دانشگاه تهران

ایدآلهای حذفی و مدولهای مقداری در جبر جابجایی

پایان‌نامه‌ی کارشناسی ارشد

پیمان ناصح‌پور

استاد راهنما

دکتر سیامک یاسمی

خرداد ۱۳۷۸

۱۳۷۸ /۹/ ۲۰

جمهوری اسلامی ایران

دانشگاه تهران

دانشکده علوم

بسمه تعالی

اداره کل تحصیلات تکمیلی دانشگاه

احتراماً" به اطلاع میرساند که جلسه دفاع از پایان نامه دوره **کارشناسی ارشد ریاضی محض**
آقای **پیمان ناصح پور** تحت عنوان :

ایدآلهای حذفی و مدولهای مقداری

در تاریخ ۷۸/۳/۱۹ در **دانشکده علوم دانشگاه تهران** برگزار گردید.
هیأت داوران براساس کیفیت پایان نامه، مقالات انتشار یافته، استماع دفاعیه و نحوه پاسخ به سؤالات،
پایان نامه ایشان را برای دریافت **درجه کارشناسی ارشد در** رشته ریاضی محض معادل با
۶ واحد با نمره ۱۹/- نوزده تمام با درجه عالی مورد ارزشیابی قرار داد.

هیأت داوران

سمت	نام و نام خانوادگی	مرتبه دانشگاهی	دانشگاه	امضاء
۱- استاد راهنما	دکتر سیامک یاسمی	استادیار	تهران	
۲ - استاد داور	دکتر امیر هوشنگ یمینی	دانشیار	صنعتی امیر کبیر	
۳- استاد داور	دکتر رحیم زارع نهندی	استاد	تهران	

سرپرست تحصیلات تکمیلی گروه	مدیر گروه	سرپرست تحصیلات تکمیلی دانشکده
رحیم زارع نهندی	محمد رضا درفشه	رسول اخروی

۲۷۹۴۰

فهرست مطلب‌ها

«پیشگفتار»

به‌نامش. داستان از این قرار است که از دوران دبیرستان به چندجمله‌ایها علاقه‌ی ویژه‌ای داشتم و این موضوع را به استادم، جناب آقای دکتر سیامک یاسمی توضیح داده بودم. ایشان که به‌فرنگ تشریف برده بودند برایم مقاله‌ی [۱۷] را به‌عنوان سوغاتیِ سفر آوردند. پس ازمطالعه‌یِ سطحی آن بر این امر واقف گشتم که موضوع مقاله درست همان‌چیزی است که آرزو داشتم موضوع پایان‌نامه‌ام باشد، از طرفی دیگر از آنجاییکه بحث درباره مبحث «مقدار» هنوز ادامه دارد پس همچون باستان‌شناسان به‌توصیف مردگان و نبش قبر آنها نپرداخته‌ایم. خوشبختانه بقیّه‌ی مرجع‌های مورد نیاز غیر از مقاله‌ی [۱۶]ـکه آنرا نیز آقای دکتر یاسمی تهیّه فرمودندـ همگی در ایران یافت شدند.

گفتنی درباره‌ی پایان‌نامه‌ام زیاد است ولی بیشتر آنها برای دفتر خاطرات مناسبند پس، از بیان آنها در اینجا در می‌گذرم.

انسانهای بسیاری به‌من یاری رسانده‌اند ولی دراینجا مایلم تا از افراد زیر نام ببرم:

پدرم و مادرم، استاد سیّد عبدالله خان انوار، زنده یاد استاد ناصر فرهنگ‌فر و دکتر سیامک یاسمی.

جا دارد در اینجا از سه داور محترم این پایان‌نامه دکتر یاسمی، دکتر زارع و دکتر یمینی و کتابدار محترم مرکز تحقیقات فیزیک نظری و ریاضی سرکار خانم هلن بدلی و تایپیست محترم سرکار خانم آناهیتا سمیع سپاسگزاری کنم.

«پیشنیازها»

پیشنیازهای لازم برای این پایان‌نامه عبارتند از جبرجابجایی و جبرهمولوژی برای این منظور دو کتاب [Matsumura] و [Rotman] کفایت می‌کنند.

