بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه صنعتی اصفهان

دانشکده مهندسی مکانیک

مدل‌سازی و آنالیز ارتعاشی ورق مرکب لایه‌لایه پیزوالکتریک/ویسکوالاستیک (ACLD) با روش المان محدود طیفی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد مهندسی مکانیک

حسام حاج حیدری

استاد راهنما

دکتر حمیدرضا میردامادی

۱۳۹۰

دانشگاه صنعتی اصفهان

دانشکده مهندسی مکانیک

پایان‌نامه‌ی کارشناسی ارشد رشته‌ی مهندسی مکانیک آقای حسام حاج حیدری

تحت عنوان

مدل‌سازی و آنالیز ارتعاشی ورق مرکب لایه‌لایه پیزوالکتریک/ویسکوالاستیک (ACLD) با روش المان محدود طیفی

در تاریخ ۹۰/۳/۱۹ توسط کمیته‌ی تخصصی زیر مورد بررسی و تصویب نهایی قرار گرفت.

۱- استاد راهنمای پایان‌نامه	دکتر حمیدرضا میردامادی
۲- استاد مشاور پایان‌نامه	دکتر علیرضا شهیدی
۳- استاد داور	دکتر مصطفی غیور
۴- استاد داور	دکتر حسن نحوی
سرپرست تحصیلات تکمیلی دانشکده	دکتر سعید ضیایی‌راد

تشکر و قدردانی

سپاس و ستایش خداوند یگانه را که این توفیق را به من ارزانی داشت تا گامی هر چند کوچک در راه آموختن علم برداشته و بیاموزم که هنوز هیچ نیاموخته‌ام.

از پدر و مادر فداکارم که توجهات و مهربانی‌های بی‌شائبه آن‌ها همواره ره توشه‌ام بوده است کمال تشکر وقدردانی را دارم.

به انجام رسیدن این پایان‌نامه مرهون راهنمایی، مشاوره و کمک بزرگانی است که در مراحل مختلف، لطف و مهربانی خود را از بنده دریغ نکرده‌اند. از این رو برخود واجب می‌دانم از همه عزیزانی که در این راستا مرا یاری کرده‌اند، سپاسگزاری نمایم.

مراتب بی‌پایان سپاس خود را خدمت استاد ارجمند جناب آقای دکتر حمیدرضا میردامادی که حمایت‌ها و رهنمودهای ارزنده‌اش چراغی فرا رویم شد، تقدیم می‌دارم.

از جناب آقای دکتر شهیدی که از مشاوره بسیار سودمند ایشان در تمامی مدت انجام پایان‌نامه بهره‌مند بوده‌ام، کمال تشکر و امتنان را دارم.

از اساتید داور این پایان‌نامه جناب آقای دکتر غیور و جناب آقای دکتر نحوی که زحمت بازخوانی و داوری این پایان نامه را به عهده داشته‌اند، صمیمانه تشکر و قدردانی می‌نمایم.

در پایان برای کلیه عزیزانی که بنده را در انجام این پایان‌نامه یاری رساندند، سلامتی و موفقیت را از خداوند منان آرزو می‌نمایم.

حسام حاج حیدری

بهار ۱۳۹۰

کلیه‌ی حقوق مادی مترتب بر نتایج مطالعات، ابتکارات و نوآوری‌های ناشی از تحقیق موضوع این پایان‌نامه (رساله) متعلق به دانشگاه صنعتی اصفهان است.

تقدیم به

پدر و مادر عزیزم

فهرست مطالب

چکیده

روش المان محدود طیفی به عنوان یک روش مدل‌سازی دینامیکی دقیق سازه‌های مهندسی شناخته می‌شود. در این تحقیق مدل المان محدود طیفی برای آنالیز ارتعاشی ورق‌های مستطیلی چندلا متقارن و نامتقارن عمودبرش و هم‌چنین ورق‌های با میراگرهای فعال، غیرفعال و میراگرهای دوگان فعال- غیرفعال ارایه می‌شود. بر خلاف سازه‌های یک بعدی، بررسی رفتار موج در سازه دوبعدی پیچیده‌تر می‌باشد. بنابرانی در این تحقیق مدل المان محدود طیفی تنها برای ورق‌های نوع لوی ارایه شده است که در نتیجه مسأله ورق دوبعدی به یک مسأله ورق یک بعدی معادل تبدیل می‌شود. سپس ورق با استفاده از روش نوار محدود به چندین نوار تقسیم می‌شود که المان‌های طیفی در راستای عمود بر این نوارها تعریف شده است. فرمول‌بندی المان محدود طیفی شامل معادله‌های دیفرانسیل پاره‌ای حرکت، میدان جابجایی، تابع‌های شکل و ماتریس المان طیفی می‌باشد. آنالیز ارتعاشی ورق‌های مستطیلی چندلا متقارن و نامتقارن عمودبرش شامل ارتعاش آزاد و ارتعاش واداشته می‌باشد. در ارتعاش آزاد فرکانس‌های طبیعی و شکل مودها برای ورق‌های مستطیلی با ابعاد مختلف محاسبه می‌شوند و در ارتعاش واداشته ارتعاش ورق زیر بارگذاری‌های متمرکز و گسترده ضربه‌ای با محتوای فرکانسی بالا بررسی می‌شود. نتیجه‌های روش المان محدود طیفی با نتیجه‌های روش تحلیلی و روش المان محدود در حوزه زمان، مقایسه و اثر کاهش حجم محاسبه و دقت حل روش المان محدود طیفی نسبت به روش المان محدود در حوزه زمان ارزیابی می‌شود. میراگرهای دوگان فعال- غیرفعال از دو لایه مرکب پیزوالکتریک و ویسکوالاستیک تشکیل شده‌اند که بر روی لایه میزبان الاستیک سوار می‌شوند. معادله‌های حرکت حاکم بر ورق با میراگر دوگان فعال- غیرفعال به کمک اصل همیلتون استخراج و سپس ماتریس المان طیفی از حل دقیق دستگاه معادله دیفرانسیل درهم‌گیر حاکم در حوزه فرکانس فرمول‌بندی می‌شود. عمل‌کرد میرایی میراگرهای دوگان فعال- غیر فعال نسبت به میراگرهای فعال و غیرفعال با استفاده از یک کنترل‌کننده مشتقی- تناسبی مورد بررسی قرار می‌گیرد. برای درست‌سنجی و دقت حل فرمول‌بندی المان طیفی ورق‌های با میراگر دوگان فعال- غیرفعال، نتیجه‌ها با نتیجه‌های روش تحلیلی مقایسه می‌شوند.

