بسم الله الرحمن الرحيم

۸۷/۱/۱۰۵۲۹۹
۸۷/۱۱/۱۹

دانشکده علوم پایه

عــــنوان:

روابط بین نامساوی تغییراتی گون برداری و مسائل بهینه سازی

جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

رشته ریاضی محض

استاد راهنما :

دکتر محسن علیمحمدی

استاد مشاور :

دکترماشاا... متین فر

نگارش :

قاسم محمودپور

بهار ۸۷

ریاضیات، ما را از آنچه بشری است و در حوزه مقدورات بشر قرار دارد فراتر می برد؛ به قلمرو ضرورت مطلق، که نه فقط دنیای واقعی بلکه هر دنیای ممکن می بایستی ناگزیر خود را با آن تطبیق دهد.

(برتراند راسل)

با ادب و احترام تقدیم به:

اسطوره صبر و استقامت

پدرم

دریای بی پایان عشق

مادرم

دوستان بی نهایت نزدیک به خودم

خواهرم و برادرانم

تشکر و قدرانی از:

استاد ارجمندم جناب آقای دکتر محسن علیمحمدی که در تمام مراحل انجام این پایان نامه راهبر و راهنمایم بودند و در این مدت نه تنها دانش که درس اخلاق، تواضع و جوانمردی و در یک کلمه درس انسانیت به من آموختند و همچنین استاد ارجمندم جناب آقای دکتر ماشاء الله متین فر که مشاوره ارزشمند ایشان راهگشایم بود و همچنین از اساتید مدعو آقای دکتر تقوی و آقای دکتر محمد زاده که زحمت مطالعه پایان نامه و حضور در جلسه دفاع را قبول نمودند و تشکر ویژه از آقای پروفسور قاسم علیزاده افروزی که زحمت حضور در جلسه دفاع را قبول نمودند و از همه دوستان دانشجو و همه کسانی که خیرخواهانه حضور داشتند.

فهرست مطالب

چکیده:

در این پایان نامه تعریفهای اولیه در مورد مسائل نامساوی تغییراتی گون برداری و مسائل بهینه سازی را بیان می کنیم و سپس این تعاریف را به فضای باناخ و فضاهای ناهموار تعمیم می دهیم.

در فصل اول روابط بین نامساوی تغییراتی گون برداری و مسائل بهینه سازی را بیان کرده و جواب مسائل نامساوی تغییراتی گون برداری ضعیف و نقاط موثر ضعیف را تحت شرایطی از تابع شبه محدب گون ثابت می کنیم.

در فصل دوم این روابط را در فضای باناخ تحت فرض محدب گون بودن وقتی دامنه تعریف تابع یک مخروط محدب باشد بیان می کنیم.

در فصل سوم تعمیمی از توابع محدب گون مخروطی مانند محدب گون نما K- ناهموار و شبه محدب گون K – ناهموار، شبه محدب گون K – ناهموار قوی و شبه محدب گون K- ناهموار اکید را تعریف و روابط بین آنها را ثابت می کنیم.

در فصل چهارم تابع $type-I$ تعمیم یافته را بر روی تابعهای در فضای باناخ تعریف می کنیم و شرایط کافی بهینه کردن را بدست می آوریم و بعضی نتیجه ها را در دوگانگی ثابت می کنیم.

فصل اول:

تعاریف و مفاهیم مقدماتی

بخش اول: مروری بر آنالیز تابعی

بخش دوم: درباره نامساوی تغییراتی گون برداری

بخش سوم: روابط بین نامساوی تغییراتی گون برداری و مسائل بهینه سازی

مقدمه:

در این فصل تعریفهای اولیه در مورد مسائل نامساوی تغییراتی گون‌برداری و مسائل بهینه‌سازی برداری را بیان می‌کنیم و سپس روابط بین نامساوی تغییراتی گون برداری و مسائل بهینه‌سازی را بیان می‌کنیم و همچنین نقاط بحرانی برداری را تعریف می‌کنیم. و جواب مسائل نامساوی تغییراتی گون‌برداری ضعیف و نقاط موثر ضعیف را تحت شرایطی از تابع شبه محدب گون اثبات می کنیم.

