بسم الله الرحمن الرحیم

**دانشگاه شهید چمران اهواز**

دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر

۹۳۲۷۱۲۶

پایان نامه کارشناسی ارشد

گرایش آموزش ریاضی

**عنوان:**

# بررسی تاریخی ریشه‌های دوم و سوم اعداد و روش‌ها و الگوریتم‌های محاسبه آنها

**استاد راهنما:**

دکتر نوراله نژاد صادقی

**استاد مشاور:**

دکتر مهدی جلالوند

**نگارنده :**

فهیمه مومبینی گرمسیری

آذر ۱۳۹۳

**باسمه تعالی**

**دانشگاه شهید چمران اهواز**

دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر

## (نتیجه ارزشیابی پایان‌نامه کارشناسی ارشد)

پایان‌نامه خانم **فهیمه مومبینی گرمسیری** دانشجوی رشته **ریاضی** گرایش **آموزش ریاضی**

دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر به شماره دانشجویی **۹۱۲۷۱۰۷**

با عنوان

**بررسی تاریخی ریشه‌های دوم و سوم اعداد و روش‌ها و الگوریتم‌های محاسبه آنها**

**جهت اخذ مدرک کارشناسی ارشد در تاریخ ۹۳/۹/۱۹ توسط هیأت داوران مورد ارزشیابی قرار گرفت و با درجه عالی تصویب گردید.**

| | رتبه علمی | امضاء |
|---|---|---|
| **۱. اعضای هیأت داوران:** | | |
| **استاد راهنما:** دکتر نوراله نژاد صادقی | استادیار | ........... |
| **استاد مشاور:** دکتر مهدی جلالوند | استادیار | ........... |
| **استاد داور:** دکتر رستم محمدیان | استادیار | ............ |
| **استاد داور:** دکتر سید جمال هاشمی زاده | استادیار | ............ |
| **نماینده تحصیلات تکمیلی:** دکتر نسرین شیرعلی | استادیار | ............ |
| **۲. مدیرگروه:** دکتر علی رضایی علی آباد | دانشیار | ............ |
| **۳. معاون پژوهشی و تحصیلات تکمیلی دانشکده:** دکتر مهرداد نامداری | استادیار | ............ |
| **۴. مدیرتحصیلات تکمیلی دانشگاه:** دکتر عبدالرحمان راسخ | استاد | ............ |

## چکیده

| | | |
|---|---|---|
| نام خانوادگی: مومبینی گرمسیری | نام: فهیمه | شماره دانشجویی:۹۱۲۷۱۰۷ |

عنوان پایان نامه: بررسی تاریخی ریشه‌های دوم و سوم اعداد و روش‌ها و الگوریتم‌های محاسبه آنها

استاد راهنما: دکتر نوراله نژاد صادقی

استاد مشاور: دکتر مهدی جلالوند

| | | |
|---|---|---|
| درجه تحصیلی: کارشناسی ارشد | رشته: ریاضی | گرایش: آموزش ریاضی |
| دانشگاه: شهید چمران اهواز | دانشکده: علوم ریاضی و کامپیوتر | گروه: ریاضی |

تاریخ فارغ التحصیلی: ۱۳۹۳ تعداد صفحه:۱۲۹

کلید واژه‌ها: ریشه دوم، ریشه سوم، الگوریتم، مقدار تقریبی.

