وزارت علوم، تحقیقات و فناوری

دانشگاه دامغان
دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر

پایان‌نامه کارشناسی ارشد
ریاضی محض

کلاس‌هایی از گروه‌های n-آبلی

توسط:
فاطمه کشوری

استاد راهنما:
دکتر اسداله فرامرزی ثالث

استاد مشاور:
دکتر پیمان نیرومند

شهریور ۱۳۹۲


بسم الله
بسم الله الرحمن الرحیم

به نام خدا

کلاس‌هایی از گروه‌های n-آبلی

توسط:

فاطمه کشوری

پایان‌نامه

ارائه شده به تحصیلات تکمیلی دانشگاه به عنوان بخشی از فعالیت‌های تحصیلی لازم
برای اخذ درجه کارشناسی ارشد

در رشته

ریاضی محض

از دانشگاه دامغان

ارزیابی و تأیید شده توسط کمیته پایان‌نامه با درجه: **بسیار خوب**

دکتر اسداله فرامرزی ثالث **استادیار** ریاضی **محض** گرایش جبر دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر دانشگاه دامغان (استاد راهنما)

دکتر پیمان نیرومند **استادیار** ریاضی **محض** **گرایش** جبر دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر دانشگاه دامغان (استاد مشاور)

دکتر سید حیدر [illegible] استادیار ریاضی **محض** گرایش جبر دانشکده علوم ریاضی دانشگاه صنعتی شاهرود (داور اول)

دکتر بهزاد صالحیان متی کلایی **استادیار** **ریاضی محض** گرایش ترکیبیات دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر دانشگاه دامغان (داور دوم)

دکتر عبدالعلی بصیری استادیار ریاضی محض گرایش جبر محاسباتی دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر دانشگاه دامغان (نماینده تحصیلات تکمیلی)

شهریور ۱۳۹۲

تقدیم به

پدر و مادر عزیزم،

آنان که راستی قامتم

در شکستگی قامتشان تجلی یافت،

سر وجودشان همیشه سرسبز و مستدام باد

سپاسگزاری

الهی! ادای شکر تو را هیچ زبان نیست و دریای فضل تو را هیچ کران نیست و سر حقیقت تو بر هیچکس عیان نیست، هدایت کن بر ما رهی که بهتر از آن نیست.

اکنون که این دفتر به پایان آمده و به لطف خداوند موفق به اتمام این مقطع از تحصیل گشته‌ام بر خود لازم می‌دانم از کسانی که در این مسیر راهنمایم نموده‌اند، تشکر نمایم. در ابتدا بر خود واجب می‌دانم از خانواده عزیزم تشکر کنم که همواره در تمام مراحل زندگی پشتیبانم بودند و یاریم نمودند.

مراتب سپاس و قدردانی عمیق قلبی خود را پیشکش استاد عزیز و گرانقدرم، جناب آقای **دکتر اسد اله فرامرزی ثالث** که در طی این دو سال افتخار شاگردیشان را داشتم، ابراز نمایم. استادی که اندیشیدن را به من آموخت، نه اندیشه‌ها را. به امید آن که شاگردی شایسته برایشان بوده باشم.

از استاد بزرگوار جناب آقای دکتر پیمان نیرومند که مسئولیت مشاوره این پایان نامه را بر دوش کشیدند و افتخار شاگردی ایشان را نیز داشتم کمال تشکر را دارم.

در نهایت از دوستان عزیزم سپاسگزارم که در طی این دو سال در شادی و غم همواره همراهم بودند و سختی‌های این دو سال را برایم هموار نمودند.