۱. ۱. مروری بر آنالیز تابعی

تعریف ۱. ۱. ۱ : فرض کنیم X یک مجموعه و τ گردایه ای از زیر مجموعه های X باشد یعنی $\tau \subseteq p(x)$. τ را یک توپولوژی در X گوییم در صورتی که تابع شرایط سه گانه زیر را داشته باشد.

۱) $\phi \in \tau \quad , X \in \tau$

۲) اگر $A, B \in \tau$ آنگاه $A \cap B \in \tau$

۳) به ازای هر زیر گردایه τ مانند A ، $\cup A \in \tau$

اعضای τ را مجموعه های باز می نامیم. مطابق این اصطلاح یک توپولوژی در X عبارت است از گردایه هایی از زیرمجموعه های X، موسوم به مجموعه های باز، به طوریکه X , ϕ هر دو بازند و مقطع متناهی و اجتماع دلخواه از مجموعه های باز نیز باز است(از (۲) معلوم می شود همواره اگر

$$A_1 , \dots , A_n \in \tau \text{ آنگاه } \bigcap_{i \leq 1}^{n} A_i \in \tau$$

فرض کنیم X یک مجموعه و τ یک توپولوژی در X باشد در این صورت زوج مرتب (X , τ) را یک فضای توپولوژیک نامیم.

تعریف ۱. ۱. ۲ : فرض کنیم V یک فضای برداری روی میدان F باشد تابع $\|.\|: V \to R$ را با خواص :

۱) برای هر $\alpha \in V$ $\quad \|\alpha\| \geq 0$

۲)برای هر $\alpha \in V$ $\qquad \|\alpha\| = 0 \quad \leftrightarrow \alpha = 0$

۳)برا هر $\alpha \in V$; $c \in F$ $\qquad \|C\alpha\| = |C| \ \|\alpha\|$

۴)برای هر $\alpha, \beta \in V$ $\qquad \| \alpha + \beta \| \leq \| \alpha \| + \| B \|$

یک تابع نرم گوییم. V همراه با این تابع را یک فضای برداری نرمدار یا به طور خلاصه یک فضای نرمدار می نامیم.

تعریف ۱. ۱. ۳ : i)فضای متری X را کامل گوییم، در صورتی که هر دنباله کشی در آن همگرا باشد. فضای نرمدار کامل V را فضای با ناخ می گوییم.

ii) فرض کنید V یک فضای برداری روی C باشد. منظور از یک ضرب داخلی روی V نگاشتی مانند $f : V \times V \to C$ با توصیف $(x, y) \to < x, y >$ که به ازای هر $x, x', y \in V$ و $\alpha \in C$ اتحادهای زیر برقرار باشد.

۱) $\quad < x + x', y > = < x, y > + < x', y >$

۲) $\quad < \alpha x, y > = \alpha < x, y >$

۳) $\quad < x, x > \in R$ و لذا به ویژه $< \overline{x, y} > = < y, x >$

۴) $\quad < x, x > \geq 0$ و تساوی برقرار است اگر و تنها اگر $x = 0_V$

iii)فرض کنیم X یک فضای برداری روی میدان F باشد. (X, τ) را یک فضای برداری توپولوژیکی می گوییم اگر τ یک توپولوژی هاسدورف روی میدان X باشد بطوریکه جمع و ضرب اسکالر هر دو روی X پیوسته باشند یعنی ،

۱. $X\times X\to X$. φ با ضابطه $\varphi(x,y)=x+y$ پیوسته باشد.

۲. $F\times X\to X$. ψ با ضابطه $\psi(t,x)=tx$ پیوسته باشد.

تعریف ۱. ۱. ٤ : فرض کنیم Y یک فضای توپولوژی برداری و $S\subset Y$ یک زیرمجموعه ناتهی باشد. درون S، مرز S و بستار S بترتیب با $\operatorname{int} s$ و ∂S , $cl\ S$ نوشته می شود.