چکیده: هدف از انجام این پژوهش، بررسی تاریخی ریشه‌های دوم و سوم اعداد و روش‌ها و الگوریتم‌های محاسبه آنها و همچنین بررسی روش‌هایی از ریشه دوم است که در مدارس ابتدایی تدریس می‌شوند. این پژوهش به‌شیوه‌ی توصیفی و کتابخانه‌ای تهیه گردیده است و در آن سعی شده تا انواع مختلفی از روش‌های محاسبه ریشه‌های دوم و سوم در طول تاریخ ارایه شود و تا حد ممکن این روش‌ها با هم مقایسه شوند. همچنین با ذکر مثال‌های عددی سعی شده تا به روشن شدن روش‌ها کمک شود. در ادامه نیز به مقایسه روش‌های قدیمی و جدیدی که در مدارس ابتدایی برای محاسبه ریشه دوم به‌کار می‌رود می‌پردازیم که نمونه خوبی است برای نشان دادن این موضوع که با پژوهش‌های تاریخی درباره‌ی یک مفهوم می‌توان روش‌های ساده‌تری را برای آموزش آن مفهوم به دانش‌آموزان پیدا کرد، و در نتیجه اهمیت مطالعه تاریخ ریاضیات را تایید می‌کند.

تقدیم به

پدر بزرگوارم که درس چگونه زیستن،

مادر ارجمندم که درس عشق، محبت و دوست داشتن،

همسر گرامی‌ام که درس صبر و حوصله و مقاومت در برابر سختی‌ها را به من آموختند،

همچنین اساتید و معلمانم که چراغ هدایت و مشعل فروزان مسیر تعلیم و تربیت من بودند و تقدیم به تمام کسانی که در جهت اعتلای علمی مملکت عزیزمان تلاش و کوشش می‌نمایند.

تقدیر و تشکر

حمد و سپاس خداوندی را سزاست که واحد مطلق است و ما در مقابلش صفریم و صفر، کریمی که در تمامی مراحل زندگیم والاترین پشتیبان و مهربان‌ترین یاور من بوده است

و سپس سپاس فراوان دارم از:

استاد فرهیخته جناب آقای دکتر نوراله نژاد صادقی که در تمام مراحل انجام این پژوهش، با راهنمایی‌های ارزنده و حمایت‌های بی‌دریغشان چراغ راه من بودند؛

استاد ارجمند جناب آقای دکتر مهدی جلالوند که در تدوین این مجموعه سهم بسزایی داشتند؛

و تمامی اعضای خانواده‌ام که اگر مهربانی، صبر و حمایت آن‌ها نبود، هرگز ادامه تحصیل برایم میسر نمی‌شد؛

از خداوند متعال برای این عزیزان سلامتی، حسن عاقبت و توفیق روزافزون مسئلت دارم.

# فهرست مطالب

**عنوان** **صفحه**

# فهرست جداول

**عنوان** **صفحه**

# فهرست شکل‌ها

# فصل ۱

# ریشه دوم اعداد

## ۱-۱ مقدمه

در عصر حاضر با وجود اینکه اهمیت علم ریاضی به اوج خود رسیده است، لیکن هنوز آن‌گونه که شایسته است این علم به‌عنوان ابزاری مهم در حل مسائل زندگی و مشکلات روزمره برای همگان مشخص نشده است. هنوز در سراسر دنیا کم نیستند کسانی که این درس را به‌عنوان درسی که یادگیری آن سخت می‌باشد، به‌حساب می‌آورند. شرط لازم برای یادگیری ریاضیات این است که در ابتدا دانش‌آموزان به فهم دقیقی از مطالب درسی دست پیدا کنند و برای تحقق این امر باید هر مفهوم به ساده‌ترین و قابل فهم‌ترین شکل خود ارایه شود. برای به‌دست آوردن ساده‌ترین راه ارایه‌ی هر مفهوم به دانش‌آموزان باید تاریخ آن مفهوم را بررسی کرد و تمام نتایج به‌دست آمده را سنجید و بهترین و کارآمدترین شیوه‌ی آموزش آن را یافت و به آنان آموزش داد. در این صورت دانش‌آموز به جای حفظ طوطی‌وار مفاهیم دشوار برای حل یک مسئله، با استفاده از مفاهیمی که درک کرده است، مسئله را حل خواهد کرد.