فاطمه کشوری

شهریور ۱۳۹۲

چکیده

کلاس‌هایی از گروه‌های n-آبلی

به وسیله‌ی:

فاطمه کشوری

اگر n یک عدد صحیح باشد و $G \longrightarrow G$: φ_n باضابطه $\varphi_n\left(g\right) = g^n$ یک درون‌ریختی از G باشد، آن‌گاه به ازای هر $x,y \in G$، $(xy)^n = x^n y^n$. در این‌صورت G را یک گروه n -آبلی گوییم. نشان می‌دهیم که هر گروه n -آبلی حاصلضرب‌مستقیم یک n -گروه، یک $(n-1)$ -گروه و یک $Pn(1-n)$ -گروه آبلی است. در این پایان نامه به مطالعه کلاس‌های $\mathcal{B}_n$ و $\mathcal{C}_n$ می‌پردازیم که $\mathcal{B}_n$ نشان‌دهنده کلاس تمام گروه‌هایی که برای آن‌ها درون‌ریختی φ_n یک‌به‌یک است، بوده و $\mathcal{C}_n$ نشان‌دهنده کلاس تمام گروه‌هایی که برای آن‌ها درون‌ریختی φ_n پوشاست، می‌باشد. هم‌چنین نیم‌گروه نمایی $\mathbb{E}\left(G\right)$ را تعریف می‌کنیم و در نهایت $\mathbb{A}\left(G\right) = \{n \in \mathbb{Z} \mid \varphi_n \in Aut\left(G\right)\}$ را مورد مطالعه ساختاری قرار داده و شرایطی که در آن G گروه آبلی است را بررسی می‌کنیم.

واژه‌های کلیدی: گروه‌های آبلی، گروه‌های $n-$ آبلی، نمای متناهی، نیم‌گروه‌نمایی

پیشگفتار

نیلس هنریک آبل ریاضیدان نروژی از پایه گذاران جبر مدرن بود که گروه جابه‌جایی پذیر را به افتخار وی گروه آبلی هم می‌نامند. مفهوم گروه آبلی یکی از مفاهیم مهم در جبر است که در بسیاری از زمینه‌های علمی دیگر مورد استفاده قرار می‌گیرد. مفهوم n -آبلی اولین بار در سال ۱۹۴۴ توسط لوی [۱] بیان شد. در سال ۱۹۵۳ بئر [۲] یک رده‌بندی از گروه‌های n -حل‌پذیر و n -پوچ‌توان را ارائه داد. هم‌چنین آلپرین [۳] در سال ۱۹۸۶ گروه‌های n -آبلی را رده‌بندی کرد. اشخاص دیگری با الهام از مفهوم n -آبلی حالت‌های دیگری را بررسی کردند از جمله آن‌ها کاپه [۴] بود که در زمینه گروه‌های n -بل مفاهیم جدیدی ارائه داد. ما در این پایان نامه کلاس‌هایی از گروه‌های n -آبلی را بیان می‌کنیم که دلیزیا و تورتورا این مطلب را در [۸] بررسی کردند . در فصل اول مفاهیم مقدماتی که در دو فصل دیگر مورد استفاده قرار می‌گیرند را بیان می‌کنیم. در فصل دوم خواص گروه‌های n -آبلی را بررسی می‌کنیم و نشان می‌دهیم که هر گروه n -آبلی هم یک گروه n -لوی و هم یک گروه n -بل است. هم‌چنین ثابت می‌کنیم که هر گروه آبلی یک گروه n -آبلی است اما هر گروه n -آبلی، آبلی نیست که برای اثبات این مطلب نشان می‌دهیم که هر گروه n -آبلی حاصلضرب‌مستقیم یک n -گروه، یک $(n-۱)$ -گروه و یک $Pn(۱-n)$ -گروه آبلی است. کلاس همه گروه‌های G، که برای آن‌ها درون‌ریختی φ_n یک‌به‌یک است را با نماد $\mathcal{B}_n$ و کلاس تمام گروه‌های G که برای آن‌ها درون‌ریختی φ_n پوشاست را با نماد $\mathcal{C}_n$ نشان می‌دهیم. در این پایان نامه حالت‌های خاصی از این کلاس‌ها را به ازای $n \in \{-۱, ۰, ۱\}$ مطالعه می‌کنیم. اشتراک کلاس‌های $\mathcal{B}_n$ و $\mathcal{C}_n$ را با نماد $\mathcal{U}_n$ نشان می‌دهیم و مثال‌هایی را بررسی

[۱] F. W.Levi

[۲] R. Bear

[۳] J. L. Alperin

[۴] L. C. Kappe

می‌کنیم که در آن‌ها یک گروه در کلاس $\mathcal{U}_n$ است.