برای نمادگذاری از روش کتاب [Matsumura] پیروی کرده‌ایم. تأکید می‌کنیم که در این پایان‌نامه منظورمان از عبارت «$R\ldots$ یک حلقه باشد ...» (یا عبارتهایی مشابه آن) «$R\ldots$ یک حلقه‌ی جابه‌جایی و یکدار است ...» می‌باشد. همچنین مقصودمان از عبارت «$M\ldots$ یک Rـمدول باشد ...» (یا عبارتهایی به‌مانند آن) «$R\ldots$ حلقه‌ای جابه‌جایی و یکدار باشد و M یک Rـمدول یکانی ...» است. در ضمن عبارت «M یک Rـمدول موضعاً ... است» به‌معنی «برای هر ایدآل ماکزیمال $\mathfrak{m}$، $M_{\mathfrak{m}}$ یک $R_{\mathfrak{m}}$ـمدول ... است» می‌باشد.

همچنین اگر R حلقه‌ای باشد آنگاه $\mathrm{Id}(R)$ مجموعه‌ی همه‌ی ایدآلهای R می‌باشد و اگر M یک Rـمدول باشد آنگاه $\mathrm{Sub}(M)$ مجموعه‌ی همه‌ی زیرمدولهای M می‌باشد.

مقدّمه

چندجمله‌ایها در شاخه‌های مختلف ریاضیات و دیگر دانشها کاربرد بسزایی دارند. گاوس (Gauss) برای بررسی تحویلپذیری چندجمله‌ایها دست به‌ابتکار جالبی می‌زند و مفهوم مقدار را مطرح می‌کند. طبق تعریف سنّتی گاوس مقدار یک چندجمله‌ای بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک ضریب‌های آن است و او یک چندجمله‌ای را اوّلیّه می‌نامد هرگاه فقط یک‌لهای حلقه‌ی مورد نظر همه ضریب‌های آن را بشمارند و ثابت می‌کند که روی ح ت ی حاصل‌ضرب دو چندجمله‌ای اوّلیّه، اوّلیّه است. این حکم به لم گاوس معروف شده است.

کاپلانسکی در کتاب معروف خود [۳] نشان می‌دهد که لم گاوس برای دامنه‌های ب م م نیز برقرار است. طبق تعریف دامنه‌ای ب م م است که هرگاه هر دو عضو آن بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک داشته باشند.

خانم تسانگ (Tsang) شاگرد کاپلانسکی کوشش می‌کند تا در رساله‌ی دکترای خود حکم‌های سنّتی جالب جبرجابه‌جایی را تعمیم دهد که یکی از آنها لم گاوس است و به‌همین دلیل نام رساله‌ی خود را لم گاوس می‌گذارد. تسانگ در رساله‌ی خود مفهوم مقدار را برای هر چندجمله‌ای که ضریب‌های آن از حلقه‌ی جابه‌جایی و یکدار دلخواهی می‌آیند تعمیم می‌دهد و مقدار یک چندجمله‌ای را ایدآل تولید شده توسط ضریب‌های آن تعریف می‌کند و مقدار چندجمله‌ای f را با $c(f)$ نشان می‌دهد و می‌بیند که تابع مقدار نیم ضربی است؛ یعنی برای هر دو چندجمله‌ای f, g، $c(fg) \subseteq c(f)c(g)$. او علاقه‌مند است که ببیند در چه‌هنگامی رابطه‌ی شمول بالا می‌تواند به‌تساوی تبدیل شود و چندجمله‌ای f را گاوسی می‌نامد هرگاه برای هر چندجمله‌ای g رابطه‌ی شمول گفته شده در بالا به‌تساوی تبدیل گردد و ثابت می‌کند که اگر روی دامنه‌ی D، $c(f)$ ایدآلی وارونپذیر باشد آنگاه f یک چندجمله‌ای گاوسی است و در رساله‌ی خود پرسشی مطرح می‌کند که از اهمیّت ویژه‌ای برخوردار است. پرسش تسانگ این است که آیا در دامنه‌ی D اگر f یک چندجمله‌ای گاوسی باشد، $c(f)$ ایدآلی وارونپذیر می‌باشد یا نه. در مقاله‌ی [۱۳] ثابت شده است که اگر D دامنه‌ای نوتری باشد و $f \in D[t]$ و