گل واژگان: ۱- دینامیک سازه‌ها ۲- ورق‌های مرکب لایه‌لایه ۳- المان محدود طیفی ٤- ماتریس المان طیفی ٥- تابع شکل دینامیکی ٦- میراگرهای دوگان فعال- غیرفعال ۷- روش نوار محدود ۸- کنترل‌کننده مشتقی- تناسبی

فصل اول
مقدمه

۱-۱ مقدمه

آنالیز دینامیکی سازه‌های مهندسی به طور کلی در دو دسته‌ی افرازشده مورد بررسی قرار می‌گیرند. یک دسته، بارگذاری سیستم در فرکانس‌های پایین و دیگری در فرکانس‌های بالا هستند. مسایل فرکانس پایین به عنوان تئوری دینامیک سازه‌ها (آنالیز مودال) معرفی می‌شوند، در حالی که مسایل با فرکانس بالا به مبحث تئوری پخش امواج مرتبط هستند. در تئوری دینامیک سازه‌ها، محتوای فرکانسی بارگذاری دینامیکی از مرتبه فرکانس‌های پایین تا حدوداً چند صد هرتز می‌باشد و طراح بیشتر علاقه‌مند به بررسی تأثیر حالت ماندگار یا پایای پاسخ دینامیکی سیستم می‌باشد. بنابراین برای ارزیابی سازه تنها نیاز به چند فرکانس طبیعی پایین سازه و مودهای نرمال وابسته می‌باشد و هم‌چنین اطلاعات مربوط به فاز پاسخ دینامیکی سیستم در تئوری دینامیک سازه‌ها اهمیت چندانی ندارد. بیشتر مسایل دینامیک سازه‌های مهندسی در این دسته جای می‌گیرند. از سوی دیگر در تئوری پخش امواج، محتوای فرکانسی بارگذاری ورودی از مرتبه بسیار بالا (کیلو هرتز و بالاتر) می‌باشد و از این رو پاسخ گذرای سیستم نقشی حیاتی در آنالیز دینامیکی سازه ایفا می‌کند. افزون بر این، تعداد زیادی از مودهای بالاتر در تقویت پاسخ دینامیکی مشارکت دارند. به طور مثال بارگذاری‌های ضربه‌ای در این دسته قرار می‌گیرند. ماهیت چندمودی و مودهای فشرده با هم در تئوری پخش امواج، نقش پارامتر اطلاعات فاز را بسیار پراهمیت جلوه می‌دهد.

۱-۱-۱ روش المان محدود در حوزه زمان

روش المان محدود در حوزه زمان یکی از روش‌های محاسبه‌ای قدرتمند و پرکاربرد برای استفاده در دامنه گسترده‌ای از مسایل مهندسی از جمله آنالیزهای دینامیکی می‌باشد. در تئوری پخش امواج همان گونه که گفته شد از آنجا که محتوای فرکانسی ورودی سیستم بسیار بالا است، برای افزایش دقت پاسخ دینامیکی نیاز به تسخیر مودهای موج در فرکانس‌های بالا می‌باشد. در فرکانس‌های بالا، طول موج‌ها بسیار کوچک هستند. بنابراین اندازه شبکه‌های (مش‌های) استفاده‌شده در روش المان محدود می‌باید در مقایسه با کوچک‌ترین طول موج سازه ارتعاشی، به قدر کافی کوچک باشند.