یکی از مفاهیمی که در حل مسائل روزمره کاربرد فراوان دارد و همواره در طول تاریخ مورد توجه بوده است مفهوم ریشه‌یابی اعداد است که در مدارس ابتدایی هم آموزش داده می‌شود. در واقع نکته‌ی حائز اهمیت این است که مهم‌ترین ابزار تحلیلی محاسبان اولیه روشی برای استخراج ریشه‌های دوم اعداد بوده است. در این پژوهش ابتدا تاریخ و روش‌های استخراج ریشه‌های دوم و

سوم اعداد را بررسی کرده و سپس بهبود آموزش مفهوم ریشه را در مدارس بیان می‌کنیم که این تغییر روش نتیجه‌ی یک مطالعه تاریخی و تغییر نیازهای زمان است.

## ۱-۲ تعاریف

۱. در ریاضیات، ریشه دوم عدد $a$، عددی است که وقتی در خودش ضرب شود، عدد $a$ به‌دست آید. مثلاً ۴ ریشه دوم ۱۶ است، زیرا $۴\times۴=۱۶$. ریشه دوم عدد $a$ را با $\sqrt{a}$ نشان می‌دهیم.

۲. ریشه سوم عدد $b$، عددی است که وقتی ۳ بار در خودش ضرب شود عدد $b$ به‌دست آید. مثلاً، ۳ ریشه سوم ۲۷ است، زیرا $۳\times۳\times۳=۲۷$. ریشه سوم عدد $b$ را با $\sqrt[3]{b}$ نشان می‌دهیم، و در حالت کلی، ریشه $n$م عدد $c$، عددی است که وقتی $n$ بار در خودش ضرب شود، عدد $c$ به‌دست آید. ریشه $n$م عدد $c$ را با $\sqrt[n]{c}$ نمایش می‌دهیم. در واقع ریشه گرفتن عکس عمل به‌توان رساندن است.

۳. مربع کامل عددی صحیح است که به‌صورت مجذور یک عدد صحیح دیگر باشد، یا به‌عبارتی بتوان آن را به‌صورت ضرب یک عدد طبیعی در خودش نوشت. مثلاً عدد ۲۵ یک مربع کامل است زیرا می‌توان آن را به‌صورت $۵\times۵$ نوشت. اعدادی که مربع کامل نیستند را مربع ناکامل یا مربع ناقص می‌نامیم.

۴. الگوریتم مجموعه‌ای متناهی از دستورالعمل‌هاست که به‌ترتیب خاصی اجرا می‌شوند و مسئله‌ای را حل می‌کند. کلمه الگوریتم از تحریف نام ریاضیدان بزرگ سده نهم میلادی، محمد ابن موسی خوارزمی گرفته شده است. مفهوم الگوریتم در ریاضیات معاصر و به‌خصوص ریاضیات محاسبه‌ای اهمیت زیادی دارد. در هر گامی از دانش به این مطلب برخورد می‌کنیم که بتوانیم هر مسئله‌ای را به‌صورت کلی آن حل کنیم و این به‌معنای آن است که از یک الگوریتم آگاهی داشته باشیم.

۵. تاریخ باستان بخشی از تاریخ است که از زمانی که نخستین اسناد تاریخی به‌دست آمده است تا فرارسیدن سده‌های میانه را در بر می‌گیرد. این زمان در حدود پنج هزار سال برآورد می‌شود و آغاز آن را به‌طور معمول آغاز نگارش با خط میخی می‌دانند.

۶. قرون وسطی یا سده‌های میانه[۱]، نام یکی از چهار دوره‌ای است که برای تقسیم‌بندی تاریخ اروپا استفاده می‌شود. این چهار دوره عبارت‌اند از دوران کلاسیک باستان، قرون وسطی، عصر نوزائی (رنسانس[۲]) و دوران جدید یا مدرن که از ۱۶۰۰ میلادی شروع می‌شود. قرون وسطی در تاریخ اروپای غربی یکی از مهم‌ترین مراحل تاریخی است که از ۴۰۰ میلادی تا ۱۴۰۰ میلادی را در برمی‌گیرد.