در فصل سوم ابتدا مفهوم نیم‌گروه نمایی $\mathbb{E}(G)$ و ویژگی‌های آن‌را بیان می‌کنیم که توسط لوی بدست آمد. هم‌چنین نتایجی در مورد زیرنیم‌گروه $\mathbb{A}(G)$ از $\mathbb{E}(G)$ را مورد بررسی قرار می‌دهیم. در نهایت ثابت می‌کنیم اگر G یک گروه باشد و $\mathbb{A}(G)$ در شرایط زیر صدق کند

الف) $۲ \in \mathbb{A}(G)$

ب) $۳ \in \mathbb{A}(G)$

ج) به ازای برخی اعداد صحیح غیر صفر n، $n \in \mathbb{A}\left(G\right)$ و $-n \in \mathbb{A}\left(G\right)$

د) $n \in \mathbb{A}(G)$ و $m \in \mathbb{A}(G)$ به‌طوری‌که $(n-۱, m-۱) \leqslant ۲$

آن‌گاه G یک گروه آبلی است.

فهرست نشانه‌های اختصاری

$exp(G)$: نمای گروه G

$AutG$: گروه اتومورفیسم‌های G

$End(G)$ گروه درون‌ریختی‌های G

$Z(G)$: مرکز گروه G

G': زیرگروه مشتق G

$\gamma_i(G)$: i -امین جمله سری مرکزی پایینی G

$Z_i(G)$: i -امین جمله سری مرکزی بالایی G

$|G|$: تعداد اعضای گروه G

G^p: زیرگروه تولید شده توسط همه g^p که $g \in G$

$\langle X \rangle$: زیرگروه تولید شده به وسیله X

π_n: مجموعه‌ی همه‌ی مقسوم علیه‌های اول n

D_n: گروه دووجهی از مرتبه n

$\mathbb{P}$: مجموعه‌ی اعدد اول

(a, b): بزرگترین مقسوم علیه مشترک a و b

$G^{(n)}$: مشتق مرتبه nام گروه G

x^y: مزدوج عضو x توسط عضو y $(y^{-1}xy)$

xH: هم‌دسته چپ H در G

$[x,y]$: جابجاگر دو عضو x و y ازگروه G $(x^{-1}y^{-1}xy)$

فصل ۱

مفاهیم مقدماتی

در این فصل مفاهیم مقدماتی که در فصل‌های بعدی مورد استفاده قرار می‌گیرند را در پنج بخش بیان می‌کنیم. بخش اول شامل تعاریف و قضایای کاربردی است که در طول این پایان نامه مورد استفاده قرار می‌گیرد. بخش دوم شامل جابه‌جاگرها و بخش سوم شامل گروه‌های پوچ‌توان است. در بخش‌های چهارم و پنجم به ترتیب حاصلضرب نیم‌مستقیم و حاصلضرب حلقوی را معرفی می‌کنیم.

۱-۱ تعاریف و قضایای کاربردی

تعریف ۱.۱.۱. فرض کنید G یک گروه متناهی باشد. دراین‌صورت نمای [۱] گروه G، کوچک‌ترین مضرب مشترک مرتبه‌ی تمام اعضای G است و آن را با $exp(G)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۲.۱.۱. فرض کنید G یک گروه و X یک مجموعه‌ی ناتهی باشد. گوییم گروه G برمجموعه X عمل می‌کند هرگاه تابعی مانند $\rho : G \times X \longrightarrow X$ که $(g, x) \longmapsto gx$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که به ازای هر $x \in X$ و $g_۱, g_۲ \in G$، داشته باشیم