به دلیل این که مدل المان محدود در حوزه زمان به وسیله تابع‌های شکل چندجمله‌ای (تابع‌های درون‌یاب) نابسته به فرکانس فرمول‌بندی می‌شود، این روش نمی‌تواند همه‌ی مودهای موج مورد نیاز در فرکانس‌های بالا را تسخیر کند. بنابراین حل به دست‌آمده در روش المان محدود در حوزه زمان به ویژه در فرکانس‌های بالا از دقت کمی برخوردار است. یکی از دیدگاه‌های شناخته‌شده برای بهبود دقت روش المان محدود در حوزه زمان، از طریق تغییر مقیاس شبکه‌بندی المان‌ها[۱]، روش اچ[۲] می‌باشد. متاسفانه این دیدگاه، مقیاس مسأله و محاسبه را به شدت افزایش می‌دهد. یادآوری می‌شود که در روش المان محدود در حوزه زمان، اندازه شبکه‌ها می‌باید در حدود ۱۰ تا ۲۰ مرتبه کوچک‌تر از طول موج مود مورد نیاز در بالاترین فرکانس باشد.

یک دیدگاه جایگزین برای افزایش دقت حل، استفاده از تابع‌های شکلی است که نسبت به فرکانس ارتعاش سیستم تغییر می‌کنند. از این رو تابع‌های شکل مورد نظر، وابسته به فرکانس می‌باشند که با نام تابع‌های شکل دینامیکی شناخته می‌شوند. از آنجا که تابع‌های شکل دینامیکی می‌توانند همه‌ی مودهای موج مورد نیاز در فرکانس‌های بالا را تسخیر کنند، حل‌های بسیار دقیقی ارایه می‌کنند و نیاز چندانی به تغییر مقیاس شبکه‌بندی المان‌ها نمی‌باشد. این دیدگاه منجر به استفاده از روشی به نام روش سختی دینامیکی[۳] می‌شود.

۱-۱-۲ روش سختی دینامیکی

ماتریس سختی دینامیکی دقیق در روش سختی دینامیکی استفاده می‌شود. این ماتریس در حوزه فرکانس با استفاده از تابع‌های شکل دینامیکی دقیق که از حل دقیق معادله موج به دست می‌آیند، فرمول‌بندی می‌شود. برای به دست‌آوردن حل دقیق معادله موج در حوزه فرکانس، معادله موج در حوزه زمان با فرض حل هارمونیک یک تک

[1] Mesh Refining
[2] H-Method
[3] Dynamic Stiffness Method (DSM)

فرکانس، به حوزه فرکانس تبدیل می‌شود. ماتریس سختی دینامیکی دقیق وابسته به فرکانس می‌باشد که بـه صـورت ترکیبی از وِیژگی‌های اینرسی، سختی و میرایی یک المان سـازه بیـان مـی‌شـود. روش سـختی دینـامیکی، حـل‌هـای دقیقی در حوزه فرکانس برای معادله‌های دیفرانسیل (یا مدل ریاضی) حاکم بر مسأله ارایه می‌دهد. به همین دلیل این روش به عنوان یک روش حل دقیق مطرح می‌شود. البته دقت حل به دست‌آمده با این روش، محدود به دقت معادلـه دیفرانسیل حاکم بر مسأله جهت فرمول‌بندی ماتریس سختی دینامیکی دقیق می‌گـردد. بـه عنـوان مثـال روش سـختی دینامیکی برای مدل تیر تیموشنکو، حل دقیق‌تری در حوزه فرکانس نسبت به مدل تیر اویلر- برنولی ارایه می‌دهد. بـا این حال فرض‌های روش سختی دینـامیکی کمتـر از فـرض‌هـای روش المـان محـدود در حـوزه زمـان و روش‌هـای تقریبی دیگر می‌باشد که باعث می‌شود حـل بـه دسـت‌آمـده از روش سـختی دینـامیکی هـم‌چنـان از دقـت بـالاتری برخوردار باشد.

از آنجا که ماتریس سختی دینامیکی دقیق با استفاده از تابع‌های شکل دینامیکی دقیق فرمول‌بنـدی مـی‌شـود، توزیع جرم در عضو سازه به صورت دقیقی محاسبه می‌شود. از این رو تنها یک المان بـرای مـدل‌سـازی یـک عضـو سازه‌ای منظم ولی بدون هیچ‌گونه ناپیوستگی مادی یا هندسی، کافی مـی‌باشـد. در ایـن روش نیـاز چنـدانی بـه تغییـر مقیاس شبکه‌بندی المان‌ها نمی‌باشد و این امر موجب کاهش مقیاس مسأله و درجه‌هـای آزادی گرهـی مـی‌شـود کـه درنتیجه، زمان و هزینه محاسبه را به شدت کاهش می‌دهد. به دلیل این که ماتریس سـختی دینـامیکی دقیـق بـه روش ماتریس سختی مدل شده‌است. بنابراین برای به دست‌آوردن ماتریس سختی دینامیکی دقیق برای کل مسأله، از همان روش‌های سرهم‌سازی استفاده‌شده برای ماتریس سختی المان محدود در حوزه زمان، استفاده می‌شود.

۱ - ۴ - ۳ روش آنالیز طیفی[1]

روش‌های حل برای معادله‌های دیفرانسیل فرمـول‌بنـدی‌شـده در حـوزه زمـان مـی‌تواننـد در دو گـروه مهـم تقسیم‌بندی شوند. گروه نخست شامل روش‌های حوزه زمان مانند روش‌های انتگـرال‌گیـری عـددی و آنـالیز مـودال می‌باشد که معمولا برای آنالیز ارتعاشی به کار گرفته می‌شـود. گـروه دوم شـامل روش‌هـای حـوزه فرکـانس اسـت. روش آنالیز طیفی یکی از روش‌های شناخته‌شده در حوزه فرکانس به حساب می‌آید.