تعریف ۱. ۱. ٥ : فرض کنیم X یک فضای باناخ باشد، مجموعه $K\subset X$ یک مجموعه محدب $(Convex)$ گفته می شود اگر برای هر $x_1,x_2\in K$ و $\lambda\in[0,1]$ داشته باشیم

$$\lambda x_1+(1-\lambda)x_2\in K$$

تعریف ۱. ۱. ٦ : تابع $f:X\longrightarrow R\cup[+\infty]$ محدب گفته می شود اگر در دامنه‌اش محدب بوده و برای هر $x,y\in domf$ و $\lambda\in[0,1]$ داشته باشیم

$$f(\lambda x+(1-\lambda)y))\ \le\ \lambda\ f(x)+(1-\lambda)\ \ f(y)$$

همچنین تابع $f:X\longrightarrow(-\infty,+\infty)$ مقعر گفته می شود اگر $-f$ محدب باشد.

تعریف ۱. ۱. ۷ : i)فرض کنیم X یک فضای باناخ باشد زیر مجموعه C از Xیک مخروط $(cone)$ نامیده می‌شود اگر برای هر $\lambda\ge 0$

$$\lambda C\subset C$$

ii) فرض کنیم X یک فضای باناخ باشد زیر مجموعه C از X یک مخروط محدب بسته نامیده می شود اگر C بسته باشد و $C+C\subset C$

و برای هر $\lambda \geq 0$ ، $\lambda C \subset C$

با توجه به اینکه اگر $C \neq X$ باشد آنگاه C را یک مخروط محدب بسته سره می‌نامند.

iii)فرض کنید $B \subset C \setminus \{0\}$ یک زیر مجموعه باشد. B را یک پایه می نامند اگر برای هر $c \in C$ وجود داشته باشد $b \in B$ و $\lambda \geq 0$ بطوریکه $C = \lambda b$

تعریف ۱. ۱. ۸ : i)مخروط محدب بسته Cدر Y نوک تیز $(pointed)$ نامیده می شود اگر

$$C \cap (-C) = \{0\}$$

ii) مخرط محدب بسته C در Y مایل $(Solid)$ نامیده می شود اگر درون C ناتهی باشد.

تعریف ۱. ۱. ۹ : یک رابطه ترتیبی گفته می شود:

i) بازتابی اگر $x < x$

ii) متقارن اگر $x < y \,,\ y < x \longrightarrow x = y$

iii)تعدی اگر $x < y, y < z \longrightarrow x < z$

و اگر یک رابطه ترتیبی شرایط (i) , (ii), (iii) را داشته باشد ترتیب جزئی گفته میشود.

در نتیجه مخروط C یک ترتیب جزیی $\leq_C$ برای Y بصورت زیر بیان می کند:

$$y, z \in Y \ ,\ y \leq_C z \leftrightarrow z - y \in C$$

$$y, z \in Y \ ,\ y \leq_C z \leftrightarrow z - y \in C \setminus \{0\}$$

$$y, z \in Y \ ,\ y <_C z \leftrightarrow z - y \in \operatorname{int} C$$

تعریف ۱. ۱. ۱۰ : فرض کنیم Y, X دو فضای برداری توپولوژی ها سدورف و Z یک فضای برداری توپولوژی مرتب و C یک مخروط بسته و مایل در Y باشد پس ترتیب در C بصورت زیر تعریف می شود:

$$x \leq \circ \leftrightarrow x \in -C$$

$$x < \circ \leftrightarrow x \in -\operatorname{int} C$$

تعریف ۱. ۱. ۱۱ : اگر C یک مخروط محدب در Y باشد و یک رابطه ترتیبی در C تعریف شده باشد آنگاه C را یک مخروط مرتب می نامیم.

و اگر C مخروط محدب نوک تیز باشد. آنگاه رابطه ترتیبی $\leq_c$ یک ترتیب جزئی است.