$c(f)$ یک چند جمله‌ای گاوسی باشد آنگاه $c(f)$ ایدآلی وارونپذیر می‌باشد. پرسش تسانگ بوسیله‌ی دامنه‌های نوتری پاسخی مثبت داده شده است. همچنین تسانگ حلقه‌ی R را گاوسی می‌نامد هرگاه برای هر دو چندجمله‌ای f، g رابطه‌ی شمول بالا به‌تساوی تبدیل شود؛ یعنی همه‌ی چندجمله‌ایها گاوسی باشند و ثابت می‌کند که دامنه‌هایی گاوسی هستند که ایدآلهای متناهی-مولّد ناصفر آن همگی وارونپذیر باشند. به‌چنین دامنه‌هایی، دامنه‌ی پروفر (Prüfer) گویند. هفت سال پس از انتشار رساله‌ی دکترای خود تسانگ مقاله [۱۸] را منتشر می‌کند ولی این قضیه‌ی مهم را هیچگاه چاپ نمی‌کند. گیلمر (Gilmer) دوسال پس از انتشار رساله‌ی دکترای تسانگ در [۱۲] این حکم را مجدداً به‌طور مستقل ثابت می‌کند. ما این حکم را قضیه تسانگ-گیلمر نامیدیم و از جنبه‌ای آنرا تعمیم دادیم. در حقیقت گیلمر در [۱۲] با استفاده از لم ددکیند-مرتنس قضیه‌ی تسانگ-گیلمر را ثابت می‌کند. لم ددکیند-مرتنس می‌گوید که برای هر f، g در $R[t]$، $n \in \mathbb{N}$ هست به‌گونه‌ای‌که $c(f)^{n-1}c(f)c(g) = c(f)^{n-1}c(fg)$ و $n \leq \deg g$. در [۱۴] کران بالای بهتری برای n در لم ددکیند-مرتنس پیدا شده است. ما این را نیز از جنبه‌ای تعمیم داده‌ایم. در حقیقت تلاش کرده‌ایم تا این حکم‌های سنّتی را برای مدولها بیان و ثابت کنیم.

در حالت کلّی لم ددکیند-مرتنس نتیجه می‌دهد که اگر $c(f)$ ایدآلی حذفی باشد آنگاه f یک چندجمله‌ای گاوسی است. بنابراین به‌بررسی ایدآلهای حذفی پرداختیم و به مقاله‌ی جدید [۱۰] برخوردیم که در آن به‌زیبایی ثابت شده است که ایدآل I حذفی است اگر و تنها اگر I موضعاً اصلی و منظّم باشد. متوجّه‌شدم اندرسون (Anderson) در [۷] ثابت می‌کند که اگر $c(f)$ موضعاً اصلی باشد، f گاوسی است و نیازی نیست که $c(f)$ موضعاً منظّم باشد. در مقاله‌ی [۹] موضوع بالا به مدولها تعمیم داده شده است که سرچشمه‌ی کارهای من در فصل سوّم این پایان‌نامه است.

در [۹] مفهوم مقدار برای چندجمله‌ای‌هایی که ضریب‌های آن از یک مدول می‌آیند تعمیم داده می‌شود که زیرمدول تولید شده توسط ضریب‌های آن تعریف می‌گردد و ثابت می‌شود که اگر $c(f)$ ایدآلی موضعاً اصلی باشد آنگاه برای هر $g \in M[t]$، $c(fg) = c(f)c(g)$ که در آن M یک R-مدول است. به‌نظر من جالب‌ترین حکم فصل سوّم این پایان‌نامه نتیجه‌ی ۳.۲.۵ است که تعمیم قضیه‌ی اصلی [۱۴] می‌باشد. پس از بدست آمدن این تعمیم، مفهوم ایدآل M-حذفی به‌ذهنم رسید که تعمیمی طبیعی از ایدآلهای حذفی است. در این زمینه کوشش کردم تا تنها قضیه‌ی مقاله‌ی کوتاه [۱۰] را تعمیم دهم که در پایان گزاره‌ی ۱.۳.۸ بدست آمد. به‌نظر من این جالب‌ترین حکم فصل اول این پایان‌نامه است. فصل اوّل علاوه بر ایدآلهای M-حذفی، به‌بررسی مدولهای حذفی و مدولهای حذفی ضعیف می‌پردازد و هر