در روش آنالیز طیفی حل معادله‌های دیفرانسیل به صورت برهم‌نهش تعـداد بـی‌نهایـت از مودهـای مـوج در فرکانس‌های (دوره تناوب) مختلف نمایش داده می‌شود که متناظر با تبدیل فوریه پیوسته[2] حل‌های مربوطه می‌باشـد.

[1] Spectral Analysis Method (SAM)
[2] Continuous Fourier Transform (CFT)

این دیدگاه شامل محاسبه یک مجموعه بی‌نهایت از مولفه‌های طیفی (ضریب‌های فوریه) در حوزه فرکانس و انجام تبدیل فوریه وارون برای بازسازی تاریخچه زمانی حل، می‌شود. به دست‌آوردن تبدیل فوریه پیوسته تنها هنگامی ممکن است که تابع تبدیل‌شونده از لحاظ ریاضی ساده باشد. محاسبه تبدیل وارون نیز در بیشتر موردهای عملی، به ویژه هنگامی که مربوط به داده‌های گسسته تجربی اندازه‌گیری‌شده می‌شود، بسیار کار مشکلی است. بنابراین به جای استفاده از تبدیل فوریه پیوسته از تبدیل فوریه گسسته[1] به طور گسترده در عمل استفاده می‌شود.

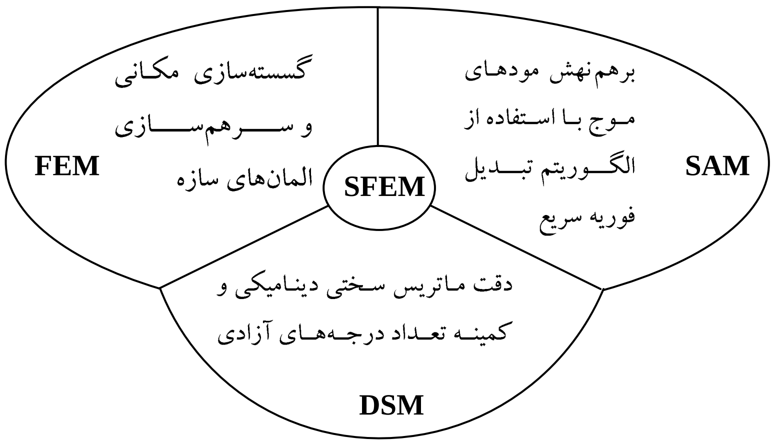
تبدیل فوریه گسسته، تقریبی از تبدیل فوریه پیوسته است. در مقایسه با تبدیل فوریه پیوسته، در تبدیل فوریه گسسته، حل ارایه‌شده به صورت تعداد متناهی از مودهای موج در فرکانس‌های گسسته می‌باشد. بنابراین به عنوان یک مزیت بزرگ می‌توان از الگوریتم تبدیل فوریه سریع[2] برای محاسبه سریع و اقتصادی تبدیل فوریه گسسته و وارون آن استفاده کرد. هم‌چنین با استفاده از این الگوریتم می‌توان تعداد زیادی از ضریب‌های طیفی در بالاترین فرکانس‌های مورد نیاز را محاسبه کرد. از این رو روش آنالیز طیفی بر پایه تبدیل فوریه گسسته/الگوریتم تبدیل سریع فوریه[3] می‌تواند حل‌های بسیار دقیقی ارایه دهد.

ارزشمند است اشاره شود که نخست، گرچه تبدیل فوریه گسسته تقریبی از تبدیل فوریه پیوسته است، ولی روش تبدیل فوریه گسسته در صورت رعایت شرایط پردازش سیگنال‌ها از جمله فرکانس نایکویست[4]، دقیق می‌باشد از این جهت که اجازه می‌دهد سیگنال زمانی به طور دقیق در زمان گسسته بازسازی شود. ثانیاً گرچه از یک رایانه جهت محاسبه روش آنالیز طیفی بر پایه تبدیل فوریه گسسته/الگوریتم تبدیل فوریه سریع استفاده می‌شود، مطمئناً این روش یک روش عددی نیست به این دلیل که فرمول‌بندی تحلیلی تبدیل‌های فوریه در محاسبه استفاده می‌شود. با ترکیب ویژگی‌های بارز روش سختی دینامیکی با روش آنالیز طیفی، نارایانان و بسکاس توانست مفاهیم پایه‌ای روش المان محدود طیفی را برای نخستین بار در سال ۱۹۷۸ معرفی کند[۱].

[1] Discrete Fourier Transform (DFT)
[2] Fast Fourier Transform (FFT)
[3] DFT/FFT-Based SAM
[4] Nyquist Frequency

۱-۴ روش المان محدود طیفی[1]

همان گونه که در شکل زیر نشان داده شده‌است روش المان محدود طیفی را می‌توان ترکیبی از ویژگی‌های بارز روش المان محدود در حوزه زمان، روش سختی دینامیکی و روش آنالیز طیفی در نظر گرفت. ویژگی‌های بارز روش‌های نام‌برده را می‌توان در شکل ۱-۱ به صورت خلاصه مشاهده نمود.