$$ex = x$$

و

$$(g_۱ g_۲)\, x = g_۱\,(g_۲ x)\,.$$

تعریف ۳.۱.۱. دو عضو $g_۱$ و $g_۲$ از گروه G جابه‌جایی‌پذیر گفته می‌شود، هرگاه $g_۱ g_۲ = g_۲ g_۱$. زیر مجموعه‌ی ناتهی X از G را یک مجموعه‌ی جابه‌جایی‌پذیر از اعضای G گوییم هرگاه برای هر $x_۱$ و $x_۲$ از X، $x_۱ x_۲ = x_۲ x_۱$. اگر G یک مجموعه جابه‌جایی‌پذیر باشد، G یک گروه آبلی [۲] نامیده می‌شود.

تعریف ۴.۱.۱. فرض کنید G یک گروه باشد. دراین‌صورت

$$Z(G) = \{b \in G \mid ab = ba \ \ \forall a \in G\}$$

که مرکز گروه G نامیده می‌شود یک زیرگروه آبلی و نرمال G است.

تعریف ۵.۱.۱. فرض کنید G گروه آبلی باشد دراین‌صورت مجموعه‌ی تمام اعضای با مرتبه متناهی G تشکیل یک زیرگروه می‌دهند که زیرگروه تابی G نامیده می‌شود.

تعریف ۶.۱.۱. گروه آبلی G را بدون تاب می‌گویند هرگاه بجز عضو همانی عضوی از مرتبه متناهی نداشته باشد.

تعریف ۷.۱.۱. اگر G یک گروه باشد و $K \trianglelefteq G$، آن‌گاه G را یک توسیع از K به وسیله گروه H گوییم هرگاه گروه خارج قسمتی $\dfrac{G}{K}$ با H یکریخت باشد.

---

[۱] Exponent

[۲] Abelian

قضیه ۸.۱.۱. [۹] *به ازای عددهای صحیح مفروض a و b، که حداقل یکی از آن‌ها صفر نیست عددهای صحیح x و y وجود دارند که*

$$(a,b)=ax+by$$

لم ۹.۱.۱. [۹] *فرض کنید p یک عدد اول است، در این‌صورت مجموعه‌ی*

$$\mathbb{Z}_{p^{\infty}}=\{\frac{m}{p^{i}}+\mathbb{Z}|m\in\mathbb{Z},(m,p)=۱,i\in\mathbb{N}\cup\{۰\}\}.$$

زیرگروهی نامتناهی از گروه آبلی جمعی $\frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}}$ است.

لم ۱۰.۱.۱. [۹] *فرض کنید p یک عدد اول و H یک زیرگروه از $\mathbb{Z}_{p^{\infty}}$ باشد در این‌صورت*

۱) *هر عضو $\mathbb{Z}_{p^{\infty}}$ دارای مرتبه متناهی p^{n} به ازای یک $n\geqslant ۰$ می‌باشد.*

۲) *اگر حداقل یک عضو از H دارای مرتبه p^{k} بوده و H هیچ عضوی از مرتبه بزرگ‌تر از p^{k} نداشته باشد، آن‌گاه H زیرگروه دوری یکریخت با $\mathbb{Z}_{p^{k}}$ می‌باشد.*

۳) *اگرمرتبه‌های عناصر H کران بالایی نداشته باشد آن‌گاه $H=\mathbb{Z}_{p^{\infty}}$.*

۴) *تنها زیرگروه‌های حقیقی $\mathbb{Z}_{p^{\infty}}$ گروه‌های دوری و متناهی بفرم $C_{n}=\langle\frac{۱}{p^{n}}+\mathbb{Z}\rangle$ هستند.*

لم ۱۱.۱.۱. [۹] *فرض کنید p یک عدد اول و $x_{۱},x_{۲},\cdots$ عنصرهایی از یک گروه آبلی G باشند به‌طوری‌که*

$$px_{۱}=e,px_{۲}=x_{۱},px_{۳}=x_{۲},...,px_{n+۱}=x_{n},...$$

دراین‌صورت زیرگروه تولید شده به وسیله $x_{i}(i\geqslant ۱)$ ها با $\mathbb{Z}_{p^{\infty}}$ یکریخت است.