فصل سوم نیز از چندجمله ای ها بحث می کند

سه‌ی این مفهومها تعمیمی ضبیعی از ایدآلهای حذفی است.

فصل دوّم این پایان‌نامه در یک کلام به‌مدولهای مقداری می‌پردازد. خمیرمایه‌ی این بخش از مقاله‌ی جالب [؟] بدست آمده است. فرض کنیم M یک Rـمدول باشد. تابع مقدار از M به‌مجموعه‌ی ایدآلهای R را چنین تعریف می‌کنیم:

$$c(x) = \cap\{I : I \in \mathrm{Id}(R) \wedge x \in IM\}$$

این تعریف با تعریف مقدار یک چندجمله‌ای مطابقت دارد. ($R[t]$ را یک Rـمدول فرض کنید.) همچنین M را یک Rـمدول مقداری می‌گوییم هرگاه برای هر $x \in M$ داشته باشیم $x \in c(x)M$.

جالب اینکه مقداری بودن Rـمدولِ M هم‌ارز با این حکم است که برای هر خانواده‌ی ناتهی از ایدآلهای R، مانند $\{I_\alpha\}$، $\cap(I_\alpha M) = (\cap I_\alpha)M$. مدولهای مقداری ویژگیهای جالبی دارند مثلاً در شرط لم ناکایاما صدق می‌کنند بدون آنکه متناهی‌ـمولّد باشند و همواره دارای زیر مدول ماکزیمال هستند. در این فصل همچنین قضیه‌ی اندو (Endo) را بدست می‌آوریم که می‌گوید هر مدول یکدست متناهی‌ـمولّد موضعاً آزاد است.

همچنین ثابت می‌کنیم Rـمدولِ مقداری M یکدست است اگر و تنها اگر برای هر $x \in M$ و $r \in R$، $c(rx) = rc(x)$ و نتیجه می‌گیریم که صادقانه یکدست بودن M هم‌ارز با $c(M) = R$ یا حذفی بودن مدول M است. سپس به‌سراغ موضعی‌سازی مدولهای مقداری می‌رویم و نتیجه‌های جالب دیگری بدست می‌آید که از آن جمله است چنانچه M یک Rـمدول مقداری باشد و R حلقه‌ای فون‌نویمان منظّم آنگاه $c(x) = \mathrm{Ann}\mathrm{Ann}x$. سپس به‌تعریف Rـجبرهای مقداری می‌پردازیم. مثالی خوب از Rـجبرهای مقداری همان چندجمله‌ایها است. نورثکات Northcott در [؟] ثابت می‌کند که در حقیقت اگر G یک گروه آبلی بی‌تاب باشد آنگاه $R[G]$ یک Rـجبرمقداری می‌باشد. در این بخش است که حکم‌های سنّتی درباره‌ی چندجمله‌ایها برای Rـجبرهای مقداری تعمیم می‌یابند. در آخر این فصل زیر مدولهای اوّل و اوّلیّه و مدولهای اثری و ضربی را معرّفی می‌کنیم و ارتباط آنها را با مدولهای مقداری بیان می‌کنیم. در این میان قضیه‌ی باقیمانده‌ی چینیها را از جنبه‌ای به‌مدولهای ویژه‌ای تعمیم می‌دهیم.

پایان اثبات هر حکمی را با □ نشان خواهیم داد.

در پایان گفتنی است که، پژوهش درباره‌ی مبحث مقدار ادامه دارد و به‌قول معروف، حکایت همچنان باقی است.

