دانشگاه تربیت معلم
دانشکدهٔ علوم ریاضی و کامپیوتر

پایان نامهٔ کارشناسی‌ارشد
ریاضی محض (شاخه‌ی جبر)

عنوان

ایده‌آل‌های اول وابسته به بعضی Ext–مدول‌ها

و

آرتینی بودن کوهمولوژی موضعی تعمیم یافته

تدوین
عباس حاجی زاده ندّاف

استاد راهنما
دکتر محمد تقی دیبایی

دی ۱۳۸۹

تقدیر و تشکر

نخست سپاس **خداوندی** را که عاشقانه آفرید، سخاوتمندانه بخشید و صادقانه هدایت کرد.

سپاس **پدری** را که در سایه‌سار حمایت بی‌دریغش خواستن را آزمودم، تلاش را آموختم و هدف را یافتم.

سپاس **مادری** را که با تکیه بر مهر پاکش خواسته‌ها را خواستم، زندگی را زیستم و امیدها را یافتم.

برخود می‌بالم که در مسیر نگارش پایان‌نامه‌ام فرصتی دست داد تا افتخار علم‌آموزی نزد استاد فرهیخته جناب آقای **پرفسور محمدتقی دیبایی** را در کارنامه‌ی علمی خود بنگارم، که حضور در محضر پر ارزشش مایه‌ی مباهات هر دانشجویی است.

افتخاری ارزشمند را ارج می‌نهم که استاد گرانقدر جناب آقای **پرفسور حسین ذاکری**، پایان‌نامه‌ام را به قضاوت و داوری نشت و آموخته‌ام را با محک دانشش سنجید.

هم‌چنین از سرکار خانم **دکتر مریم جهانگیری** که زحمت داور خارجی را قبول نمودند، کمال تشکر را دارم.

فرصتی است تا ابراز تشکری داشته باشم از اساتید ارجمند آقایان **دکتر طاهری زاده، دکتر جمالی، دکتر بیژن‌زاده، دکتر زباندان و دکتر رضوی** که در طول این دو سال همواره در محضرشان بوده‌ام.

در پایان از دوستان عزیزم آقایان دکتر آرش صادقی، دکتر محسن غیبی، دکتر مجید زرگر و هم‌چنین خانم دکتر راحله جعفری که من را یاری نمودند، کمال تشکر را دارم.

اظهارنامه

این پایان‌نامه براساس مقاله

M. Brodmann and L. T. Nhan, *A Finiteness Result for Associated Primes of Certain Ext-Modules*, Comm. Algebra 36:1527-1536, 2008.

و مقاله

L. Chu and Z. Tang, *On the Artinianness of Generalized Local Cohomology*, Comm. Algebra 35:3821-3827, 2007.

تدوین شده است.

جهت تکمیل نگارش پایان‌نامه، در مورد قضیه‌هایی از مقاله

R. Lu and Z. Tang, *The f-depth of an ideal on a module*, Proc. Amer. Math. Soc. 130:1905-1912, 2002.

در فصل چهارم به تفصیل بحث شده است.

چکیده

فرض کنیم R حلقه‌ای نوتری و جابه‌جایی و M، R–مدولی با تولید متناهی باشد. ابتدا با استفاده از ویژگی‌های M–رشته مطلق با بعد بزرگتر از s، درباره متناهی بودن مجموعه $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Ass}_R(\mathrm{Ext}^i_R(\frac{R}{I^n}), M)$ بحث می‌کنیم.

سپس با اضافه کردن شرط موضعی بودن به حلقه R، نشان می‌دهیم $f-depth(I+\mathrm{Ann}(M), N)$ برابر کمترین مقدار عدد صحیح r است به‌طوری‌که مدول کوهمولوژی موضعی تعمیم یافته $\mathrm{H}^r_I(M,N)$ آرتینی نباشد. در خاتمه با در نظر گرفتن عدد صحیح $r \geq 0$، برای‌هر $i \geq r$ درباره آرتینی بودن $\mathrm{H}^i_I(M,N)$ بحث می‌کنیم.

واژه‌های کلیدی: ایده‌آل‌های اول وابسته، فیلتر رشته منظم، M–رشته با بعد بزرگتر از s، محمل مدول‌های کوهمولوژی موضعی، آرتینی بودن، کوهمولوژی موضعی تعمیم یافته.

رده‌بندی موضوعی ریاضی (۲۰۱۰): ۱۳E۰۵، ۱۳D۴۵، ۱۶P۲۰، ۱۴B۱۵، ۱۳D۴۵.

مقدمه

در این پایان‌نامه در فصل‌های ۲ و ۳ فرض می‌کنیم R حلقه‌ای جابه‌جایی و نوتری، M یک R–مدول با تولید متناهی و A، R–مدولی آرتینی است.