۷. سیستم نمادگذاری موضعی یا ارزش مکانی[۳] روشی است برای نمایش یا رمزگذاری اعداد. در سیستم نمادگذاری موضعی در هر عدد هر مکان (جایگاه رقم‌ها) به‌وسیله‌ی یک مضرب ثابت با مکان مجاور در ارتباط است، که این مضرب ثابت را مبنا یا پایه‌ی آن سیستم گویند. ارزش هر رقم در یک جایگاه، برابر با حاصل‌ضرب ارزش آن رقم در توانی از مبنا است که این توان به‌وسیله جایگاه رقم مشخص می‌شود. بنابراین، ارزش یک عدد موضعی، مجموع ارزش‌های جایگاه‌های ارقام آن عدد است. با استفاده از یک نقطه‌ی مبنا (نقطه اعشار)، نمادها می‌توانند به‌صورت کسرها و یا بسط عددی از اعداد حقیقی توسعه یابند. اولین سیستم موضعی توسعه یافته، سیستم اعداد بابل در مبنای ۶۰ بود و هنوز هم برای شمارش زمان و زاویه‌ها مورد استفاده قرار می‌گیرد. سیستم‌های موضعی رایج دیگر عبارت‌اند از: سیستم دهگان، دودویی و شانزده‌تایی.

[۱] Medieval
[۲] Renaissance
[۳] Positional Notation System

۸. روش نیوتن[۱] که باعنوان روش نیوتن–رافسون[۲] نیز شناخته می‌شود، یک روش عددی برای تعیین ریشه‌ی تابع $f(x)=0$ است. فرض کنید تابعی دارید که می‌خواهید ریشه (محل برخورد تابع با محور $x$) آن را بیابید یا به اصطلاح آن را حل کنید. در روش نیوتن–رافسون ابتدا $x_0$ را به‌عنوان حدس اولیه وارد فرمول $x_1=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$ می‌کنیم تا $x_1$ به‌دست آید. به‌همین ترتیب ادامه می‌دهیم و این بار $x_1$ را در فرمول قرار می‌دهیم. به‌همین ترتیب خواهیم داشت:

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

هر چه تعداد دفعات تکرار بیشتر باشد $x$ به‌دست آمده به مقدار حقیقی ریشه نزدیک‌تر است.

## ۱-۳ اهمیت محاسبه ریشه دوم در آثار تاریخی

مطالعات نشان داده‌اند که مهم‌ترین ابزار تحلیلی محاسبان اولیه، روشی برای استخراج ریشه دوم بوده است. اهمیت محاسبه ریشه دوم در آثار ریاضیدانان و مهندسان بسیاری دیده شده است. مثلاً، بطلمیوس[۳] (قرن دوم میلادی) با استفاده‌ی نبوغ‌آمیزی از جذرهای متوالی، جدولی برای وترها ترتیب داد. این را که بطلمیوس روشی عالی برای محاسبه‌ی جذر در اختیار داشته است از آن‌جا می‌توان دریافت که برای وتر $120^\circ$ که شامل جذر ۳ است، بطلمیوس مقدار

$$\sqrt{3}=1+\frac{43}{60}+\frac{55}{60^2}+\frac{23}{60^3}$$

را به‌کار می‌برد که برابر ۱/۷۳۲۰۵۰۹ است و فقط یک واحد در آخرین رقم اعشار خطا دارد. حتی مهم‌تر از این، محاسبه‌ی او برای وتر $72^\circ$ است که برابر است با $2\sin 36^\circ$، یعنی