شکل ۱-۱- ویژگی‌های بارز روش المان محدود طیفی[۲]

در روش المان محدود طیفی، ماتریس سختی دینامیکی دقیق به عنوان ماتریس سختی المان در روش المان محدود در حوزه زمان، برای یک سازه استفاده می‌شود. برای فرمول‌بندی یک ماتریس سختی دینامیکی در روش سختی دینامیکی، فرض می‌شود که پاسخ دینامیکی یک سازه، حل‌های هارمونیکی از یک تک فرکانس باشد. بنابراین در روش المان محدود طیفی، پاسخ دینامیکی، برهم‌نهش تعداد محدودی از مودهای موج در چندین فرکانس گسسته بر پایه تئوری تبدیل فوریه گسسته فرض می‌شود. در نتیجه محاسبه ماتریس سختی دینامیکی دقیق می‌باید برای همه فرکانس‌های گسسته تا بالاترین فرکانس مورد نظر تکرار شود. ویژگی دقیق‌بودن ماتریس سختی دینامیکی فرمول‌بندی‌شده به روش طیفی، مدل‌سازی یک عضو سازه‌ای منظم بدون هیچ‌گونه ناپیوستگی مادی یا هندسی را با تنها یک المان، ممکن می‌سازد. روش المان محدود طیفی همانند روش المان محدود در حوزه زمان یک روش مبتنی بر المان می‌باشد. بنابراین تغییر مقیاس شبکه المان‌بندی در این روش نیز به کار گرفته می‌شود هنگامی که ناپیوستگی مادی یا هندسی در حوزه مکان یا نیروهای اعمال‌شده خارجی وجود داشته باشند.

---
[1] Spectral Finite Element Method (SFEM)

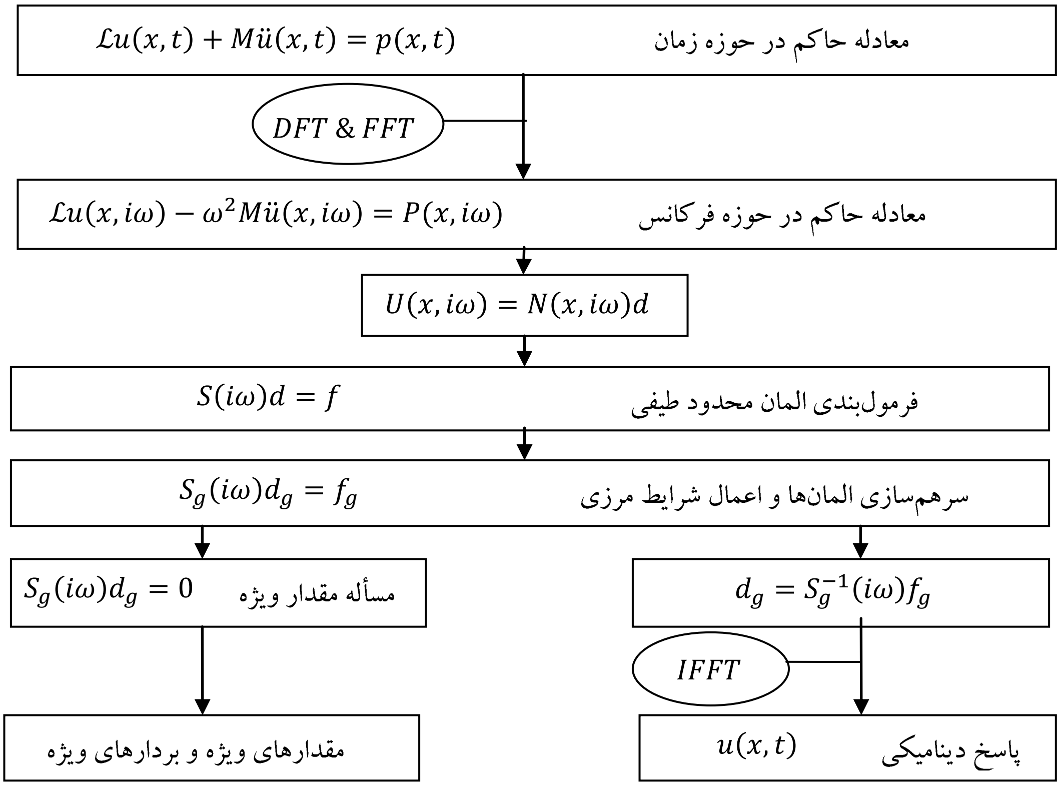
در بیشتر ادبیات علمی موجود، ماتریس سختی دینامیکی دقیق فرمول‌بندی‌شده به روش طیفی و استفاده‌شده در روش المان محدود طیفی با نام ماتریس المان طیفی[1] شناخته می‌شود. در برخی ادبیات علمی نیز از نام ماتریس المان محدود طیفی یا ماتریس سختی دینامیکی طیفی[2] استفاده می‌شود. المان‌های با طول محدود در سازه که به وسیله ماتریس المان طیفی نمایش‌داده می‌شود، با نام المان طیفی به کار می‌روند و درجه‌های آزادی گرهی در حوزه فرکانس بر روی المان طیفی به عنوان درجه‌های آزادی طیفی شناخته می‌شوند.