برای ایده‌آل دلخواه I از حلقه R، برادمن[۱] در سال ۱۹۷۹ در [3] نشان داد که دو دنباله از ایده‌آل‌های اول وابسته مجموعه‌های

$$\mathrm{Ass}_R(\frac{M}{I^nM}) \qquad , \qquad \mathrm{Ass}_R(\frac{I^nM}{I^{n+1}M}) \quad , \quad n = 1, 2, \ldots$$

برای nهای بسیار بزرگ سرانجام ثابت می‌شود. در سال ۱۹۸۶ شارپ[۲] در [24] با مشاهده رابطه‌های $\frac{M}{I^nM} \cong \mathrm{Tor}_0^R(\frac{R}{I^n}, M)$ و $0 :_A I^n \cong \mathrm{Ext}_R^0(\frac{R}{I^n}, A)$ برای nهای بزرگ دوگان مطلب فوق را برای مدول‌های آرتینی اثبات کرد، یعنی نشان داد دو مجموعهٔ

$$\mathrm{Att}_R(\frac{(0 :_A I^n)}{(0 :_A I^{n-1})}) \qquad , \qquad \mathrm{Att}_R(0 :_A I^n)$$

برای nهای بسیار بزرگ به n وابسته نیست.

در سال ۱۹۹۳ ملکرسون و شنزل[۳] در [19] این مطلب را توسیع دادند. آن‌ها نشان دادند برای‌هر عدد صحیح $i \geq 0$ ، دنباله‌های

$$\mathrm{Ass}_R(\mathrm{Tor}_i^R(\frac{R}{I^n}, M)) \qquad , \qquad \mathrm{Att}_R(\mathrm{Ext}_R^i(\frac{R}{I^n}, M)) \quad , \quad n = 1, 2, \ldots$$

برای nهای بزرگ ، از n مستقل هستند.

ملکرسون و شنزل این سؤال را مطرح کردند که آیا برای nهای بزرگ مجموعه $\mathrm{Ass}_R(\mathrm{Ext}_R^i(\frac{R}{I^n}, M))$

[۱] Brodmann, M.

[۲] Sharp, R. Y.

[۳] Melkersson, L., Schenzel, P.

مستقل از n است یا نه؟

کاتزمن[1] در سال ۲۰۰۲ در نتیجه ۱.۳ در [13] ، مثالی از حلقه نوتری و موضعی $(R,\mathfrak{m})$ با دو عضو $x,y\in\mathfrak{m}$ ارائه داد که $\mathrm{Ass}_R(\mathrm{H}^{۲}_{(x,y)R}(R))$ مجموعه‌ای متناهی نیست. از این‌رو $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathrm{Ass}_R(Ext^{۲}_R(\frac{R}{(x,y)^n},R))$ نامتناهی است.

در حقیقت، در حالت کلی $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathrm{Ass}_R(\mathrm{Ext}^i_R(\frac{R}{I^n},M))$ متناهی نیست. بنابراین برای nهای بزرگ $\mathrm{Ass}_R(\mathrm{Ext}^i_R(\frac{R}{I^n},M))$ به n وابسته است.

برای راحتی در نوشتن، به‌ازای زیرمجموعه دلخواه T از $\mathrm{Spec}(R)$ و هر $i\geq ۰$ تعریف می‌کنیم:

$$(T)_i:=\{\mathfrak{p}\in T\ \ :\ \ \dim(\frac{R}{\mathfrak{p}})=i\}\ \ ,\ \ (T)_{\geq i}:=\{\mathfrak{p}\in T\ \ :\ \ \dim(\frac{R}{\mathfrak{p}})\geq i\}.$$

هم‌چنین برای مجموعه عناصر $\mathfrak{a}=(a_۱,a_۲,\dots,a_k)$ از R و عدد صحیح $i\geq ۰$ تعریف می‌کنیم:

$$T^i(I,M):=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathrm{Ass}_R(\mathrm{Ext}^i_R(\frac{R}{I^n},M)),$$
$$T^i(\mathfrak{a},M):=\bigcup_{n_۱,n_۲,\dots,n_k\in\mathbb{N}}\mathrm{Ass}_R(\mathrm{Ext}^i_R(\frac{R}{(a_۱^{n_۱},a_۲^{n_۲},\dots,a_k^{n_k})},M)).$$

در این پایان‌نامه با مطالبی که در فصل ۲ گفته می‌شود، در فصل ۳ درباره متناهی بودن مجموعه‌های $T^i(I,M)$ و $T^i(\mathfrak{a},M)$ بحث می‌کنیم و ثابت می‌کنیم

قضیه ۶.۳.

فرض کنیم $s\geq ۰$ و $r\geq ۱$ عددهای صحیح باشند. اگر برای‌هر $i<r$، $\dim(\mathrm{Supp}(\mathrm{H}^i_I(M)))\leq s$، دراین‌صورت برای هر مجموعه مولد $\mathfrak{a}=(a_۱,a_۲,\dots,a_k)$ از I و برای‌هر $t\leq r$، مجموعه‌های $(T^t(I,M))_{\geq s}$ و $(T^t(\mathfrak{a},M))_{\geq s}$، زیرمجموعه‌های مجموعه متناهی $\bigcup_{i=۰}^{t}\mathrm{Ass}_R(\mathrm{Ext}^i_R(\frac{R}{I},M))$ هستند.

قضیه ۸.۳.

فرض کنیم $s\geq ۰$ و $r\geq ۱$ عددهای صحیح باشند و برای‌هر $i<r$، $\dim(\mathrm{Supp}(\mathrm{H}^i_I(M)))\leq s$. هم‌چنین فرض کنیم $x_۱,x_۲,\dots,x_r\in I$ یک M–رشته مطلق با بعد بزرگتر از s هم‌چنین یک I–فیلتر رشته منظم مطلق نسبت به M باشد. دراین‌صورت

[1] Katzman, M.