فصل اول

حذف

۱.۰. توضیح‌های مقدماتی

شاید یکی از مهمترین مبحث‌هایی که در ریاضیات مطرح است، مبحث حذف باشد. در جای جایِ ریاضیات همواره این پرسش مطرح می‌شود که آیا دو چیز یکسان را از دو طرف یک رابطه می‌توان حذف کرد. برای آنکه موضوع روشن شود مثالی ارایه می‌کنیم.

۱.۰.۱. مثال فرض کنیم M یک Rـمدول باشد و $x, x' \in M$ و $r \in R$. در چه‌هنگامی $rx = rx'$ ایجاب می‌کند $x = x'$ ؟ به‌عبارتی دیگر در چه هنگامی حق داریم که r را از دو طرف تساوی $rx = rx'$ حذف کنیم و نتیجه بگیریم که $x = x'$؟

حال تعریف کلی خود را ارایه می‌کنیم.

۱.۰.۲. **تعریف** فرض کنیم C, B, A سه‌مجموعه ناتهی باشند و $. : A \times B \to C$ و $(a, b).$ را با ab نشان دهیم. $a \in A$ را (A, B, C)ـحذفیِ از چپ گوییم هرگاه

$$\forall b, b' \in B(ab = ab' \to b = b')$$

و همچنین $b \in B$ را (A, B, C)ـحذفیِ از راست گوییم هرگاه

$$\forall a, a' \in A(ab = a'b \to a = a')$$

۱.۰.۳. **تعریف** فرض کنیم M یک Rـمدول باشد و $I \in \mathrm{Id}(R)$. در این‌صورت طبق تعریف

$$I.M = \{\sum_{k=1}^{n} r_k m_k : n \in \mathbb{N} \wedge \forall k \in \mathbb{N}_n (r_k \in I \wedge m_k \in M)\}$$

به‌راحتی می‌توان دید که در تعریف بالا $IM \in \mathrm{Sub}(M)$. این نکته‌ی مهم تعریف زیر را پیشنهاد می‌کند.

۱.۰.۴. **تعریف** اگر M یک Rـمدول باشد، $. : \mathrm{Id}(R) \times \mathrm{Sub}(M) \to \mathrm{Sub}(M)$ با ضابطه‌ی $(I, N) = IN$. یک تابع است.

در آخر می‌گوییم که تعریف ۱.۰.۴ دو مفهوم مدول حذفی و ایدآل Mـحذفی را برمی‌انگیزاند. در بخش ۱.۱ به‌مدول حذفی می‌پردازیم و در بخش ۱.۲ مدول حذفی ضعیف را بررسی می‌کنیم دربخش ۱.۳ به‌سراغ ایدآلهای Mـحذفی می‌رویم.

۱.۱. مدولهای حذفی.

۱.۱.۱. **تعریف** فرض کنیم M یک Rـمدول باشد. M را یک Rـمدول حذفی گوییم هرگاه $(\mathrm{Id}(R), \mathrm{Sub}(M), \mathrm{Sub}(M))$ـحذفی از راست باشد یعنی

$$\forall I, J \in \mathrm{Id}(R)\ (IM = JM \to I = J)$$

بدیهی است که هر مدول حذفی، صادق است یعنی $\mathrm{Ann}(M) = 0$.

۱.۱.۲. **گزاره** برای Rـمدولِ M عبارتهای زیر هم‌ارزند:

۱) M یک Rـمدول حذفی است.

۲) برای هر دو ایدآل I, J از R، $IM \subseteq JM$ ایجاب می‌کند $I \subseteq J$.

۳) برای هر ایدآل J از R و هر عضو a از R، $aM \subseteq JM$ ایجاب می‌کند $a \in J$.

۴) برای هر ایدآل I از R، $I = (IM : M)$.

۵) برای هر ایدآل I و J از R، $(I : J) = (IM : JM)$

اثبات: ۱←۲←۳←۴ ساده است.

۴←۵: همواره $I : J \subseteq (IM : JM)$. حال فرض کنیم $r \in (IM : JM)$ پس $rJM \subseteq IM$ و در نتیجه $rJ \subseteq (IM : M) = I$ پس $r \in (I : J)$.