روش المان محدود طیفی، به شکل روش ماتریس سختی فرمول‌بندی شده است. بنابراین برای تشکیل ماتریس سختی کل، المان‌های طیفی به شکل معادله‌های ماتریسی سیستم جهانی[3] با استفاده از همان روش‌های سرهم‌سازی استفاده‌شده در روش المان محدود در حوزه زمان، کنار هم دیگر گذاشته می‌شوند. ماتریس به دست‌آمده در سیستم جهانی، برای درجه‌های آزادی گرهی طیفی جهانی حل می‌شود. این روند در همه فرکانس‌های گسسته تکرار می‌شود و در پایان از الگوریتم وارون تبدیل فوریه سریع[4] برای محاسبه تاریخچه زمانی پاسخ‌های دینامیکی (حل در حوزه زمان) استفاده می‌شود.

۱-۴-۱ روند کلی حل در روش المان محدود طیفی

روند کلی حل در روش المان محدود طیفی را می‌توان به طور خلاصه در شکل ۱-۲ نشان داد.

[1] Spectral Element Matrix
[2] Spectral Dynamic Stiffness Matrix
[3] Global System
[4] Inverse Fast Fourier Transform (IFFT)



شکل ۱-۲- روند کلی حل در روش المان محدود طیفی[۲]

معادله‌های حرکت حاکم برای یک سازه در حال ارتعاش را می‌توان در حالت کلی به صورت زیر بیان نمود[۲].

$$\boldsymbol{\mathcal{L}u}(x,t)+\boldsymbol{M\ddot{u}}(x,t)=\boldsymbol{p}(x,t) \tag{۱-۱}$$

که $\boldsymbol{\mathcal{L}}$ بیانگر اپراتور دیفرانسیلی خطی (اپراتور سختی) و $\boldsymbol{M}$ بیانگر اپراتور اینرسی در حوزه زمان t و مکان x می‌باشند. $\boldsymbol{u}(x,t)$ و $\boldsymbol{p}(x,t)$ به ترتیب بردار میدان جابجایی و بردار نیروهای خارجی هستند. با استفاده از تبدیل فوریه گسسته بردارهای جابجایی و نیروهای خارجی را به حوزه فرکانس می‌بریم.

$$\begin{gathered}\boldsymbol{p}(x,t)=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\boldsymbol{P}_n(x,i\omega_n)\,e^{i\omega_n t}\\ \boldsymbol{u}(x,t)=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\boldsymbol{U}_n(x,i\omega_n)\,e^{i\omega_n t}\end{gathered} \tag{۲-۱}$$

$\boldsymbol{U_n}(x,i\omega_n)$ و $\boldsymbol{P_n}(x,i\omega_n)$ به ترتیب مولفه‌های طیفی میدان جابجایی و نیروهای خارجی در حوزه زمان هستند. با جایگذاری رابطه‌های بالا در معادله دیفرانسیل حاکم در حوزه زمان، معادله حاکم به حوزه فرکانس تبدیل

می‌شود و متغیر زمان جای خود را به فرکانس می‌دهد که در نتیجه معادله دیفرانسیل با مشتق‌های پاره‌ای به یک معادله دیفرانسیل معمولی تبدیل می‌شود.

$$\boldsymbol{LU}_n(x, i\omega_n) - \omega_n^2 \boldsymbol{MU}_n(x, i\omega_n) = \boldsymbol{P}_n(x, i\omega_n) \qquad ۳\text{-}۱$$

تابع‌های شکل دینامیکی از حل معادله دیفرانسیل همگن بالا در حوزه فرکانس به دست می‌آیند که با استفاده از این تابع‌های شکل دینامیکی، ماتریس المان طیفی فرمول‌بندی می‌شود.

$$\boldsymbol{LU}_n(x, i\omega_n) - \omega_n^2 \boldsymbol{MU}_n(x, i\omega_n) = \boldsymbol{0} \qquad ٤\text{-}۱$$

معادله‌های ۱-۳ و ۱-٤ برای همه فرکانس‌های گسسته ω_n صادق می‌باشند که برای سادگی فرمول‌بندی، در ادامه این فصل از نشان‌دادن زیرنویس n در معادله‌ها چشم‌پوشی می‌شود.