لم ۱۲.۱.۱. [۹] *اگر H یک زیرگروه از $\mathbb{Z}_{p^{\infty}}$ باشد و $H\neq\mathbb{Z}_{p^{\infty}}$ آن‌گاه $\frac{\mathbb{Z}_{p^{\infty}}}{H}\cong\mathbb{Z}_{p^{\infty}}$.*

تعریف ۱۳.۱.۱. χ را یک کلاس از گروه‌ها گوییم هرگاه χ یک خانواده (ونه یک مجموعه) متشکل از تعدادی گروه باشد به‌طوری‌که شرایط زیر برای آن برقرار باشد

الف) χ شامل یک گروه از مرتبه یک باشد.

ب) اگر $G\in\chi$ و $G_{۱}$ با G یکریخت باشد آن‌گاه $G_{۱}\in\chi$.

مثال ۱۴.۱.۱. برای مثال به کلاس گروه‌های متناهی و کلاس گروه‌های آبلی می‌توان اشاره کرد.

تعریف ۱۵.۱.۱. به‌طورکلی اگر P یک خاصیت نظریه گروه‌ها باشد (یعنی خاصیتی که به گروه‌ها مربوط است) به‌طوری‌که گروه بدیهی خاصیت P را دارا باشد و P با یکریختی حفظ شود، آن‌گاه کلاس χ^P متشکل از همه گروه‌هایی که خاصیت P را دارند، یک کلاس گروه‌ها است.
یک گروه در کلاس χ، یک χ -گروه نامیده می شود.

قضیه ۱۶.۱.۱. [۹] *قضیه باقیمانده چینی: فرض کنید* $n_1, n_2, \cdots n_r$ *عددهای صحیح مثبت دوبه دو متباینی هستند یعنی به ازای* $i \neq j$، $(n_i, n_j) = 1$ *. دراین‌صورت دستگاه همنهشتی‌های خطی*

$$x \equiv a_1 (\text{به پیمانه } n_1)$$

$$x \equiv a_2 (\text{به پیمانه } n_2)$$

$$\vdots$$

$$x \equiv a_r (\text{به پیمانه } n_r)$$

جوابی دارد که به پیمانه‌ی عدد صحیح $n_1 n_2 \ldots n_r$ *یکتاست.*

تعریف ۱۷.۱.۱. فرض کنید $H \leqslant G$. هم‌چنین فرض کنید یک دنباله متناهی H_i، $0 \leqslant i \leqslant n$ از زیر گروه‌های G وجود داشته باشد به‌طوری‌که

$$H = H_0 \trianglelefteq H_1 \trianglelefteq \ldots \trianglelefteq H_{n-1} \trianglelefteq H_n = G$$

آن‌گاه رابطه فوق را یک سری به طول n از H به G می‌نامیم.

۱-۲ جابه‌جاگرها

تعریف ۱.۲.۱. فرض کنید G یک گروه و $x_۱, x_۲, \cdots$ اعضای G باشند. دراین‌صورت جابه‌جاگر $x_۱$ و $x_۲$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$[x_۱, x_۲] = x_۱^{-۱} x_۲^{-۱} x_۱ x_۲ = x_۱^{-۱} x_۱^{x_۲}$$