تعریف ۱. ۱. ۱۲ : اگر درون $C\,(\operatorname{int} C)$ از C غیرتهی باشد یک رابطه ترتیبی اکید $(\leq_{\operatorname{int} c})$ در Y به قرار زیر است:

$$y, z \in Y \ , \ y \leq_{\operatorname{int} c} z \longleftrightarrow z - y \in \operatorname{int} C$$

و همچنین بطور مشابه می توانیم یک رابطه ترتیبی $(\geq_C)$ و یک رابطه ترتیبی اکید $(\geq_{\operatorname{int} c})$ تعریف کنیم و همچنین رابطه ترتیبی زیر را نیز می توانیم تعریف کنیم:

$$y \leq_{c\setminus\{\circ\}} z \longleftrightarrow z - y \in C \setminus \{\circ\}$$

تعریف ۱. ۱. ۱۳ : فرض کنیم A و B دو زیرمجموعه از Y باشند رابطه ترتیبی زیر را تعریف می کنیم:

برای هر $\eta \in A \,, \xi \in B$ $\quad A \leq_c B \quad \longleftrightarrow \quad \eta \leq_c \xi$

برای هر $\eta \in A \,, \xi \in B$ $\quad \eta \leq_{\operatorname{int} c} \xi \longleftrightarrow A \leq_{\operatorname{int} c} B$

برای هر $\eta \in A \,, \xi \in B$ $\quad \eta \leq_{c\setminus\{\circ\}} \xi \longleftrightarrow A \leq_{c\setminus\{\circ\}} B$

نتیجه ۱. ۱. ۱٤ : و همچنین رابطه ترتیبی زیر را تعریف می کنیم.

$$y \nleq_{c\setminus\{\circ\}} z \longrightarrow z - y \notin C \setminus \{\circ\}$$

۱ . ۲ : درباره نامساوی تغییراتی گون برداری

یکی از مهمترین ابزاری که در بهینه سازی مورد استفاده قرار می گیرد تحدب است که یک مفهوم کلی را برای گزاره ها و جوابهای درست بیان می کند در سالهای اخیر چندین توسیع برای توابع محدب بیان شده است که یک تعمیم مهم و قابل توجه از توابع محدب، توابع محدب گون ($invex$) است که در سال ۱۹۸۰ توسط $Hanson$[۱۳] بیان شده است. اولین مقاله $Hanson$ مرتبط با زیر دنباله هایی بود که کاربرد محدب گون را در بهینه سازی غیر خطی و شاخه های دیگر محض و کاربردی را نشان می داد.

یک سال بعد $Giannessi$[۲۳] در سال ۱۹۸۱ مفهومی از نامساوی تغییراتی برداری در فضاهای متناهی البعد را نشان داد. $Cheh$ و $Yang$[۲]شکل کلی تری از نامساوی تغییراتی و مسائل متمم برداری در فضای با بعد نامتناهی بررسی کردند و سپس $Chen$ [۲۲] نامساوی تغییراتی برداری را با ساختار متغیرهای مرتب شده مطالعه کرد. و بعد از آن $Yang$[۳] عکس نامساوی تغییراتی برداری و روابطش را با مسائل بهینه سازی برداری بیان کرد. چند سال بعد وجود نتایجی از جواب برای چندین نوع از نامساوی تغییراتی برداری و تعداد زیادی از کاربردهایش را در بهینه سازی برداری و آنالیز تقریبی از مسائل بهینه سازی برداری و مسائل برابری برداری ثابت شد. نامساوی تغییراتی در ریاضیات ، فیزیک، اقتصاد، مهندسی و علم کاربردی و غیره استفاده می‌شود. یک تعمیم از نامساوی تغییراتی، نامساوی تغییراتی گون ($VLIP$) است که $Parida$[۱] وجود جوابی از نامساوی تغییراتی گون در R^n را مطالعه کرد و رابطه بین نامساوی