[۱] Newton
[۲] Raphson
[۳] Bathlimous

$$\frac{\sqrt{۵-\sqrt{۵}}}{\sqrt{۲}}$$

همچنین می‌توان دید که استخراج ریشه دوم مهم‌ترین و شاید تنها ابزار ریاضیدانان تا قرن هفدهم باقی مانده بود. شاهد این ادعا این است که هنری بریگز[۱] (۱۵۶۱-۱۶۳۱) در محاسبه‌ی جداول لگاریتم خود، از جذر به‌عنوان ابزار بنیادی استفاده کرده بود. تئون[۲] (۳۹۰ میلادی)، فیلسوف و ریاضیدان، محاسبه‌ای را شرح می‌دهد که تقریباً معادل روش ما براساس رابطه‌ی

$$(a+b)^{۲}=a^{۲}+۲ab+b^{۲}$$

است. او برای یافتن جذر ۴۵۰۰ چنین می‌نویسد:

$$\sqrt{۴۵۰۰}=\sqrt{۶۷^{۲}+۱۱}=۶۷+\frac{x}{۶۰}+\frac{y}{۶۰^{۲}}$$

سپس به روش آزمون و خطا مقادیر $x=۴$ و $y=۵۵$ را می‌یابد، که تقریب ۶۷/۰۸۱۹ را با نماد اعشاری به‌دست می‌دهد که فقط در آخرین رقم اعشار یک واحد خطا دارد (باید پیوسته به‌خاطر داشت که یونانی‌ها اعداد را در دستگاه شصتگان نمایش می‌دادند نه به‌صورت اعشاری)[۲].

نمی‌توان باور کرد که بطلمیوس روش‌های بهتری را نمی‌شناخته است. یکی از کاراترین فرمول‌هایی که تاکنون ابداع شده است به "روش هرون[۳]" مشهور است، گرچه به احتمال بسیار زیاد، بابلی‌ها مدت‌ها قبل از هرون از آن استفاده می‌کرده‌اند. این روش منسوب به هرون اسکندرانی است که مطمئناً دوران شکوفایی‌اش قبل از بطلمیوس بوده است. هرون مهندسی تجربی بود و بی‌شک باید مسئله‌های بسیاری را حل می‌کرد که شامل محاسبه‌ی جذر بودند. او نخستین برهان شناخته شده را برای فرمول مساحت مثلث برحسب طول اضلاع آن به‌دست داده است و این برهان شامل جذر است[۲].

---

[۱] Henry Briggs
[۲] Theon
[۳] Heron's Method

از آنجا که روش هرون رایج‌تر است و برخی روش‌ها را نسبت به روش هرون می‌سنجیم، بدون در نظر گرفتن ترتیب تاریخی، ابتدا روش هرون را بررسی می‌کنیم.

## ۱-۴ الگوریتم ریشه دوم هرون

هرون اسکندرانی (قرن اول میلادی) ریاضیدان و مهندس یونانی بود. او را از بزرگ‌ترین مهندسان و مخترعان دوره هلنی[1] می‌دانند. بیشتر آثار و نوشته‌های او از بین رفته است اما برخی کارهای او در کتاب‌های نوشته دانشمندان ایرانی و عرب باقی‌مانده است.

**۱-۴-۱ قضیه (روش هرون):** فرض کنید $n$ و $\alpha$ اعداد مثبت باشند و $d$ یک عدد نامنفی صحیح باشد. قرار دهیم $h(\alpha)=\frac{1}{2}\left(\alpha+\frac{n}{\alpha}\right)$، آنگاه:

الف. $\sqrt{n}$ بین $\alpha$ و $\frac{n}{\alpha}$ است.

ب. $h(\alpha)\geq\sqrt{n}$.

پ. $\left|h(\alpha)-\sqrt{n}\right|=\frac{1}{2\alpha}\left(\alpha-\sqrt{n}\right)^2$.

ت. اگر $\left|\alpha-\sqrt{n}\right|<\frac{1}{10^d}$، آنگاه $\left|h(\alpha)-\sqrt{n}\right|<\min\left(\frac{1}{10^{2d}},\frac{\alpha-\sqrt{n}}{2}\right)$.

که (ت) به این معناست که اگر $\alpha$ به $\sqrt{n}$ در مکان دهدهی $d$ میل کند، آنگاه $h(\alpha)$ در مکان $2d$ به $\sqrt{n}$ میل می‌کند. یعنی هر وقت روش هرون را به‌کار گیرید تعداد ارقام دقت را دو برابر می‌کنید. در این تخمین خطا تقریبی از مربع خطا در مرحله قبل است و به‌همین دلیل است که می‌گوییم همگرایی روش هرون به $\sqrt{n}$ درجه دوم است[۹].

