد.

"قلب پاکت پایدار"

تقدیم :

تقدیم به پرنده های کوچک خوشبختی ،

تقدیم به آنهایی که وجود کوچکشان تحولات بزرگی در زندگیمان ایجاد کرده است.

تقدیم به فرزندان دلبندم : علی و کسری

فرزندان عزیزم ، علی جان و کسری عزیز ، تمام لحظاتی که در کنارتان نبودم به خاطر حضور در صحنه ای بود که امیدوارم روزی به این بودنم افتخار کنید.

فرزندان عزیزم :

در آینده به جای پاسخ دادن به سوال " علم بهتر است یا ثروت" یقین بدانید که تحصیل علم و هنر و کمالات یکی از بهترین راه های رسیدن به خوشبختی واقعی است .و من یقین دارم که :

" درخت تو گر بار دانش بگیرد   به زیر آوری چرخ نیلوفری را"

امیدوارم در آینده رهروان شایسته و بایسته ای برای راه مقدس و با ارزش علم ودانش و فرهنگ و هنر باشید.

آرزومند بهترین آرزوها و سعادت وسلامت و خوشبختی شما هستم.

" زندگی صحنه ی یکتای هنر مندی ماست

هرکه آید هنر خویش عیان سازد و از صحنه رود

صحنه پیوسته به جاست

خرم آن نغمه که مردم بسپارند به یاد."

چکیده:

کلیدواژه :

میانگین پذیری ، میانگین پذیری تقریبی، جبر باناخ ، مدول میانگین پذیری تقریبی، نیم گروه

در این پایان نامه به مفاهیم میانگین پذیری ، میانگین پذیری تقریبی و مدول میانگین پذیری تقریبی جبر های باناخ پرداخته شده است.چون بحث اصلی مدول میانگین پذیری تقریبی جبرهای باناخ بوده است بیشتر به تعریف و قضایای مربوط به آن پرداخته ایم.ابتدا مشتق درونی را تعریف کرده و بر اساس این تعریف جبر باناخ A را به طور تقریبی میانگین پذیر نامند اگر برای هر A-مدول باناخ X، هر مشتق $D: A \to X^*$ به طور تقریبی درونی باشد.در مقایسه با میانگین تقریبی جبر های باناخ نشان داده ایم که مدول میانگین پذیری تقریبی یکنواخت (انقباضی) و مدول میانگین پذیری (انقباضی)برای جبر های باناخ تعویض پذیر معادل هستند.

در نهایت به نتایج زیر رسیده ایم:

۱)برای نیم گروه معکوس پذیر S با مجموعه عناصر خود توان E ، $L^1(S)$ یک$L^1(E)$ مدول میانگین پذیر تقریبی (انقباضی) است اگر و تنها اگر S میانگین پذیر باشد.

۲) برای نیم گروه معکوس پذیر S با مجموعه عناصر خود توان E ، $L^1(S)^{**}$ مدول میانگین پذیر است اگر و $S/$ متناهی باشد. ≈ تنها اگر گروه گسسته

۳) برای نیم گروه معکوس پذیر S با مجموعه عناصر خود توان E ، $L^1(S)^{**}$ یک $L^1(E)$- مدول به طور

$S/$ متناهی باشد. ≈تقریبی میانگین پذیر است اگر و تنها اگر

نتایج بالا که به عنوان نمونه ذکر شد و دیگر قضایا در مورد مدول میانگین پذیری تقریبی جبر های باناخ از جمله موضوعاتی است که در این پایان نامه به آنها پرداخته شده است.

فهرست مطالب

مقدمه

مفهوم میانگین پذیری برای اولین بار در سال ۱۹۲۹ توسط *فن نیومن* برای گروه توپولوژیک گسسته مطرح شد و در سال ۱۹۵۰ ام.ام. *دی* این مفهوم را برای گروه توپولوژیک (هاسدورف موضعا فشرده)در حالت کلی بیان کرد.

وجود $L^{\infty}(G)$ درواقع گروه توپولوژیک G را میانگین پذیر گویند هرگاه یک میانگین پایای چپ روی

داشته باشد.جانسون در سال ۱۹۷۲ نشان داد که گروه توپولوژیک G میانگین پذیر است اگر و تنها اگر برای مدول باناخ X ، هر مشتق $D : A \to X^*$ درونی باشد.$L^1(G)$ هر

اگر S یک نیم گروه توپولوژیک (هاسدورف موضعا فشرده) باشد مفهوم میانگین پذیری چپ (راست) برای S به این صورت مطرح است که S را میانگین پذیر چپ (راست) گویند هرگاه یک میانگین پایای چپ (راست) روی LUC (S) یا RUC(S) وجود داشته باشد.