۵←۱: فرض کنیم $IM = JM$ در نتیجه $(IM : JM) = (JM : IM) = R$ پس $(I : J) = (J : I) = R$ و در نتیجه $I \subseteq J$ و $J \subseteq I$ و در پایان $I = J$. □[1]

۱.۱.۳. **گزاره** هر مدول موضعاً حذفی، مدولی حذفی می‌باشد.

اثبات: ساده است. □

۱.۱.۴. **گزاره** اگر M یک Rـمدول حذفی باشد آنگاه موضعاً ناصفر است.

1) پایان اثبات هر حکمی را با □ نشان می‌دهیم.

اثبات فرض کنیم $\mathfrak{m}$ یک ایدآل ماکزیمال R باشد به‌گونه‌ای‌که $M_{\mathfrak{m}} = 0$. پس برای هر x در M، q در $R - \mathfrak{m}$ هست به‌گونه‌ای‌که $q.x = 0$، چون $R = \mathfrak{m} + (q)$ پس r در R و p در $\mathfrak{m}$ را می‌توان به‌گونه‌ای یافت که $rq + p = 1$ و در نتیجه $x = px$ پس $\mathfrak{m}M = M$ و در نتیجه $R = \mathfrak{m}$ که تناقض است. □

۱.۱.۵. گزاره فرض کنیم M یک Rـمدول موضعاً آزاد باشد. در این‌صورت عبارتهای زیر هم‌ارزند:

۱) M یک Rـمدول حذفی است.

۲) M یک Rـمدول موضعاً ناصفر است.

اثبات: ۱←۲ را در ۱.۱.۴ ثابت کردیم.

۲←۱: کافی است ثابت کنیم هر مدول آزاد، حذفی است. فرض کنیم F یک Rـمدول آزاد باشد و I, J ایدآلهایی از R به‌گونه‌ای که $IF = JF$. همچنین فرض کنیم $\{x_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ پایه‌ای برای F باشد و $a \in I$ و $\alpha_1 \in \Lambda$ پس $ax_{\alpha_1} \in JF$ و در نتیجه $ax_{\alpha_1} = \sum_{i=1}^{n} b_i x_{\alpha_i}$. پس برای $i = 1$، $b_i = 0$ و $a = b_1$ پس $a \in J$. یعنی $I \subseteq J$ به‌همین روش $J \subseteq I$ و در نتیجه $I = J$. □

۱.۱.۶. نتیجه اگر M یک Rـمدول موضعاً آزاد باشد آنگاه M حذفی است اگر و تنها اگر M موضعاً حذفی باشد.

۱.۱.۷. تبصره کاپلانسکی ثابت کرده است که هر مدول تصویری موضعاً آزاد است. در آینده ثابت خواهیم کرد که هر مدول یکدست متناهی‌ـمولّد موضعاً آزاد است. این مطلب منسوب به اندو (Endo) است.

۱.۱.۸. گزاره فرض کنیم Λ یک مجموعه‌ی اندیس باشد و M و R ـNـمدولهایی دلخواه و برای هر $\lambda \in \Lambda$ $\varphi_\lambda \in \mathrm{Hom}(M, N)$ و $L = \Sigma_{\lambda\in\Lambda}\varphi_\lambda(M)$. اگر λ یک R ـمدول حذفی باشد آنگاه M یک Rـمدول حذفی خواهد بود.

اثبات: اگر $IM = JM$ آنگاه $\Sigma_{\lambda\in\Lambda}\varphi_\lambda(IM) = \Sigma_{\lambda\in\Lambda}\varphi_\lambda(JM)$ و چون $\varphi_\lambda(IM) = I\varphi_\lambda(M)$ پس $IL = JL$ و در نتیجه $I = J$. $\square$

۱.۱.۹. **نتیجه** اگر $\varphi \in \mathrm{Hom}(M, N)$ و $\varphi(M)$ Rـمدولی حذفی باشد آنگاه M یک Rـمدول حذفی است.