برای‌هر مجموعه مولد $\mathfrak{a}=(a_1,a_2,\ldots,a_k)$ از I و برای‌هر $t\leq r$، مجموعه‌های $(T^t(I,M))_{\geq s}$ و $(T^t(\mathfrak{a},M))_{\geq s}$ زیرمجموعه‌های مجموعه متناهی

$$(\mathrm{Ass}_R(\frac{M}{(x_1,x_2,\ldots,x_t)M}))_{\geq s+1}\bigcup(\bigcup_{i=0}^{t}\mathrm{Ass}_R(\frac{M}{(x_1,x_2,\ldots,x_i)M}))_s$$

هستند.

در فصل ۴ فرض می‌کنیم $(R,\mathfrak{m})$ حلقه‌ای موضعی نوتری و جابه‌جایی است، I ایده‌آلی سره از R و M,N، R–مدول‌هایی با تولید متناهی هستند. به عنوان تعمیمی از مدول‌های کوهمولوژی موضعی، مدول کوهمولوژی تعمیم یافته $\mathrm{H}_I^i(M,N)$، به‌صورت زیر تعریف شده است

$$\mathrm{H}_I^i(M,N)=\varinjlim_{n}\mathrm{Ext}_R^i(\frac{M}{I^nM},N),$$

که خواص بنیادی زیر را دارد.

۱) برای‌هر $i\geq 0$، $\mathrm{H}_I^i(M,N)$، I–تاب است.

۲) $\mathrm{H}_I^0(M,N)=\mathrm{H}_I^0(\mathrm{Hom}_R(M,N))$.

۳) اگر N، I–تاب باشد دراین‌صورت، به‌ازای‌هر $i\geq 0$، $\mathrm{H}_I^i(M,N)\cong\mathrm{Ext}_R^i(M,N)$.

۴) برای‌هر $a\in I$ و هر $i\geq 0$، $\mathrm{H}_I^i(M,N)=\bigcup_{n\geq 1}(0:_{\mathrm{H}_I^i(M,N)}a^n)$.

[به [12] رجوع کنید.] در فصل ۴ آرتینی بودن مدول‌های کوهمولوژی موضعی تعمیم یافته را بررسی می‌کنیم. بیژن زاده[1] در سال ۱۹۸۰ در گزاره ۵.۵ در [1] نشان داد:

$$\inf\{i\ :\ \mathrm{H}_I^i(M,N)\neq 0\}=\mathrm{depth}(\mathrm{Ann}(\frac{M}{IM}),N).$$

از طرفی می‌دانیم که

$$\begin{aligned}\mathrm{depth}(\mathrm{Ann}(\frac{M}{IM}),N)&=\mathrm{depth}(\sqrt{\mathrm{Ann}(\frac{M}{IM})},N)\\&=\mathrm{depth}(\sqrt{I+\mathrm{Ann}(M)},N)\\&=\mathrm{depth}(I+\mathrm{Ann}(M),N).\end{aligned}$$

از این‌رو $\mathrm{depth}(I+\mathrm{Ann}(M),N)=\inf\{i\ :\ \mathrm{H}_I^i(M,N)\neq 0\}$.

[1] Bijan-zadeh, M. H.

ملکرسون در سال ۱۹۹۵ در [18] همچنین لی و تنگ [۱] در سال ۲۰۰۲ در [15] برای بحث در مورد آرتینی بودن مدول‌های کوهمولوژی موضعی، $f-depth$ را معرفی کردند و نشان دادند که

$$f-\mathrm{depth}(I,M)=\min\{i \ : \ \text{آرتینی نباشد}\ \mathrm{H}_I^i(M)\}.$$

مشابهاً در فصل ۴ نشان می‌دهیم

$$\mathrm{depth}(I+\mathrm{Ann}(M),N)=\min\{i \ : \ \text{آرتینی نباشد}\ \mathrm{H}_I^i(M,N)\}.$$

همچنین در ادامه عدد صحیح $r\geq 0$ را طوری ارائه می‌دهیم که برای‌هر $i>r$، $\mathrm{H}_I^i(M,N)$ آرتینی باشد.

با در نظر گرفتن R به‌عنوان حلقهٔ موضعی و گرنشتاین [۲] با بعد d و $R-$مدول M که دارای بعد انژکتیو [۳] متناهی است ($pd(M)<\infty$)، دیوانی آذر، سازیده و طوسی [۴] در سال ۲۰۰۵ در [11] نشان دادند که $\mathrm{H}_I^d(M,N)$ آرتینی است و تعمیمی از قضیه برای مدول‌های کوهمولوژی تعمیم یافته ارائه دادند.

در سال ۲۰۰۵ دیبایی و یاسمی [۵] در [10] درباره آرتینی بودن مدول‌های کوهمولوژی موضعی بحث کردند که تعمیمی از قضیه آن‌ها را ارائه می‌دهیم.

در ادامه نشان می‌دهیم برای‌هر عدد صحیح $r\geq pd(M)$ دو گزاره زیر معادل هستند.

۱) برای‌هر $\mathfrak{p}\in\mathrm{Supp}(N)$، $\mathrm{H}_I^r(M,\frac{R}{\mathfrak{p}})$ آرتینی است.

۲) برای‌هر $i\geq r$، $\mathrm{H}_I^i(M,N)$ آرتینی است.