و زیرگروه تولید شده توسط جابه‌جاگرفوق را زیرگروه جابه‌جاگر یا زیرگروه مشتق [۳] می‌نامیم و با نماد G' نشان می‌دهیم که به صورت زیر تعریف می‌شود

$$G' = [G, G] = \langle\ [x_۱, x_۲]\ \mid\ x_۱, x_۲ \in G\ \rangle.$$

علاوه بر این، به ازای $H \subseteq G$ داریم

$$[H, G] = \langle\ [h, g]\ \mid h \in H, g \in G\ \rangle\ .$$

به‌طور کلی، یک جابه‌جاگر ساده از وزن $n \geq ۲$ به طور بازگشتی به وسیله قانون زیر تعریف می‌شود

$$[x_۱, \cdots, x_n] = [[x_۱, \cdots, x_{n-۱}], x_n],$$

که به طور قراردادی داریم

$$[x_۱] = x_۱.$$

یک نماد مفید برای مختصرنویسی به صورت زیر است

$$[x,_n y] = [x, \underbrace{y, \cdots, y}_{n}]$$

و هم‌چنین

$$x^{-y} = (x^{-۱})^y.$$

گزاره ۲.۲.۱. [۱۳] *جابه‌جاگرها دارای خواص زیر هستند.*

الف) $[x, y] = [y, x]^{-۱}$

ب) $[xy, z] = [x, z]^y [y, z]$, $[x, yz] = [x, z][x, y]^z$

ج) $[x, y^{-۱}] = [y, x]^{y^{-۱}}$, $[x^{-۱}, y] = [y, x]^{x^{-۱}}$

د) (*اتحاد هال-ویت*[۴]) $[x, y^{-۱}, z]^y [y, z^{-۱}, x]^z [z, x^{-۱}, y]^x = ۱$

که x، y و z اعضای یک گروه هستند.

---

[۳] Derived subgroup

[۴] Hall-Witt identity

قضیه ۳.۲.۱. *فرض کنید H ، K و L زیرگروه‌هایی از گروه G باشند. در این‌صورت*

(۱) $[H,K]=[K,H]$

(۲) *اگر* $H \trianglelefteq G$ *، آن‌گاه* $[H,G] \trianglelefteq H$

(۳) *اگر* $H,K \trianglelefteq G$ *، آن‌گاه* $[H,K] \trianglelefteq G$

(۴) *اگر* $K \trianglelefteq G$ *و* $K \leqslant H$ *، آن‌گاه* $\frac{H}{K} \leqslant Z\left(\frac{G}{K}\right)$ *اگروتنها اگر* $[H,G] \leqslant K$

(۵) *اگر* $H,K,L \trianglelefteq G$ *، آن‌گاه*

$$[HK,L]=[H,L]\,[K,L]\,, \quad [H,KL]=[H,K]\,[H,L]$$

اثبات. ازتعریف۱.۲.۱ وگزاره۲.۲.۱ به سادگی به نتیجه می‌رسیم. □

۱-۳ گروه‌های پوچ‌توان

در این بخش به بیان تعاریف و قضایایی در مورد گروه‌های پوچ‌توان می‌پردازیم.

تعریف ۱.۳.۱. سری

$$1 = G_0 \lhd G_1 \lhd \ldots \lhd G_t = G$$

را مرکزی گوییم، هرگاه به ازای هر i، $G_i \trianglelefteq G$ و $\frac{G_{i+1}}{G_i} \subseteq Z\left(\frac{G}{G_i}\right)$

تعریف ۲.۳.۱. گروه G را پوچ‌توان [5] گوییم، هرگاه یک سری مرکزی داشته باشد.

تعریف ۳.۳.۱. طول کوتاه‌ترین سری مرکزی از G ،کلاس پوچ‌توانی G نامیده می‌شود.
گروه پوچ‌توان از کلاس صفر دارای مرتبه یک است و گروه‌های پوچ‌توان از کلاس حداکثر ۱ گروه‌های آبلی‌اند.