S را میانگین پذیر گوییم هرگاه هم میانگین پذیر چپ و هم میانگین پذیر راست باشد.مفهوم میانگین پذیری تقریبی جبرهای باناخ در سال ۲۰۰۴ توسط قهرمانی و لوی [۹و۸] معرفی و نتایج مربوط به آن در سطح گسترده مطالعه شد.جبر باناخ A را به طور تقریبی میانگین پذیر گویند هرگاه به ازای هر A-مدول باناخ X، هر مشتق$D : A \to X^*$ به طور تقریبی داخلی باشد.واضح است که اگر A یک جبر باناخ میانگین پذیر باشد آن گاه A به طور تقریبی میانگین پذیر است ، اما عکس این مطلب درست نیست.در این پایان نامه ثابت شده است که اگر A یک جبر باناخ متناهی بعد باشد در این صورت میانگین پذیری و میانگین پذیری تقریبی Aمعادلند.(۱۱-۲)

قهرمانی و لوی ساختار میانگین پذیری تقریبی (انقباضی) جبر های باناخ را از میان روش های مختلف ازگروه موضعا فشرده ی G به طورتقریبی میانگین $L^1(G)$توصیف کرده اند و نشان دادند که گروه جبری

پذیر است اگر و تنها اگر G میانگین پذیر باشد.(۲۸-۳) .این موضوع برای نیم گروه گسسته درست نیست [۱۰].

ایندید ، گئورگ و چانگ نشان دادند که برای چرخه ی نیم گروه های C و نیم گروه های جبری $L^1(C)$ به طور تقریبی میانگین پذیر نیست.[۱۰] .به عبارت دیگر برای هر نیم گروه گسسته S ، میانگین پذیری تقریبی$L^1(S)$ ، میانگین پذیری S را نشان می دهد.[۹].

یکی دیگر از نتایج کار این است که میانگین پذیری تقریبی$L^1(S)$ از یک نیم گروه معین S روی گروه Gبه شرط هایی از میانگین پذیری G می رسد.[۳]

قضیه ی ۲۷-۲ نشان می دهد که مفهوم میانگین پذیری تقریبی و انقباضی برای جبر های باناخ معادل هستند و مثال هایی از میانگین پذیری تقریبی جبر های باناخ که میانگین پذیر نیستند ارائه شده است. همچنین مثال هایی از نیم گروه های جبری $L^1(S)$ که به طور تقریبی میانگین پذیر هستند اما میانگین پذیر نیستند داده شده است.[۶] *در این پایان نامه همچنین به این موضوع پرداخته شده است که در میانگین پذیری تقریبی به مفهوم مدولی چه ارتباطی بین مدول میانگین پذیری تقریبی $L^1(S)$ و میانگین پذیری نیم گروه S وجود دارد*؟برای یافتن پاسخ این سوال در **فصل ۱** تمام تعاریف و قضایای مقدماتی مورد نیاز در حد امکان بیان شده و اثبات بسیاری از قضایا و لم ها نیز بیان شده است.در فصل ۱ بیشتر به مفهوم میانگین پذیری پرداخته ایم.در **فصل ۲** مطالب معطوف به میانگین پذیری تقریبی جبرهای باناخ است که به عنوان مثال در ۱۱-۲ معادل بودن میانگین پذیری تقریبی و میانگین پذیری جبر های باناخ در بعضی شرایط اثبات شده است.در قضیه ی ۲۷-۲ معادل بودن میانگین پذیری تقریبی و انقباضی جبرهای باناخ بیان شده است.

در فصل ۳ *به موضوع اصلی یعنی مدول میانگین پذیری تقریبی جبرهای باناخ پرداخته شده است و به عنوان مثال ثابت شده است که برای نیم گروه معکوس پذیر S با مجموعه عناصر خود توان E ، $L^1(S)$ یک $L^1(E)$- مدول به طور یکنواخت میانگین پذیر تقریبی است اگر و تنها اگر S میانگین پذیر باشد.*مطالب مربوط به میانگین پذیری تقریبی جبر های باناخ و نیم گروه S در این فصل به طور کامل توضیح داده شده است.

در پایان لازم به ذکر است که تهیه و تنظیم این مطالب بدون راهنمایی های استادانه و مشاوره های دلسوزانه ی اساتید ارجمند راهنما ومشاور امکان پذیر نبوده که جای تقدیر و تشکر و امتنان داردو به طور مسلم اگر عیب و ایرادی در کار دیده می شود از طرف بنده بوده که نتوانسته ام به خوبی زحمات اساتید فرهیخته را پاسخ دهم.و به قول شاعر:

سعدی وطرف صحرا ، صوفی و کنج خلوت صاحب هنر نگیرد بر بی هنر بهانه

در پایان امیدوارم مطالب تهیه شده در حد توان ناچیز بنده مفید بوده و مورد استفاده قرار گیرد.