در خاتمه سوالاتی را مطرح می‌کنیم که احتمالاً برای خواننده این پایان‌نامه پیش می‌آید. توجه داریم که ممکن است به برخی از این سوالات قبلاً پاسخ داده شده باشد.

---

[۱] Lu, R., Tang, Z.

[۲] Gorenstein

[۳] Projective dimension

[۴] Divaani-Azar, K., Sazeedeh, R., Tousi, M.

[۵] Dibaei, M., Yassemi, S.

فهرست مندرجات

فصل ۱

مفاهیم و مقدمات اولیه

۱.۱ مقدمه‌ای از جبر جابه‌جایی

۱.۱.۱ نمادگذاری. از نماد های $\mathbb{N}$ و $\mathbb{N}_{\circ}$ به ترتیب برای نمایش اعداد طبیعی و اعداد صحیح نامنفی استفاده خواهیم کرد. هم‌چنین از علامت‌های $\mathrm{Max}(R)$ و $\mathrm{Spec}(R)$ به ترتیب برای نشان دادن مجموعهٔ ایده‌آل‌های ماکسیمال R و مجموعهٔ ایده‌آل‌های اول R استفاده خواهیم کرد.
گروه جایگشت‌های مجموعه $\{۱, ۲, \ldots, r\}$ را با S_r نمایش می‌دهیم.

۲.۱.۱ تعریف. فرض کنیم M یک $R-$مدول باشد. محمل M را با علامت $\mathrm{Supp}_R(M)$ (یا $\mathrm{Supp}(M)$) نشان داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\mathrm{Supp}(M) := \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R) \ : \ M_{\mathfrak{p}} \neq \circ\}.$$

۳.۱.۱ تعریف. فرض کنیم I ایده‌آلی سره از حلقهٔ R باشد. مجموعهٔ ایده‌آل‌های اول شامل I را واریته I نامیده وبا علامت $\mathrm{Var}(I)$ یا $\mathrm{V}(I)$ نشان می‌دهیم.

۴.۱.۱ لم. [25, Lemma 9.20]. فرض کنید M یک مدول با تولید متناهی روی حلقهٔ جابه‌جایی R باشد. دراین‌صورت،

$$\mathrm{Supp}(M) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R) \ : \ \mathfrak{p} \supseteq (\circ : M)\} = \mathrm{Var}(\mathrm{Ann}(M)).$$

۵.۱.۱ تعریف. فرض کنیم M یک R–مدول و $\mathfrak{p}$ ایده‌آل اولی از R باشد. دراین‌صورت، $\mathfrak{p}$ یک ایده‌آل وابسته به M نامیده می‌شود، هرگاه عضوی ناصفر از M مانند m موجود باشد به‌طوری‌که $\mathfrak{p} = (\circ \underset{R}{:} m)$. مجموعهٔ تمام ایده‌آل‌های اول وابسته به M را با نماد $\mathrm{Ass}_R(M)$ (یا $\mathrm{Ass}(M)$) نمایش می‌دهیم. به‌عبارتی

$$\mathrm{Ass}_R(M) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R) \ : \mathfrak{p} = (\circ \underset{R}{:} m) \ , \ \ \circ \neq m \in M\}.$$

۶.۱.۱ تعریف. فرض کنیم M یک R–مدول باشد. دراین‌صورت مجموعهٔ مقسوم علیه‌های صفر M را با نماد $\mathbb{Z}(M)$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$\mathbb{Z}(M) = \{r \in \mathbb{R} \ \mid rm = \circ$ عضوی ناصفر از M مانند m وجود داشته باشد به‌طوری‌که $\}$.

۷.۱.۱ قضیه. [16, Theorem 6.1]. فرض کنیم R حلقه‌ای نوتری و M یک R–مدول مخالف صفر باشد. دراین‌صورت:

۱) هر عضو ماکسیمال مجموعهٔ $\{\mathrm{Ann}(x) \ : \ \circ \neq x \in M\}$ یک ایده‌آل اول وابسته به M است.

۲) $\mathbb{Z}(M) = \bigcup_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(M)} \mathfrak{p}$.

۸.۱.۱ قضیه. [16, Theorem 6.2].

اگر R حلقه‌ای نوتری باشد و S یک زیرمجموعهٔ بستهٔ ضربی R باشد، آن‌گاه

$$\mathrm{Ass}_{S^{-1}R}(S^{-1}M) = \{S^{-1}\mathfrak{p} \ : \ \ \mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(M) \ : \mathfrak{p} \cap S = \varnothing\}.$$

هم‌چنین $\mathrm{Ass}_R(M) \neq \varnothing$ اگروتنهااگر $M \neq \circ$.

۹.۱.۱ قضیه. [16, Theorem 6.3]. فرض کنیم $0 \longrightarrow N \longrightarrow M \longrightarrow L \longrightarrow 0$ یک دنبالهٔ دقیق کوتاه از R–مدول‌ها و R–همریختی‌ها باشد. دراین‌صورت

$$\mathrm{Supp}(M) = \mathrm{Supp}(N) \cup \mathrm{Supp}(L).$$

۱۰.۱.۱ قضیه. [16, Theorem 6.5]. فرض کنیم R حلقه‌ای نوتری و M یک R–مدول با تولید متناهی باشد. دراین‌صورت گزاره‌های زیر برقرارند:

۱) $\mathrm{Ass}(M)$ یک مجموعهٔ متناهی است؛

۲) $\mathrm{Ass}_R(M) \subseteq \mathrm{Supp}_R(M)$؛

۳) مجموعه عناصر مینیمال $\mathrm{Ass}_R(M)$ و مجوعه عناصر مینیمال $\mathrm{Supp}(M)$ مساوی هستند.