قضیه ۴.۳.۱. *کلاس گروه‌های پوچ‌توان تحت زیرگروه، تصویرهمریخت و حاصلضرب مستقیم متناهی بسته است.*

اثبات. به آسانی می‌توان دید که هر زیرگروه و هر تصویرهمریخت یک گروه پوچ‌توان، پوچ‌توان است. حال برای حاصلضرب مستقیم، ابتدا قضیه را برای دو گروه پوچ‌توان ثابت می‌کنیم بدین منظور فرض کنید H و K دو گروه پوچ‌توان باشند دراین‌صورت سری‌های مرکزی زیر وجود دارد

$$1 = H_0 \subseteq H_1 \subseteq \cdots \subseteq H_m = H$$

$$1 = K_0 \subseteq K_1 \subseteq \cdots \subseteq K_n = K$$

و با اضافه کردن جملات تکراری، بدون از دست دادن کلیت، می‌توان فرض کرد $n = m$.
چون $H_i \times K_i \trianglelefteq H_{i+1} \times K_{i+1}$، بنابراین

$$1 = H_0 \times K_0 \trianglelefteq H_1 \times K_1 \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq H_n \times K_n = H \times K$$

دراین‌صورت

$$\begin{aligned} [H_i \times K_i, H \times K] &= [H_i, H] \times [K_i, K] \\ &\subseteq H_{i-1} \times K_{i-1}. \end{aligned}$$

[5] Nilpotent group

در نتیجه $H \times K$ پوچ‌توان است.

حال با یک استقرای ساده خواهیم داشت که حاصلضرب‌مستقیم هر تعداد متناهی گروه پوچ‌توان، نیز پوچ‌توان است. $\square$

تعریف ۵.۳.۱. فرض کنید $\gamma_۱(G) = G$ وبه ازای هر $i \geqslant ۲$ تعریف می‌کنیم

$$\gamma_i(G) = [\gamma_{i-۱}(G), G].$$

با توجه به قضیه‌ی ۳.۲.۱ قسمت (۴)، به ازای هر $i \geqslant ۱$

$$\frac{\gamma_i(G)}{\gamma_{i+۱}(G)} \subseteq Z\left(\frac{G}{\gamma_{i+۱}(G)}\right)$$

پس سری

$$G = \gamma_۱(G) \geqslant ... \geqslant \gamma_n(G) \geqslant ...$$

یک سری مرکزی است که سری مرکزی پایینی گروه G نامیده می‌شود.

تعریف ۶.۳.۱. فرض کنید $Z_\circ(G) = ۱$ و به ازای هر $i \geqslant \circ$ تعریف می‌کنیم

$$\frac{Z_{i+۱}(G)}{Z_i(G)} = Z\left(\frac{G}{Z_i(G)}\right).$$

واضح است که $Z_۱(G) = Z(G)$ و سری

$$۱ = Z_\circ(G) \leqslant Z_۱(G) \leqslant ... \leqslant Z_n(G) \leqslant ...$$

یک سری مرکزی است که سری مرکزی بالایی گروه G نامیده می‌شود.

قضیه ۷.۳.۱. [۱۳] *فرض کنید که*

$$۱ = G_\circ \lhd G_۱ \lhd \cdots \lhd G_n = G$$

یک سری مرکزی برای گروه پوچ‌توان G باشد. دراین‌صورت

الف) $\gamma_i(G) \leqslant G_{n-i+۱}$، بویژه $\gamma_{n+۱}(G) = ۱$.

ب) $G_i \leqslant Z_i(G)$، بویژه $Z_n(G) = G$.

ج) کلاس پوچ‌توانی G برابر با طول سری مرکزی پایینی و هم‌چنین طول سری مرکزی بالایی است.

نتیجه ۱.۳.۸. [۱۳] *گروه G پوچ‌توان است اگر و فقط اگر سری مرکزی پایینی گروه G، بعد از تعداد متناهی مرحله، به ۱ ختم شود، یا به طور معادل سری مرکزی بالایی گروه G، بعد از تعداد متناهی مرحله، به G ختم شود.*