فصل اول

تعاریف

و

قضایای مقدماتی

بخش

اول

۱-۱ -۱تعریف:

فضای برداری[۱] مختلط X را یک فضای خطی نرمدار[۲] نامند اگر به هر $x\in X$ یک عدد حقیقی نامنفی مانند $\|x\|$ به نام نرم x چنان مربوط باشد که:

الف) به ازای هر xو y در X : $\|x+y\|\leq\|x\|+\|y\|$

ب) اگر $x\in X$ و α اسکالر باشد: $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$

ج) $\|x\| = ۰$ تساوی $x = ۰$ را ایجاب نماید.

1-۱-۲ تعریف:

هر فضای باناخ[۳] یک فضای خطی نرمدار است که با متر تعریف شده به وسیله ی نرمش تام باشد.یعنی هر دنباله ی کشی در آن همگرا باشد.

به عنوان مثال فضای هیلبرت[۴] یک فضای باناخ است.

1-۱-3 تعریف:

فضای برداری Xروی میدان Fرا یک جبر[۵] گویند هرگاه یک عمل دوتایی $(x,y)\rightarrow yx$ از $X\times X$ به توی X که آن را ضرب نامند ، وجود داشته باشد به طوری که به ازای

هر xوyو$z \in X$ و $\alpha\in F$ داشته باشیم:

الف) $x(zy) = (yx)z$

ب) $(x+y)\ z = zx+zy$

[1]- vector spac e
[2] - normed linear space
[3] - Banach space
[4] - Hilbert's space
[5] -Algebra

ج) $x(y+z)=yx+zx$

د) $\alpha(yx)=(\alpha x)y$

همچنین گویند جبر X دارای عضو همانی است هر گاه $e\in X$ موجود باشد که برای هر $x\in X$ شرط مقابل برقرار باشد: $ex=xe=x$.

بر حسب اینکه $F=\mathbb{C}$ یا $F=\mathbb{R}$ ، X را به ترتیب جبر مختلط یا جبر حقیقی نامند. جبر X را جابجایی نامند هر گاه به ازای هر xو$y\in X$ شرط مقابل برقرار باشد : $xy=yx$.

۱-۱-4 تعریف:

یک جبر باناخ[۶] عبارت است از یک جبر نرم دار A روی میدان F به قسمی که:

الف) A یک فضای باناخ باشد.

ب) نرم A به ازای هر xو$y\in A$ در رابطه ی $\|xy\|\le\|x\|.\|y\|$ صدق کند.

اگر شرط زیر نیز برقرار باشد آن گاه A را یک جبر باناخ یکدار گویند.

$\forall x\in A$ ، $\exists\, e\in A \ni xe=ex=x$ در این صورت $\|e\|=1$

۱-1-5 مثال هایی از جبر باناخ:

الف) ساده ترین مثال از یک جبر باناخ جابجایی $\mathbb{C}$ است.

[6] - Banach algebra

ب) فرض کنید X یک فضای توپولوژیک[7] هاسدورف و فشرده باشد.اگر ضرب روی C(X) را به صورت $(f.g)(x)=f(x)g(x)$ تعریف شودآن گاه C(X) با نرم سوپریمم زیر تبدیل به یک جبر باناخ می شود:

$$\|f\| = \mathrm{SUP}\ \{ |f(x)|\ | x \in X \}$$

همچنین C(X) یک جبر باناخ یکدار است.

ج) اگر A=B(x) مجموعه ی تمام عملگرهای کراندار[8] روی X باشد و ضرب روی A را ضرب عملگرها و نرم را نرم عملگرها به صورت زیر باشد آن گاه A یک جبر باناخ یکدار است .

$$\|T\| = \sup\{\|T(x)\|\ |\ \|x\| \leq 1\}$$

۱-۱-۶ تعریف:

زیر مجموعه ی غیر تهی I از جبر باناخ A را یک ایده آل[9] نامند هرگاه I یک زیر فضای A باشد و به ازای هر $y \in I$ و $x \in A$ شرط مقابل برقرار باشد: $xy \in I$ و yx.

هرگاه فقط $xy \in I$ آن گاه I را یک ایده ال چپ[10] A می نامند و هرگاه فقط $yx \in I$ آن گاه I رایک ایده آل راست[11] A گویند.

۱-۱-۷ تعریف:

ایده آل چپ I از A را مدولی[12] گویند اگر عنصر $e \in A$ موجود باشد به طوری که:

[7] - Topological space
[8] - Bounded operator
[9] - Ideal
[10] - left ideal
[11] - Right ideal

$A(1-e) \subseteq I$

$a-ae \in I \, , \, a+I=ae+I$

به عبارت دیگر e یک عضو یکه ی راست A به پیمانه ی I باشد. به طریق مشابه ایده آل راست مدولی تعریف می شود.