۱۱.۱.۱ قضیه. [25, Exercise 19.9]. فرض کنیم $0 \longrightarrow N \longrightarrow M \longrightarrow L \longrightarrow 0$ یک دنبالهٔ دقیق کوتاه از R–مدول‌ها و R–همریختی‌ها باشد. دراین‌صورت

$$\mathrm{Ass}(N) \subseteq \mathrm{Ass}(M) \subseteq \mathrm{Ass}(N) \cup \mathrm{Ass}(L).$$

۱۲.۱.۱ لم. [7, Exercise 27.2.1]. فرض کنیم R حلقه‌ای نوتری و M یک R–مدول با تولید متناهی و N یک R–مدول دلخواه باشد. دراین‌صورت:

$$\mathrm{Ass}(\mathrm{Hom}_R(M,N)) = \mathrm{Supp}(M) \cap \mathrm{Ass}(N).$$

۱۳.۱.۱ تعریف. فرض کنیم R یک حلقه و I ایده‌آلی دلخواه از R باشد. تعریف می‌کنیم:

$$\sqrt{I} = \{r \in R \ : \ r^n \in I \text{ به‌طوری‌که } n \text{ وجود دارد عدد طبیعی} \}.$$

۱۴.۱.۱ لم. [16, Exercise 2.2]. فرض کنیم I ایده‌آلی از حلقهٔ R و N یک R–مدول با تولید متناهی باشد. دراین‌صورت:

$$\sqrt{\mathrm{Ann}_R(\frac{M}{IM})} = \sqrt{\mathrm{Ann}_R(M) + I}.$$

۱.۱.۱۵ قضیه. [25, Theorem 3.61](قضیه اجتناب از ایده‌آل‌های اول). فرض کنیم $P_{۱}, P_{۲}, \cdots, P_n$ $(n \geq ۲)$ ایده‌آل‌هایی از حلقه R باشند که حداکثر دو تا از آن‌ها اول نیستند. هم‌چنین فرض کنیم S یک زیر گروه جمعی از R باشد که نسبت به ضرب بسته است و $S \subseteq \bigcup_{i=۱}^{n} P_i$. در این صورت $۱ \leq j \leq n$ وجود دارد به‌طوری‌که $S \subseteq P_j$.

۱.۱.۱۶ تعریف. یک زنجیر اکید از زیرمدول‌های $R-$مدول M مانند

$$\circ = M_{\circ} \subset M_{۱} \subset \cdots \subset M_{n-۱} \subset M_n = M$$

را یک سری ترکیبی برای M می‌نامیم اگر به‌ازای‌هر $i = ۱, ۲, \ldots, n$، مدول $\frac{M_i}{M_{i-۱}}$، یک $R-$مدول ساده باشد. به تعداد علامت‌های $\subset$ طول سری ترکیبی می‌گوییم.

۱.۱.۱۷ قضیه. [25, Theorem 7.34]. فرض کنیم $R-$مدول M دارای حداقل یک سری ترکیبی به طول n باشد. دراین‌صورت طول هر سری ترکیبی M دقیقاً n است.

۱.۱.۱۸ تعریف. گوییم طول $R-$مدول M متناهی است اگر M حداقل یک سری ترکیبی داشته باشد. در این حالت طول M را برابر طول یک سری ترکیبی برای M تعریف می‌کنیم و آن را با نماد $l(M)$ نشان می‌دهیم. اگر M هیچ سری ترکیبی نداشته باشد می‌نویسیم $l(M) = \infty$.

۱.۱.۱۹ قضیه. [25, Theorem 7.36]. فرض کنیم M یک $R-$مدول باشد. دراین‌صورت M با طول متناهی است اگروتنهااگر نوتری و آرتینی باشد.

۱.۱.۲۰ قضیه. [25, Theorem 7.41]. فرض کنیم $\circ \longrightarrow L \longrightarrow N \longrightarrow M \longrightarrow \circ$ رشته‌ای دقیق کوتاه از $R-$مدول‌ها و $R-$همریختی‌ها باشد. دراین‌صورت داریم:

۱) $l(N) < \infty$ اگروتنهااگر $l(M) < \infty$ و $l(L) < \infty$.

۲) اگر $l(N) < \infty$ آن‌گاه $l(N) = l(M) + l(L)$.

۲۱.۱.۱ قضیه. [25, Exercise 7.45]. فرض کنیم R حلقه‌ای نوتری و M یک $R-$مدول باشد. دراین‌صورت $l(M) < \infty$ اگروتنهااگر M با تولید متناهی باشد و حاصل‌ضرب تعدادی متناهی از ایده‌آل‌های ماکسیمال (نه لزوماً متمایز) M را صفر کند.

۲۲.۱.۱ قضیه. [2, P 274 Theorem 7]. فرض کنیم R حلقه‌ای نوتری و M یک $R-$مدول با تولید متناهی باشد. دراین‌صورت گزاره‌های زیر معادل هستند:

۱) $l(M) < \infty$؛

۲) هر عضو $\mathrm{Ass}(M)$ یک ایده‌آل ماکسیمال R است؛

۳) هر عضو $\mathrm{Supp}(M)$ یک ایده‌آل ماکسیمال R است.