تغییراتی گون و برنامه سازی محدب به همراه مسائل متمم را نشان داد. نامساوی تغییراتی گون برداری ابزار مفیدی در بهینه سازی برداری است. $Cheh$ و $Yang$ این هم ارزی را ثابت کردند و وجود جوابی از مسائل نامساوی تغییراتی برداری در فضای باناخ را بیان کردند. همچنین $Yang$بحثی از دوگان در مسائل نامساوی تغییراتی را نشان داد و آنرا به مسائل دوگان در مسائل بهینه سازی برداری مربوط کرد. سپس $Ansari$ و $Siddiqi$ [۱۰] یک تعمیم از مسائل نامساوی تغییراتی که نامساوی تغییراتی گون برداری $(VVLIP)$ نام دارد را تعریف کردند. سپس $Ruzi$ و $Osuna$ و $Rufian$ [۴] نامساوی تغییراتی گون برداری ضعیف $(WVVLIP)$ را تعریف کردند. همچنین رابطه‌ای را بین $(WVVLIP)$ و $(WVVIP)$ را بیان کردند.

اخیراً $Mishra$ و $Noor$ [۵] تابع شبه محدب گون $(Pseudoinvex)$ را تعریف کردند و روابط بین نامساوی تغییراتی گون برداری و مسائل بهینه سازی را تحت تابع شبه محدب گون ثابت کردند. همچنین مسائل نامساوی تغییراتی گون برداری تعمیم یافته و توابع $\alpha-$ محدب گون را تعریف کردند.

اخیراً $Noor$ [۲۱] ویژگیهایی از تابع $\alpha-\Pr einvex$ را بیان کرد. و همچنین روابط بین مسائل نامساوی تغییراتی گون تعمیم یافته و مسائل بهینه سازی برداری را تحت تابع $\alpha-$ شبه محدب گون ثابت کرد.

فرض کنیم R^n یک فضای اقلیدسی n بعدی و X یک زیرمجموعه غیرتهی از R^n باشد.

قراردادهای زیر را در $x=(x_1,\dots,x_n)$ و $y=(y_1,\dots,y_n)$ نظر می گیریم

$$x \le y \longleftrightarrow x_i \le y_i \qquad i = 1,\dots,n \quad \text{برای هر}$$

$$x = y \longleftrightarrow x_i = y_i \qquad i = 1,\dots,n \quad \text{برای هر}$$

$$x < y \longleftrightarrow x_i < y_i \qquad i = 1,\dots,n \quad \text{برای هر}$$

تعریف ۱. ۲. ۱ : فرض کنید $f : X \subset R^n \to R^n$ یک تابع مشتقپذیر و محدب با مقدار حقیقی و $\theta : X \subset R^n \to R^n$ باشد که X یک زیر مجموعه محدب باز از R^n است. منظور از مسائل نامساوی تغییراتی $(Variational\ Inequality\ \Pr oblem)$ یعنی پیدا کردن بردار $\bar{x} \in X$ بطوریکه

$$(y - \bar{x})^t f(\bar{x}) \ge 0 \qquad y \in X \qquad \text{برای هر}$$

تعریف ۱. ۲. ۲ : مسائل (VIP) هم ارز با مسائل بهینه سازی (MP)است.

$$(MP)\ \ \min \theta(x)$$

$$x \in X \ \text{نسبت به}$$

رابطه بالا بین نامساوی تغییراتی برداری و مسائل بهینه سازی اگر تابع f تابع گرادیان نباشد بر قرار نیست.

تعمیمی از مسائل نامساوی تغییراتی، مسائل نامساوی تغییراتی گون $(Variational\ - Like\ inequality \Pr oblem)$ است.

تعریف ۱. ۲. ۳ : i)اگر $F : X \to R^n$ و $\eta : X \times X \to R^n$ دونگاشت پیوسته باشند منظور از مسائل نامساوی تغییراتی گون $(VLIP)$ پیدا کردن یک نقطه $\bar{x} \in X$ بطوریکه

$$\eta(y,\bar{x})^t F(\bar{x}) \geq 0$$

تعمیمی از مسائل نامساوی تغییراتی گون، مسائل نامساوی تغییراتی گون برداری است.