حل عمومی معادله دیفرانسیل ۱-٤ به صورت زیر نوشته می‌شود.

$$\boldsymbol{U}(x, i\omega) = \boldsymbol{c}e^{-ikx} \qquad ۵\text{-}۱$$

که $\boldsymbol{c}$ یک بردار ثابت و k عدد موج است. با جایگذاری رابطه ۱-۵ در معادله ۱-٤ یک مسأله مقدار ویژه غیرجبری حاصل می‌شود.

$$\boldsymbol{A}(k, i\omega)\boldsymbol{c} = \boldsymbol{0} \qquad ٦\text{-}۱$$

شرط وجود جواب نابدیهی در معادله بالا صفربودن دترمینان ماتریس $\boldsymbol{A}$ می‌باشد.

$$det\, \boldsymbol{A}(k, i\omega) = \boldsymbol{0} \qquad ۷\text{-}۱$$

معادله بالا، یک چندجمله‌ای مرتبه p بر حسب عددهای موج نتیجه می‌دهد.

$$k^p + \alpha_{(p-1)}(i\omega)k^{(p-1)} + \alpha_{(p-2)}(i\omega)k^{(p-2)} + \cdots + \alpha_1(i\omega)k + \alpha_0(i\omega) = 0 \qquad ۸\text{-}۱$$

معادله ۱-۸به رابطه پراکنش[1] یا رابطه طیفی شناخته می‌شود. با فرض این‌که $k_1, k_2, \dots, k_p$ ریشه‌های متمایز معادله ۱-۸ در یک فرکانس گسسته باشند، بردار ویژه متناظر $\boldsymbol{c}_i$ را می‌توان از معادله ۱-٦ محاسبه نمود.

$$\boldsymbol{c}_i = a_i \begin{Bmatrix} 1 \\ \boldsymbol{\beta}_i \end{Bmatrix} = a_i \boldsymbol{\phi}_i \qquad (i = 1, 2, \dots, p) \qquad ۹\text{-}۱$$

بردار ویژه $\boldsymbol{c}_i$ به شکلی هم‌پایه می‌شود که یکی از درایه‌های بردار هم‌پایه‌شده $\boldsymbol{\phi}_i$ برابر یک و دیگر درایه‌های در بردار $\boldsymbol{\beta}_i$ بیان شوند. ثابت‌های a_i با ارضای شرایط مرزی تعیین می‌شوند. هنگامی که مقدارهای ویژه k_i و بردار ویژه $\boldsymbol{c}_i$ از حل مساله مقدار ویژه به دست آمدند، حل عمومی معادله ۱-٤ به صورت زیر نوشته می‌شود.

$$\boldsymbol{U}(x, i\omega) = \sum_{i=1}^{p} \boldsymbol{\phi}_i\, e^{-ik_i(i\omega)x} a_i = \boldsymbol{E}(x, i\omega)\boldsymbol{a} \qquad ۱۰\text{-}۱$$

---
[1] Dispersion Relation

که در آن

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{E}(x,i\omega)=[\boldsymbol{\phi}_1 \quad \boldsymbol{\phi}_2 \quad \boldsymbol{\phi}_3 \quad \dots \quad \boldsymbol{\phi}_p]\boldsymbol{\Lambda}(x,i\omega)\\&\boldsymbol{\Lambda}(x,i\omega)=diag\left[e^{-ik_i(i\omega)x}\right]\\&\boldsymbol{a}=\{a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad \dots \quad a_p\}^T\end{aligned} \qquad ۱۱-۱$$

می‌باشد.

برای یک المان محدود به طول l_e رابطه ۱-۱۰ باید شرایط مرزی هندسی و طبیعی را در گره‌های المـان در $x=0$ و $x=l_e$ ارضا کند. شرایط مرزی هندسی شامل جابجایی‌ها و شیب‌های گرهی طیفـی (درجـه‌هـای آزادی طیفی $\boldsymbol{d}$) و شرایط مرزی طبیعی شامل نیروهای گرهی طیفی (نیروهای طیفی $\boldsymbol{f_c}$) می‌باشند.

جابجایی‌ها و شیب‌ها متغیرهای اولیه نامیده می‌شوند که وضعیت آن‌ها بر روی مرزها، شرایط مرزی هندسـی را تشکیل می‌دهند. متغیرهای اولیه می‌توانند به صورت زیر با میدان جابجایی مرتبط شوند.

$$\boldsymbol{D}(x,i\omega)=\boldsymbol{L}_{GB}\boldsymbol{U}(x,i\omega) \qquad ۱۲-۱$$

$\boldsymbol{L}_{GB}$ اپراتور دیفرانسیلی خطی برای شرایط مـرزی هندسـی مـی‌باشـد. بـا جایگـذاری رابطـه ۱-۱۰ در معادلـه بـالا و درنظرگرفتن درجه‌های آزادی طیفی در گره‌ها داریم.

$$\boldsymbol{d}(i\omega)=\begin{Bmatrix}\boldsymbol{D}(0,i\omega)\\\boldsymbol{D}(L,i\omega)\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{L}_{GB}\boldsymbol{E}(0,i\omega)\\\boldsymbol{L}_{GB}\boldsymbol{E}(l_e,i\omega)\end{bmatrix}\boldsymbol{a}=\boldsymbol{H}(i\omega)\ \boldsymbol{a} \qquad ۱۳-۱$$

با حذف بردار ثابت $\boldsymbol{a}$ از رابطه ۱-۱۰ با استفاده از معادله ۱-۱۳، حل عمومی بـرای میـدان جابجـایی طیفـی برحسـب درجه‌های آزادی طیفی به صورت زیر نوشته می‌شود.

$$\boldsymbol{U}(x,i\omega)=\boldsymbol{N}(x,i\omega)\boldsymbol{d}(i\omega) \qquad ۱۴-۱$$