۱-۱-۸ تعریف:

فرض کنید Xو Y دو فضای نرم دار باشند. مجموعه ی تمام نگاشت های خطی[13] کراندار از X به توی Y را با (Xو Y) B یا L(X,Y) نشان می دهند.این مجموعه همراه با جمع و ضرب اسکالر معمولی توابع و نرم زیر یک فضای نرم دار است :

$$\|T\|=\sup\{\|T(x)\|:x\in X,\|x\|\leq 1\} \qquad ,T\in B\,(X,Y)$$

مجموعه ی (Xو $\mathbb{C}$) B را فضای دوگان[14] X می نامند و آن را با X^* نشان می دهند.

عناصر X^*را تابعک های خطی کراندار روی X. می نامند. به همین ترتیب دوگان های مراتب بالاتر X یعنی X^{**}و X^{***} و ...تعریف می شوند.

با توجه به آنچه بیان شد چون فضای متریک $\mathbb{C}$ کامل است ، X^* همواره یک فضای باناخ است.

۱-۱-۹ تعریف:

عنصر a از جبر A را پوچ توان گویند اگر به ازای یک $k \in \mathbb{N}$ شرط زیر برقرار باشد: $a^k = 0$.

عنصر a را خود توان گویند اگر $a^2 = a$.

---

[12] -Module
[13]- Linear mapping
[14] --Dual space

۱-۱-۱۰ تعریف:

فرض کنید XوY دو فضای نرم دار باشند.گوییم XوY به طور طولپا[15] یکریختند هرگاه یک نگاشت خطی $T: X \longrightarrow Y$ وجود داشته باشد به طوری که پوشا و حافظ نرم باشد. حافظ نرم بودن به این معنی است که برای هر $x \in X$ داشته باشیم: $\|T(x)\|=\|x\|$

در این شرایط T را یک یکریختی طولپا[16] بین XوY نامند.

۱-۱-۱۱ تعریف:

فرض کنید X یک فضای نرم دار باشد و $x \in X$. با توجه به شرایط زیر:

$\begin{cases} \hat{x}: X^* \longrightarrow \mathbb{C} \\ f \longrightarrow f(x) \end{cases}$, $\hat{x}(f) = f(x)$ ثابت می شودکه $\hat{x} \in X^{**}$ ونگاشت $\begin{cases} \wedge : X \to X^{**} \\ x \to \hat{x} \end{cases}$

یک نگاشت خطی و حافظ نرم خواهد بود. این نگاشت را نشانده ی طبیعی از X به توی X^{**} می نامند. در واقع تحت این نگاشت فضای نرم دار X با زیر فضای $\{\hat{x}: x \in X\}$

از X^{**} که آن را با $\widehat{X}$ نشان می دهند به طور طولپا یکریخت خواهد بود.

۱-۱-۱۲ نتیجه ای از قضیه ی هان - باناخ[17]:

فرض کنید X یک فضای موضعا محد ب[18] (L.C.S) باشد.اگر M یک زیر فضای X باشد و $x_0 \in X$ به طوری که$x_0 \notin \overline{M}$ آن گاه $f \in X^*$ وجود دارد به طوری که $f(x_0)=۱$

[15] --Isometrically isomorphic
[16] - Isometric isomorphism
[17] --Hahn-Banach
[18] - Locally convex space

و برای هر $x \in M$: $f(x) = 0$. (برهان [۴])

۱-۱-۱۳ تعریف:

فرض کنید X یک فضای نرم دار باشد.ضعیف ترین توپولوژی رویX را که هر $f \in X^*$ نسبت به آن پیوسته باشد را توپولوژی ضعیف[19] (w- توپولوژی) روی X می نامند.

۱-۱-۱۴ تعریف:

فرض کنید X یک فضای برداری همراه با توپولوژی هاسدورف[20] T باشد.گویند X یک فضای برداری توپولوژیک[21] (T.V.S) است هر گاه اعمال فضای برداری یعنی جمع و ضرب اسکالر نسبت به توپولوژی T پیوسته باشند.

مثال: هر فضای نرم دار یک T.V.S است.

۱-۱-۱۵ تعریف:

فرض کنید X یک T.V.S باشد. فضای دوگان X را با X^* نشان می دهند که عبارت است از مجموعه ی تمام نگاشت های خطی پیوسته ازX به $\mathbb{C}$.(تابعک های خطی پیوسته روی X).

X^* همراه با جمع و ضرب اسکالر معمولی توابع یک فضای برداری است.

[19] - Weak topology
[20] - Hausdorff topology
[21] - Topological vector space (T.V.S)