به‌نظر می‌رسد که روش هرون فقط یک مورد خاص از روش نیوتن برای یافتن ریشه‌ی $f(x)=0$ است. اگر قرار دهیم:

$f(x)=x^2-n$ ، آنگاه $f'(x)=2x$ و

---
[1] یونانی‌گرایی یا هلنیسم به معنای گرایش یا گسترش به فرهنگ یونان باستان است.

$$N(\alpha)=\alpha-\frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}=\alpha-\frac{\alpha}{۲}+\frac{n}{۲\alpha}=\frac{۱}{۲}\left(\alpha+\frac{n}{\alpha}\right)$$

که دقیقاً همان تقریب هرون است[۹].

هرون تقریب $\sqrt{۷۲۰}$ را به‌صورت زیر ارزیابی می‌کند:

از آنجا که ۷۲۰ فاقد ریشه دوم گویا است، باید یک تقریب نزدیک به ریشه را در این روش پیدا کنیم. از آنجایی که نزدیک‌ترین ریشه دوم به ۷۲۰، ۷۲۹ است، ریشه ۲۷ را داریم، ۷۲۰ را به ۲۷ تقسیم کنید، نتیجه $۲۶\frac{۲}{۳}$ می‌شود، عدد ۲۷ را به آن اضافه کنید، نتیجه $۵۳\frac{۲}{۳}$ است. نصف این مقدار را در نظر می‌گیریم یعنی $۲۶\frac{۱}{۲}\frac{۱}{۳}$. بنابراین ریشه دوم ۷۲۰ خیلی نزدیک به $۲۶\frac{۱}{۲}\frac{۱}{۳}$ است. با ضرب $۲۶\frac{۱}{۲}\frac{۱}{۳}$ در خودش، عدد $۷۲۰\frac{۱}{۳۶}$ را به‌دست می‌آوریم، بنابراین تفاوت به‌دست آمده $\frac{۱}{۳۶}$ است. اگر بخواهیم تفاوت کمتر از $\frac{۱}{۳۶}$ را به‌دست آوریم به‌جای ۷۲۹ باید عددی که حالا به‌دست آوردیم ($۷۲۰\frac{۱}{۳۶}$) را استفاده کنیم و با همین روش تقریبی را پیدا کنیم که تفاوتی کمتر از $\frac{۱}{۳۶}$ دارد[۲۱].

ممکن است شما از اینکه باستانی‌ها چقدر درباره یافتن ریشه‌های دوم می‌دانستند شگفت‌زده شوید. حال نمونه‌ای قدیمی‌تر در تقریباً ۲۰۰۰ سال عقب‌تر از دنیای ریاضیات بابل باستان[۱] را بررسی می‌کنیم.

## ۱-۵ تقریب ریشه‌های دوم در ریاضیات بابل باستان

سلسله بابل باستان (از ۱۹۰۰ تا ۱۶۰۰ قبل از میلاد) در "مهد تمدن" بین‌النهرین، سرزمین بین رودخانه‌ها، مستقر بوده است. شکوفایی تجارت و اقتصاد در این قسمت جهان انگیزه‌ای برای توسعه حساب بود. سیستم شمارش بابل باستان اساساً سیستم شصتگان[۲] (مبنای شصت) با

[۱] Old Babylonian Mathematics
[۲] Sexagesimal

ترکیبی از سیستم دهدهی بود. بابلیان قدیم اعداد را نه با یک صفر واقعی یا یک "ممیز شصتگان"، بلکه با استفاده از نمادگذاری موضعی می‌نوشتند[۱۲]. با کشف بیش از چهارصد کتیبه عددی مربوط به آن زمان، مهارت‌های محاسباتی قابل توجهی آشکار شدند. علم حساب آنها به محاسبات جمعی و تصاعدهای هندسی، محاسبه‌ی مربعات و مکعب‌ها و ریشه‌های مربع گسترش یافته بود[۹].