$\boldsymbol{N}(x,i\omega)$ تابع شکل دینامیکی می‌باشد که به صورت زیر بیان شده است.

$$\boldsymbol{N}(x,i\omega)=\boldsymbol{E}(x,i\omega)\boldsymbol{H}^{-1}(i\omega) \qquad ۱۵-۱$$

نیروهای اینرسی و گشتاورها در حالت کلی به نام متغیرهای ثانویه شناخته می‌شوند و وضعیت آن‌ها بـر روی مرزها، شرایط مرزی طبیعی را به وجود می‌آورند. تئوری الاستیسیته رابطه‌های بین متغیرهای ثانویه و میدان جابجـایی را تعیین می‌کند.

$$\boldsymbol{F}(x,i\omega)=\boldsymbol{L}_{NB}\boldsymbol{U}(x,i\omega) \qquad ۱۶-۱$$

$\boldsymbol{L}_{NB}$ اپراتور دیفرانسیلی خطی برای شرایط مـرزی طبیعـی مـی‌باشـد. بـا جایگـذاری رابطـه ۱-۱۴ در معادلـه ۱-۱۶ و درنظرگرفتن نیروهای گرهی داریم.

$$\boldsymbol{f}_c(i\omega)=\begin{Bmatrix}-\boldsymbol{F}(0,i\omega)\\+\boldsymbol{F}(L,i\omega)\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}-\boldsymbol{L}_{NB}\boldsymbol{N}(0,i\omega)\\+\boldsymbol{L}_{NB}\boldsymbol{N}(l_e,i\omega)\end{bmatrix}\boldsymbol{d}(i\omega)=\boldsymbol{S}(i\omega)\boldsymbol{d}(i\omega) \qquad ۱۷-۱$$

که در آن

$$\boldsymbol{S}(i\omega)=\begin{bmatrix}-\boldsymbol{L}_{NB}\boldsymbol{N}(0,i\omega)\\+\boldsymbol{L}_{NB}\boldsymbol{N}(l_e,i\omega)\end{bmatrix}\boldsymbol{d}(i\omega)=\boldsymbol{G}(i\omega)\boldsymbol{H}^{-1}(i\omega) \quad (۱۸-۱)$$

و

$$\boldsymbol{G}(i\omega)=\begin{bmatrix}-\boldsymbol{L}_{NB}\boldsymbol{E}(0,i\omega)\\+\boldsymbol{L}_{NB}\boldsymbol{E}(l_e,i\omega)\end{bmatrix} \quad (۱۹-۱)$$

هستند.

ماتریس $\boldsymbol{S}(i\omega)$ ماتریس سختی دینامیکی یا ماتریس المان طیفی دقیق سیستم و تابع فرکانس می‌باشد. در معادله ۱۷-۱ علامت‌های مثبت و منفی نشان‌دهنده قرارداد علامت به کار گرفته‌شده برای فرمول‌بندی المان محدود طیفی است.

پیشرفت اخیر نرم‌افزارهای محاسبه‌ی نمادین[1]، به دست‌آوردن ماتریس المان محدود طیفی را به صورت تحلیلی آسان می‌کند. ولی با این وجود این کار برای بسیاری مسایل پیچیده از جمله مسایل دوبعدی دشوار می‌باشد و بنابراین می‌بایست، ماتریس المان طیفی به شکل عددی محاسبه شود.

۱ ۴ ۴ مزیت‌ها و عیب‌های روش المان محدود طیفی

به دلیل استفاده از ماتریس سختی دینامیکی یا ماتریس المان طیفی دقیق و ترکیب آن با روش المان طیفی بر پایه تبدیل فوریه گسسته/الگوریتم تبدیل فوریه سریع، مزیت‌های بسیاری برای روش المان محدود طیفی می‌توان بیان کرد که برخی از آن‌ها به صورت زیر خلاصه می‌شوند[۲].

۱) در تئوری روش المان محدود طیفی، حل‌های دقیقی در حوزه فرکانس ارایه می‌شود، حل مسأله مقدار ویژه (محاسبه مودها و فرکانس‌های طبیعی) و تابع‌های پاسخ فرکانسی (تابع تبدیل سیستم در حوزه فوریه) از جمله این حل‌ها می‌باشند. روش المان محدود طیفی حل‌های بسیار دقیقی را در حوزه زمان (تاریخچه زمانی پاسخ‌های فرکانسی) با محاسبه تعداد مورد نیاز مودهای موج در فرکانس‌های بالا توسط الگوریتم تبدیل فوریه سریع ایجاد می‌کند. بر همین اساس مسایل حل‌شده به وسیله مدل المان طیفی می‌توانند به عنوان مسایل معیار[2] برای ارزیابی دقت و عملکرد روش‌های حل جدید استفاده شوند.

۲) به دلیل استفاده از تنها یک المان در مدل‌سازی یک عضو سازه منظم با هر اندازه ولی بدون هیچ‌گونه ناپیوستگی مادی یا هندسی، مقیاس مسأله و همین‌طور درجه‌های آزادی سیستم کاهش می‌یابد.

---

[1] Symbolic Computing Software
[2] Benchmark Problems