۲۳.۱.۱ تعریف. فرض کنیم M مدولی روی حلقهٔ R و I ایده‌آلی از R باشد. دراین‌صورت،

۱) $\mathrm{ht}_R(\mathfrak{p}) := \sup\{n \in \mathbb{N}_\circ \ : \ \mathfrak{p}_\circ \subset \cdots \subset \mathfrak{p}_n = \mathfrak{p} \ , \ \mathfrak{p}_i \in \mathrm{Spec}(R)\}$ ارتفاع ایده‌آل اول $\mathfrak{p}$ نامیده می‌شود. اگر این سوپریمم موجود نباشد، بنا بر قرارداد می‌نویسیم $\mathrm{ht}_R(\mathfrak{p}) = \infty$.

۲) برای حلقهٔ R بعد به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\dim(R) := \sup\{\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) \ : \ \mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)\}.$$

۳) برای ایده‌آل سرهٔ I از حلقهٔ R، ارتفاع I به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\mathrm{ht}_R(I) := \inf\{\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) \ : \ \mathfrak{p} \supseteq I \ , \ \mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)\}.$$

۲۴.۱.۱ تعریف. بعد M را با علامت $\dim_R(M)$ نشان می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\dim_R(M) := \sup\{\mathrm{ht}_M(\mathfrak{p}) \ : \ \mathfrak{p} \in \mathrm{Supp}(M)\}.$$

همان‌طوری که قبلاً اشاره شد، اگر M یک $R-$مدول با تولید متناهی باشد،آن‌گاه $\mathrm{Supp}(M) = \mathrm{V}(\mathrm{Ann}(M))$. لذا در این حالت

$$\dim_R(M) = \dim_R(\frac{R}{\mathrm{Ann}(M)}).$$

۲۵.۱.۱ قضیه. [25, Exercise 9.40]. فرض کنیم M مدولی با تولید متناهی و ناصفر روی حلقهٔ جابه‌جایی و نوتری R باشد. دراین‌صورت زنجیری صعودی مانند

$$M_{0} \subset M_{1} \subset \cdots \subset M_{n-1} \subset M_{n}$$

از زیر مدول‌های M وجود دارد که $M_n = M, M_{0} = 0$ و برای هر $i = 1, 2, \ldots, n$ ایده‌آلی مانند $\mathfrak{p}_i \in \operatorname{Spec}(R)$ وجود دارد که

$$\frac{M_i}{M_{i-1}} \cong \frac{R}{\mathfrak{p}_i}.$$

۲٦.۱.۱ تعریف. فرض کنیم M یک $R-$مدول باشد. $\operatorname{Assh}(M)$ به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\operatorname{Assh}(M) = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}(M) \ : \ \dim(\frac{R}{\mathfrak{p}}) = \dim(M)\}.$$

۲.۱ همولوژی و فانکتور کوهمولوژی موضعی

۱.۲.۱ تعریف. فرض کنیم $0 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C$ رشته‌ای دقیق باشد. فانکتور F دقیق چپ نامیده می‌شود اگر رشته

$$0 \longrightarrow FA \xrightarrow{F\alpha} FB \xrightarrow{F\beta} FC$$

دقیق باشد.

فانکتور F دقیق راست نامیده می‌شود اگر از رشته دقیق $A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \longrightarrow 0$ رشته دقیق زیر

$$FA \xrightarrow{F\alpha} FB \xrightarrow{F\beta} FC \longrightarrow 0$$

حاصل شود.

۲.۲.۱ قضیه. [23, Theorem 2.11].(ایزومورفیسم الحاقی[1]) فرض کنیم R و S حلقه‌های دلخواه باشند. دراین‌صورت:

[1] Adjoint Isomorphism

۱) اگر A، R−مدول چپ، B، R−راست و S−مدول چپ و C، S−مدول چپ باشد آن‌گاه ایزومورفسیم زیر را داریم:

$$\mathrm{Hom}_S(B \otimes_R A, C) \cong \mathrm{Hom}_R(A, \mathrm{Hom}_S(B, C)).$$

۲) اگر A، R−مدول راست، B، R−مدول چپ و S−مدول راست، C، S−مدول راست باشد آن‌گاه ایزومورفسیم زیر را داریم:

$$\mathrm{Hom}_S(A \otimes_R B, C) \cong \mathrm{Hom}_R(A, \mathrm{Hom}_S(B, C)).$$

۳.۲.۱ تعریف. اگر

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow E^0 \xrightarrow{d^0} E^1 \xrightarrow{d^1} E^2 \longrightarrow \cdots$$

یک تحلیل انژکتیو دلخواه از N باشد، آن‌گاه $\mathrm{Ext}_R^n(M,N) = \dfrac{ker d_*^n}{im d_*^{n-1}}$، که در آن $d_*^n = \mathrm{Hom}(Id_M, d^n)$.

۴.۲.۱ تعریف. اگر

$$\cdots \longrightarrow P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{P_1} P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

یک تحلیل پروژکتیو دلخواه از M باشد، آن‌گاه $\mathrm{Ext}_R^n(M,N) = \dfrac{\mathrm{ker} d_{n+1*}}{im d_{n*}}$، که در آن $d_{n*} = \mathrm{Hom}(d^n, Id_N)$.