در این بخش، ما ابعاد مختلف تقریب چهار رقمی شصتگان $\sqrt{۲}$ را روی لوح YBC۷۲۸۹[۱] بابل باستان بررسی می‌کنیم. با اشاره به کتاب‌های درسی بابل باستان، نشان می‌دهیم که این متن به احتمال زیاد یکی از تمرین‌های مدرسه‌ای کاتب کارآموز است که تقریب را از یک فهرست ضریب به‌دست آورده است. این فهرست‌های ضرایب با کاربردشان در مسائل هندسی در ادامه به‌اختصار توضیح داده می‌شوند. ما متن‌های حاوی ریشه دوم را بررسی می‌کنیم و الگوریتمی را برای ارزیابی آنها استخراج می‌کنیم که با مثال‌های مشخص بابل باستان مطابقت دارد و از نوعی ساختمان ساده هندسی، که اساس و پایه بسیاری از روش‌های دیگر بابل باستان را تشکیل می‌دهد، برخوردار است.

لوح YBC۷۲۸۹ از مجموعه یل بابلی، یکی از معروف‌ترین لوح‌های گلی ریاضیات بابل باستان است. منشأ و قدمت آن به‌درستی مشخص نیست، اما شکل گرد لوح و نوشته‌های باستانی آن نشان می‌دهد که این لوح به‌وسیله یک کاتب کارآموز در منطقه بین‌النهرین جنوبی (عراق کنونی) در یک سوم اول هزاره دوم پیش از میلاد نوشته شده است و از آن زمان در اکثر محاسبات ریاضیات بابلی به‌صورت طرح یا عکس ظاهر شده است؛ شکل ۱-۱ را مشاهده کنید. برای مثال در اینجا بخشی از شرح آن را مشاهده می‌کنید[۵۱]:

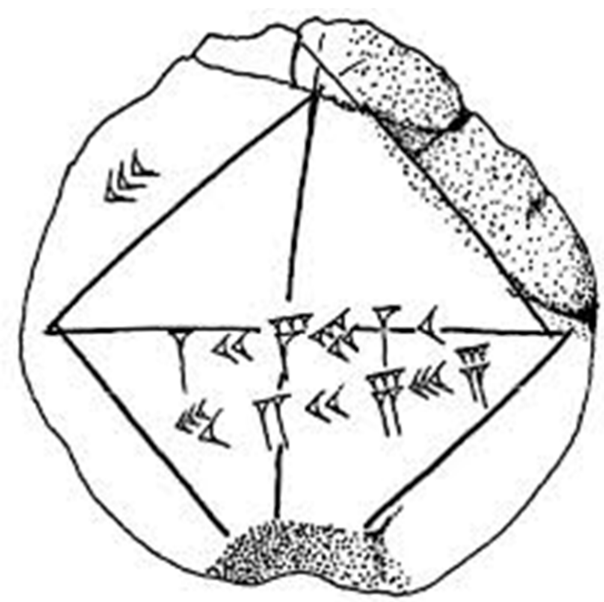
> مربعی با دو قطر روی این لوح ترسیم شده است. ضلع مربع عدد ۳۰، قطرها اعداد ۱,۲۴,۵۱,۱۰ و ۴۲,۲۵,۳۵ را نشان می‌دهند. معنی این اعداد زمانی مشخص می‌شود که عدد ۱,۲۴,۵۱,۱۰ را در ۳۰ ضرب کنیم، عملیاتی که می‌تواند به سادگی

[۱] Yale Babylonian Collection

با تقسیم ۱,۲۴,۵۱,۱۰ بر ۲ و انتقال نماد اعشار به چپ انجام شود زیرا ۰;۲ و ۳۰ (در دستگاه شصتگان) معکوس[۱] یکدیگر هستند. نتیجه این عملیات ۴۲,۲۵,۳۵ می‌باشد.