قضیه ۱.۳.۹. [۱۳] *در یک گروه پوچ‌توان از کلاس حداکثر ۲ ، داریم*

$$(xy)^m = x^m y^m \, [y, x\,]^{\binom{m}{2}}.$$

۱-۴ حاصلضرب نیم‌مستقیم

تعریف ۱.۴.۱. فرض کنید G یک گروه دلخواه و H و N زیرگروه‌هایی از آن باشند دراین‌صورت G حاصلضرب‌مستقیم H و N نامیده می‌شود هرگاه $N \trianglelefteq G$ و $H \trianglelefteq G$ و $G = HN$ و $H \cap N = \{1\}$. دراین‌صورت حاصلضرب‌مستقیم با نماد $G = H \times N$ نشان داده می‌شود. اگر $G = H \times N$ آن‌گاه عمل ضرب در G به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$(h_1, n_1)\,(h_2, n_2) = (h_1 h_2, n_1 n_2)\,.$$

که در آن $h_1, h_2 \in H$ و $n_1, n_2 \in N$.

تعریف ۱.۴.۲. فرض کنید G یک گروه دلخواه و H و N زیرگروه‌هایی از G باشند به‌طوری‌که $N \trianglelefteq G$، $G = HN$ و $H \cap N = 1$ دراین‌صورت G حاصلضرب نیم‌مستقیم‌داخلی N توسط H نامیده می‌شود و با $G = N \rtimes H$ نشان داده می‌شود.

مثال ۱.۴.۳. گروه دووجهی D_{2n} حاصلضرب نیم‌مستقیم گروه دوری مرتبه n ویک گروه مرتبه ۲ است.

$$D_{2n} = \langle x, a \mid x^2 = 1, a^n = 1, a^{-1} = a^x \rangle$$

چون $\langle a \rangle \trianglelefteq D_{2n}$ و $\langle a \rangle \bigcap \langle x \rangle = \{1\}$ بنابراین

$$\langle a \rangle \langle x \rangle = \{1, a, ..., a^{n-1}, x, xa, ...xa^{n-1}\} = D_{2n}$$

لذا D_{2n} حاصلضرب نیم مستقیم $\langle a \rangle$ توسط $\langle x \rangle$ است. درنتیجه

$$D_{2n} = \langle a \rangle \rtimes \langle x \rangle$$

تعریف ۱.۴.۴. فرض کنید H و N دو گروه دلخواه باشند دراین‌صورت

$$\theta : H \longrightarrow Aut(N)$$
$$h \longmapsto \theta(h)$$

به‌طوری‌که

$$\theta(h) : N \longrightarrow N$$
$$n \longmapsto \theta(h)(n)$$

دراین‌صورت $\theta(h)(n)$ را با نماد $n^{\theta(h)}$ نشان می‌دهیم. حال یک عمل دوتایی روی $G = N \rtimes H$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$(h_۱, n_۱)(h_۲, n_۲) := (h_۱h_۲, n_۱^{\theta(h_۲)}n_۲).$$

که در آن $h_۱, h_۲ \in H$ و $n_۱, n_۲ \in N$. در این‌صورت $G = N \rtimes H$ یک گروه است که با $G = N \rtimes_\theta H$ نشان داده می‌شود و آن‌را حاصلضرب نیم‌مستقیم‌خارجی می‌نامیم.

۱-۵ حاصلضرب حلقوی

قضیه ۱.۵.۱ (قضیه ۲۱.۸ از[۱۴]). *X را یک مجموعه‌ی متناهی ناتهی می‌گیریم و فرض می‌کنیم G^X معرف مجموعه همه نگاشت‌ها از X به توی گروه G باشد. به ازای هر $f_۱, f_۲ \in G^X$ عضو $f_۱f_۲ \in G^X$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم*

$$(f_۱f_۲)(x) = f_۱(x) f_۲(x) \quad \forall x \in X$$

G^X نسبت به این عمل ضرب ساختار یک گروه را به خود می‌گیرد که ما آن‌را با DrG^X نمایش می‌دهیم.
به ازای هر $x \in X$ قرار می‌دهیم

$$G_x = \{f \in G^X \mid f(y) = ۱, x \neq y \in X \text{ هرگاه } \}.$$

دراین‌صورت

$$G \cong G_x \trianglelefteq DrG^X$$