۵.۲.۱ قضیه. [23, Theorem 7.3]. اگر $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$ یک رشته دقیق از مدول‌ها باشد، دراین‌صورت به‌ازای‌هر R−مدول D، رشته دقیق بلند

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(D,A) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(D,B) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(D,C) \xrightarrow{\delta_0} \mathrm{Ext}_R^1(D,A) \longrightarrow 0$$

با هومورفیسم‌های رابط[1] $(\delta_i)_{i \geq 0}$ وجود دارد.

۶.۲.۱ قضیه. [23, Theorem 7.6]. R−مدول دلخواه N انژکتیو است اگروتنهااگر برای هر مدول M و هر $n \geq 1$، $\mathrm{Ext}^n(M,N) = 0$.

[1] Connection Homomorphism

۷.۲.۱ قضیه. [23, Proposition 7.22]. اگر $(N_k)_{k\in K}$ خانواده‌ای از R–مدول‌هاباشد، آن‌گاه یکریختی طبیعی زیر برای هر $n \geq ۰$ موجود است:

$$\mathrm{Ext}^n_R(M, \prod_{k\in K} N_k) \cong \prod_{k\in K} \mathrm{Ext}^n_R(M, N_k).$$

۸.۲.۱ قضیه. [23, Theorem 9.21]. اگر R حلقه‌ای جابه‌جایی و نوتری و M, N، R–مدول‌هایی با تولید متناهی باشند، آن‌گاه برای هر $n \geq ۰$، $\mathrm{Ext}^n_R(M, N)$، یک R–مدول با تولید متناهی است.

۹.۲.۱ قضیه. [23, Theorem 9.50]. فرض کنید R حلقه‌ای جابه‌جایی و نوتری و S زیر مجموعهٔ بستهٔ ضربی R باشد. هم‌چنین فرض کنید M, N دو R–مدول باشند که M با تولید متناهی است. دراین‌صورت برای‌هر $n \geq ۰$

$$S^{-۱}\mathrm{Ext}^n_R(M, N) \cong \mathrm{Ext}^n_{S^{-۱}R}(S^{-۱}M, S^{-۱}N).$$

۱۰.۲.۱ تعریف. فرض کنید $\mathfrak{a}$ ایده‌آلی سره از حلقهٔ R و M یک R–مدول باشد. قرار می‌دهیم $\Gamma_{\mathfrak{a}}(M) := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (۰ \underset{M}{:} \mathfrak{a}^n)$ که در آن

$$(۰ :_M \mathfrak{a}^n) = \{m \in M \ : \ \mathfrak{a}^n m = ۰ \ \}.$$

واضح است که $\Gamma_{\mathfrak{a}}(M)$ زیر مدولی از M است. هم‌چنین اگر $f : M \longrightarrow N$ یک همریختی دلخواه از R–مدول‌ها باشد، دراین‌صورت همریختی القایی $\Gamma_{\mathfrak{a}}(f) : \Gamma_{\mathfrak{a}}(M) \longrightarrow \Gamma_{\mathfrak{a}}(N)$ موجود است. هم‌چنین اگر $g : N \longrightarrow L$، R–همریختی دیگری روی R–مدول‌های L, N باشد، برای هر $r \in R$ داریم:

۱) $\Gamma_{\mathfrak{a}}(f + g) = \Gamma_{\mathfrak{a}}(f) + \Gamma_{\mathfrak{a}}(g)$

۲) $\Gamma_{\mathfrak{a}}(f \circ g) = (\Gamma_{\mathfrak{a}}(f)) \circ (\Gamma_{\mathfrak{a}}(g))$

۳) $\Gamma_{\mathfrak{a}}(rf) = r\Gamma_{\mathfrak{a}}(f)$

۴) $\Gamma_{\mathfrak{a}}(\mathrm{Id}_M) = \mathrm{Id}_{\Gamma_{\mathfrak{a}}(M)}$.

بنابراین $\Gamma_{\mathfrak{a}}(-)$ یک فانکتور هموردا و R−خطی از رستهٔ $\mathcal{C}(R)$ به روی خودش است. هم‌چنین اگر فرض کنیم $\mathfrak{b}$ نیز ایده‌آلی از R باشد، خواص زیر برقرار است.

۱) $\Gamma_{\circ}(M) = M$

۲) $\Gamma_R(M) = \circ$

۳) $\Gamma_{\mathfrak{a}}(\Gamma_{\mathfrak{b}}(M)) = \Gamma_{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}}(M)$

۴) برای حلقهٔ نوتری R که در آن $\sqrt{\mathfrak{a}} = \sqrt{\mathfrak{b}}$، داریم $\Gamma_{\mathfrak{a}}(M) = \Gamma_{\mathfrak{b}}(M)$.

۱۱.۲.۱ تعریف. با شرایط تعریف قبل، هرگاه $\Gamma_{\mathfrak{a}}(M) = \circ$، M را $\mathfrak{a}$−تاب آزاد و اگر $\Gamma_{\mathfrak{a}}(M) = M$، M را $\mathfrak{a}$−تاب می‌نامیم.

در واقع $\Gamma_{\mathfrak{a}}(M) = M$ عبارت است از این‌که، هر عضوی از M توسط توانی از $\mathfrak{a}$ صفر شود.