بنابراین اگر $a = ۳۰$ با استفاده از $\sqrt{۲} = ۱;۲۴,۵۱,۱۰$ به قطر $d = ۴۲;۲۵,۳۵$ دست می‌یابیم.

(نقطه ویرگول برای ممیز شصتگان و کاما برای جدا کردن استفاده می‌شوند. نقطه ویرگول‌های شصتگان که اندازه کامل اعداد را نشان می‌دهند فقط در جمله آخر درج شده‌اند. روشی برای نمایش مقدار مطلق یک عدد با خط میخی وجود نداشت، نه از طریق صفرهای نهایی و نه از طریق نقطه ویرگول‌های شصتگان. در صورت نیاز کاتب‌ها به واحدهای اندازه‌گیری رجوع می‌کردند یا کلمه‌ای مانند "شصت" یا "هزار" را پس از یک عدد برای نمایش دامنه تقریب آن می‌نوشتند.)



**شکل ۱-۱: لوح بابل باستان YBC ۷۲۸۹**

[۱] reciprocal

قاعده حروف نویسی اعداد در ۵۰ سال اخیر آسان‌تر و مشخص‌تر شده است. ما روش‌های جدید و استاندارد طراحی شده به‌وسیله فریبرگ[۱] را به‌کار می‌بریم: اعداد بدون نمایش مقدار مطلق حروف نویسی می‌شوند؛ فاصله‌ها بین مکان‌های شصتگان واقع می‌شوند؛ دهگان و یا واحدهای مفقود به‌وسیله صفرها نمایش داده می‌شوند؛ و نقطه ویرگول‌های شصتگان در تفسیر و ترجمه افزوده می‌شوند[۲۳].

اگر ۳۰ را به‌صورت $۱/۲ = ۰;۳۰$ و در نتیجه ۴۲ ۲۵ ۳۵ را به‌صورت $۰;۳۵\ ۲۵\ ۴۲$ تفسیر کنیم اعداد نوشته شده در برابر قطر تقریب‌های $\sqrt{۲}$ و $\frac{۱}{\sqrt{۲}}$ را نشان می‌دهند. بنابراین ما دارای یک جفت معکوس از اعداد با تفسیر هندسی آنها هستیم، و تمام اعداد روی لوح ارتباط نزدیکی با ۲ دارند. اهمیت معکوس‌ها در ریاضیات بابل به‌خوبی مشخص و معلوم شده بود (در محاسبات معکوس عدد $n$ را با $IGI\text{-}n$ نشان می‌دهیم). جدول‌های زیادی از این معکوس‌ها یافت شده است که: تعداد زیادی شامل مجموعه‌های استانداردی از معکوس‌های اعداد منتظم[۲] (اعداد مثبتی که معکوس آنها بسط اعشاری متناهی دارند)، برخی شامل تقریب اعداد نامنتظم، یک لوح قابل توجه مربوط به اواخر دوره سلوکیان از معکوس‌های شش‌رقمی منتظم، و بخش‌های کوچکی از لوح‌های دیگر سلوکیان می‌باشند[۵۳]. بنابراین، متنِ YBC۷۲۸۹ به‌خوبی مشغله‌های ریاضیاتی بابل را شرح می‌دهد.

فریبرگ در خلاصه فشرده سه صفحه‌ای نوشته شده‌ی خود به‌نام MCT[۳][۵۲]، لوح YBC۷۲۸۹ را به‌عنوان "لوح عدسی شکل با طرح هندسی که تقریب‌های بسیار خوب $\sqrt{۲} = ۱;۲۴\ ۵۱\ ۱۰$ (و $۴۲\ ۲۵\ ۳۵[;] \cong \frac{۱}{\sqrt{۲}}$) را نمایش می‌دهد" تعریف می‌کند.

[۱] Friberg
[۲] Regular numbers
[۳] Mathematical Cuneiform Texts