ii)منظور از مسائل نامساوی تغییراتی گون برداری

$(Vector\ Variational - Like\ inequality\ \Pr oblem)$ یعنی پیدا کردن یک نقطه

$\bar{x} \in X$ بطوریکه وجود نداشته باشد $y \in X$ بطوریکه

$$F(\bar{x})\eta(y,\bar{x}) \leq 0$$

iii)منظور از مسائل نامساوی تغییراتی گون برداری ضعیف

$(Weak\ Vector\ Variational - Like\ inequality\ \Pr oblem)$ یعنی پیدا کردن یک نقطه $\bar{x} \in X$ بطوریکه وجود نداشته باشد $y \in X$ بطوریکه

$$F(\bar{x})\eta(y,\bar{x}) < 0$$

نتیجه ۱. ۲. ٤ : i) بطور آشکار $VVLIP \longrightarrow WVVLIP$

ii)مسائل نامساوی تغییراتی برداری یک مورد بخصوص از مسائل نامساوی تغییراتی گون برداری هستند اگر رابطه $\eta(y,\bar{x}) = y - \bar{x}$ برقرار باشد.

همچنین این رابطه بین مسائل نامساوی تغییراتی برداری ضعیف و مسائل نامساوی تغییراتی گون برداری ضعیف وجود دارد.

هدف ما این است که در این بخش نشان دهیم مسائل نامساوی تغییراتی گون برداری ابزار مفیدی برای مطالعه مسائل بهینه سازی برداری می باشد.

اکنون مفهومی از جواب موثر را تعریف می کنیم که استفاده بیشتری در مسائل بهینه سازی برداری دارد.

تعریف ۱. ۲. ۵ : i) فرض کنیم X یک زیرمجموعه باز از R^n و تابع $f:R^n \longrightarrow R^n$ داده شده است. یک نقطه $\bar{x} \in X$ یک نقطه موثر $(efficient\ Point)$ گفته می شود اگر وجود نداشته باشد $y \in X$ بطوریکه

$$f(y) \leq f(\bar{x})$$

مجموعه نقاط موثر را با $E(f,s)$ نوشته می شود.

ii) اگر X یک زیرمجموعه باز از R^n و تابع $f:R^n \longrightarrow R^n$ داده شده باشد منظور از مسائل بهینه سازی برداری $(Vector\ optimazation\ \Pr oblem)$ یعنی پیدا کردن یک نقطه برای $E(f,s)$

$$(Vop)\ V-\min f(x)$$

نسبت به $x \in X$

البته همیشه ممکن نیست یک جواب موثر پیدا کنیم، بنابراین گاهی اوقات باید یک مفهوم کلی تری از نقاط موثر ارائه کنیم.

تعریف ۱. ۲. ۶ : i)اگر X یک زیرمجموعه باز از R^n و تابع $f : R^n \longrightarrow R^n$ داده شده باشد یک نقطه $\bar{x} \in X$ را یک نقطه موثر ضعیف $(Weakkly\ efficient\ Point)$ گفته می شود اگر وجود نداشته باشد $y \in X$ بطوریکه $f(y) < f(\bar{x})$

مجموعه ای از نقاط موثر ضعیف را با $WE(f,s)$ نوشته می شود.

ii)اگر X یک زیرمجموعه باز R^n و تابع $f : R^n \longrightarrow R^n$ داده شده باشد منظور از مسائل بهینه سازی برداری ضعیف $(Weak\ Vector\ optimization\ Problem)$ یعنی پیدا کردن یک نقطه $WE(f,s)$ برای

$$(WVOP) \quad W - \min f(x)$$

نسبت به $x \in X$

نتیجه ۱. ۲. ۷ : بطور آشکار هر نقطه موثر یک نقطه موثر ضعیف می باشد.

$$x \in E(f,s) \to x \in WE(f,s)$$

مثال ۱. ۲. ۸ : فرض کنید مسائل

$$(VOP)\ V - \min f(x)$$

نسبت به $x \in [-۱,۰]$

که با ضابطه $f(x) = (x, x^۲)'$ تعریف می شود.

بطور آشکار هر نقطه $x \in (-۱,۰)$ یک جواب موثر است.

فرض کنید $x = ۰$ ، پس برای اینکه ثابت کنیم f ،$(VVIP)$ است باید وجود نداشته باشد