۱۲.۲.۱ لم. [6, Lemma 1.1.16]. فانکتور $\Gamma_{\mathfrak{a}}(-) : \mathcal{C}(R) \longrightarrow \mathcal{C}(R)$ دقیق چپ است.

۱۳.۲.۱ تعریف. برای هر $i \in \mathbb{N}_{\circ}$، i−امین فانکتور مشتق شدهٔ راست $\Gamma_{\mathfrak{a}}(-)$ را با $\mathrm{H}^i_{\mathfrak{a}}(-)$ نمایش می‌دهیم ($\mathcal{R}^i\Gamma_{\mathfrak{a}}(-) = \mathrm{H}^i_{\mathfrak{a}}(-)$)، که i−امین فانکتور کوهمولوژی موضعی نسبت به $\mathfrak{a}$ نامیده می‌شود.

- برای یک R−مدول مانند M، $\mathrm{H}^i_{\mathfrak{a}}(M)$ را i−امین مدول کوهمولوژی موضعی M نسبت به $\mathfrak{a}$ می‌نامیم.

۱۴.۲.۱ لم. فرض کنیم $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ ایده‌آل‌هایی از حلقه نوتری R باشند. دراین‌صورت $\sqrt{\mathfrak{a}} = \sqrt{\mathfrak{b}}$ اگروتنهااگر $\Gamma_{\mathfrak{a}}(-) = \Gamma_{\mathfrak{b}}(-)$. در نتیجه اگر $\sqrt{\mathfrak{a}} = \sqrt{\mathfrak{b}}$ آن‌گاه برای هر $i \in \mathbb{N}_{\circ}$ داریم $\mathrm{H}^i_{\mathfrak{a}}(-) \cong \mathrm{H}^i_{\mathfrak{b}}(-)$. بنابراین چون $\sqrt{\sqrt{\mathfrak{a}}} = \sqrt{\mathfrak{a}}$ لذا $\mathrm{H}^i_{\mathfrak{a}}(R) \cong \mathrm{H}^i_{\sqrt{\mathfrak{a}}}(R)$.

• برای محاسبهٔ $\mathrm{H}^i_{\mathfrak{a}}(M)$ و بررسی خواص فانکتور $\mathrm{H}^i_{\mathfrak{a}}(-)$ مراحلی را به صورت زیر طی می‌کنیم.

۱) یک تحلیل انژکتیو از مدول M را در نظر می‌گیریم

$$I^{\bullet}: 0 \xrightarrow{d^{-1}} I^0 \xrightarrow{d^0} I^1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow I^i \xrightarrow{d^i} I^{i+1} \longrightarrow \cdots$$

بنابراین رشته دقیق زیر را داریم

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{\alpha} I^0 \xrightarrow{d^0} I^1 \xrightarrow{d^1} I^2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow I^i \xrightarrow{d^i} I^{i+1} \longrightarrow \cdots$$

با اثر فانکتور $\Gamma_{\mathfrak{a}}(-)$ بر رشتهٔ $I^{\bullet}$ تحلیل زیر به دست می آید.

$$0 \longrightarrow \Gamma_{\mathfrak{a}}(I^0) \xrightarrow{\Gamma_{\mathfrak{a}}(d^0)} \Gamma_{\mathfrak{a}}(I^1) \longrightarrow \cdots \longrightarrow \Gamma_{\mathfrak{a}}(I^i) \xrightarrow{\Gamma_{\mathfrak{a}}(d^i)} \Gamma_{\mathfrak{a}}(I^{i+1}) \longrightarrow \cdots$$

بنابراین i−امین مدول کوهمولوژی موضعی به صورت $\mathrm{H}^i_{\mathfrak{a}}(M) = \dfrac{\ker\Gamma_{\mathfrak{a}}(d^i)}{\mathrm{im}\Gamma_{\mathfrak{a}}(d^{i-1})}$ است.

۲) به راحتی می‌توان دید که $\mathrm{H}^i_{\mathfrak{a}}(M)$ مستقل از انتخاب تحلیل انژکتیو برای M است.

۳) فانکتور $\Gamma_{\mathfrak{a}}(-)$، R−خطی و همورد است. در نتیجه $\mathrm{H}^i_{\mathfrak{a}}(-)$ که فانکتور مشتق شدهٔ راست آن است نیز R−خطی و همورد است.

۴) چون $\Gamma_{\mathfrak{a}}(-)$ فانکتور دقیق چپ است، بنابراین $\mathrm{H}^0_{\mathfrak{a}}(-)$ به طور طبیعی با $\Gamma_{\mathfrak{a}}(-)$ هم‌ارز است. در نتیجه برای‌هر R−مدول M، $\Gamma_{\mathfrak{a}}(M) = \mathrm{H}^0_{\mathfrak{a}}(M)$.

۱.۲.۱۵ قضیه. [6, Lemma 2.1.2]. فرض کنیم R حلقه‌ای نوتری باشد. برای هر R−مدول M، مدول $\dfrac{M}{\Gamma_I(M)}$، I−تاب آزاد است.

۱.۲.۱۶ قضیه. [6, Corollary 2.1.7]. فرض کنیم R حلقه‌ای نوتری و M یک R−مدول باشد. دراین‌صورت

۱) اگر M، R−مدولی I−تاب باشد، آن‌گاه برای‌هر $i > 0$، $\mathrm{H}^i_I(M) = 0$.