۱.۱.۱۰. **نتیجه** اگر M یک Rـمدول دلخواه و M' یک Rـمدول حذفی باشد آنگاه $M \oplus M'$ یک Rـمدول حذفی خواهد بود.

اثبات: $\pi_2 : M \oplus M' \to M'$ را تابع تصویر فرض کنید. $\square$

۱.۱.۱۱. **گزاره** هر مدول یکدست، حذفی است اگر و تنها اگر صادقانه یکدست باشد.

اثبات: فرض کنیم M یک Rـمدول یکدست باشد.

$(\leftarrow)$: اگر M حذفی باشد آنگاه برای هر ایدآل ماکزیمال $\mathfrak{m}$ از R، $\mathfrak{m}M \neq M$ و در نتیجه M صادقانه یکدست خواهد بود.

$(\rightarrow)$: اگر M صادقانه یکدست باشد آنگاه برای هر ایدآل I از R داریم: $IM \neq M$، ثابت می‌کنیم $\mathrm{Ann}\left(\frac{M}{IM}\right) = I$. بدیهی است که همواره $I \subseteq \mathrm{Ann}\left(\frac{M}{IM}\right)$. حال فرض کنیم $r \in \mathrm{Ann}\left(\frac{M}{IM}\right)$ لذا $r.\frac{M}{IM} = 0$ و در نتیجه $\frac{(r)}{I} \otimes M = 0$ پس $\frac{(r)}{I} = (0)$ و در نتیجه $r \in I$. به‌دلیل آنکه $(IM : M) = \mathrm{Ann}\left(\frac{M}{IM}\right)$ پس $(IM : M) = I$ یعنی M حذفی است. $\square$

۱.۱.۱۲. **گزاره** هر مدول یکدست متناهی‌ـمولّد حذفی است اگر و تنها اگر صادق باشد.

اثبات: فرض کنیم M یک Rـمدول یکدست متناهی‌ـمولّد باشد.

$(\leftarrow)$: بدیهی است.

$(\rightarrow)$: ادّعا می‌کنیم M یک Rـمدول صادقانه یکدست است. فرض کنیم $\mathfrak{m}$ ایدآل ماکزیمالی از R است به‌گونه‌ای که $\mathfrak{m}M = M$. آنگاه $a \in \mathfrak{m}$ را می‌توان به‌گونه‌ای یافت که $(1-a)M = 0$ و چون M صادق است پس $1 - a = 0$ و در نتیجه $\mathfrak{m} = R$ که تناقض است. □

۱.۲. مدولهای حذفی ضعیف

در بخش ۱.۱ به‌مدولهای حذفی که تعمیمی طبیعی از ایدآلهای حذفی می‌باشند، پرداختیم و دیدیم که مدولهای حذفی صادق‌اند. حال مدولهای حذفی ضعیف را که تعمیمی از مدولهای حذفی می‌باشند، معرّفی می‌نماییم.

۱.۲.۱. تعریف فرض کنیم M یک Rـمدول باشد. M را یک Rـمدول حذفیِ ضعیف نامیم هرگاه

$(\mathrm{Id}(R) + \mathrm{Ann}(M))$ و $\mathrm{Sub}(M)$ و $\mathrm{Id}(R)$ـحذفی از راست باشد.

یعنی

$$\forall I, J \in \mathrm{Id}(R)(IM = JM \rightarrow I + \mathrm{Ann}(M) = J + \mathrm{Ann}(M))$$

(تصریح می‌کنیم که بنابر قرارداد، $\mathrm{Id}(R) + \mathrm{Ann}(M)$ همان مجموعه‌یِ $\{I + \mathrm{Ann}(M) : I \in \mathrm{Id}(R)\}$ می‌باشد.)

۱.۲.۲. تبصره یک مدول حذفی ضعیف، یک مدول حذفی است اگر و تنها اگر یک مدول صادق باشد.

۱.۲.۳. گزاره فرض کنیم M یک Rـمدول باشد. M یک Rـمدول حذفی ضعیف است اگر و تنها اگر یک $R/\mathrm{Ann}(M)$ـمدول حذفی باشد.