دانشگاه مازندران
دانشکده علوم ریاضی

رساله دکتری

رشته ریاضی محض گرایش جبر (نظریه حلقه و مدول)

عنوان

دوگان مدولهای بئر همراه با کاربردهائی در مدولهای بالا برنده

استاد راهنما

دکتر یحیی طالبی

اساتید مشاور

دکتر رضا عامری

دکتر کاظم خشیارمنش

نگارش

طیبه آموزگار کلاتی

بهمن ماه ۱۳۹۰

تقدیم به:

پدر و مادر عزیزم

تقدیم به:

امام رضا علیه السلام

و شهدا بخصوص:

- شهید سید مجتبی علمدار
- شهید دکتر مصطفی چمران
- شهید عبد الحسین برونسی
- شهدای دانشجو و دو شهید گمنام دانشگاه مازندران

تقدیر و سپاسگزاری: شکر و سپاس خدای را که با الطاف ربانی اش توفیق داد تا این رساله را به پایان ببرم و از خداوند منان توفیق و سعادت همه پویندگان و رهروان علم و دانش را خواهانم. پس از حمد و ثنای الهی به مصداق حدیث شریف :

من لم یشکر المخلوق، لم یشکر الخالق

برخود لازم می دانم که در کمال ادب و احترام مراتب سپاس و قدردانی صمیمانه را از همه کسانی که من را در این رساله یاری نموده اند ابراز داشته به ویژه :

از استاد راهنمای ارجمندم جناب آقای دکتر یحیی طالبی که از رهنمود ها ی ایشان در این پایان نامه بهره بردم بسیار سپاسگزارم. از اساتید مشاورم جناب آقای دکتر رضا عامری و جناب آقای دکتر کاظم خشیارمنش کمال تشکر را دارم. همچنین از اساتید بزرگوار آقایان، دکتر ابراهیم هاشمی، دکتر علی تقوی، دکتر علی اصغر طالبی و دکتر حسین هدایتی که داوری پایان نامه را به عهده گرفتند، متشکرم.

و نیز از پدر و مادر عزیزم به خاطر تمام زحماتی که برای من کشیدند بی نهایت سپاسگزارم.

چکیده

در این رساله مفهوم مدولهای دوگان بئر معرفی می کنیم و نشان می دهیم که یک ارتباط قوی بین رده ی مدولهای دوگان بئر و رده ی مدولهای بالابرنده وجود دارد. یک شرط لازم برای اینکه مجموع مستقیم مدولهای دوگان بئر، یک مدول بئر باشد، ارائه می دهیم. در این جا مفهوم مدولهای p-دوگان بئر و مدولهای دوگان ریکارت را معرفی و ارتباط بین این مدولها را بررسی می کنیم. همچنین مدولهای به طور قوی FI-τ-بالابرنده را مورد مطالعه قرار می دهیم. نشان می دهیم که جمعوند مستقیم یک مدول به طور قوی FI-τ-بالابرنده، به طور قوی FI-τ-بالابرنده است و اینکه مجموع مستقیم متناهی از کپی های یک مدول به طور قوی FI-τ-بالابرنده، به طور قوی FI-τ- بالابرنده است. مدولهای (کاملا) τ-$\oplus$-مکمل پذیر را معرفی می کنیم و نشان می دهیم که اگر M یک مدول τ-$\oplus$-مکمل پذیر و دارای شرط D_3 باشد، آنگاه M کاملا τ-$\oplus$-مکمل پذیر است.

کلمات کلیدی. مدول دوگان بئر، مدول بالابرنده، حلقه درون ریختی ، پیش رادیکال، مدول FI-τ-بالابرنده، مدول τ-$\oplus$-مکمل پذیر.

فهرست مطالب

مقدمه

مدولهای توسعه یافته تعمیم هایی از مدولهای تزریقی هستند و به طور دوگان، مدولهای بالابرنده، مدولهای مکمل پذیر تصویری را تعمیم می دهند. گر چه هر مدول دارای یک غلاف تزریقی است اما لزوما" دارای پوشش تصویری نیست و این مطلب باعث بوجود آمدن ناتقارنی در دوگان کردن مدولهای توسعه یافته به مدولهای بالابرنده وبرعکس میباشد و این امر از این حقیقت اشی می شود که هر زیر مدول دارای یک متمم [۱] است ولی لزوما" مکمل[۲] برای زیرمدولهای یک مدول دلخواه وجود ندارد. مدولهای بالابرنده برای اولین بار درسال ۱۹۷۶ توسط تاکیوشی [۳] تحت عنوان مدولهای هم مستقیم در [۲۷] معرفی شد. در ادامه افرادی چون واناجا [۴] ، کلارک [۵] ، ویزبایر،[۶] کسکین، [۷] لامپ [۸] و دیگران در این زمینه کارهای بسیاری انجام داده وتعمیمهایی از مدولهای بالا برنده را ارائه دادند که هنوز هم این تحقیقات در دانشگاههای مختلف ادامه دارد. در سال ۱۹۸۶ مدولهای مکمل پذیر ضعیف اولین بار توسط زوشینگر [۹] در [۳۹] تعریف شد ودر ادامه حالات متعددی از مکمل پذیری مانند مکمل پذیری قوی وفرامکمل پذیری برای یک مدول توسط دیگران مورد بررسی قرارگرفت. در حالت کلی یک مدول فرامکمل پذیر تصویری، گسسته ودر نتیجه بالابرنده است. در دهه ۱۹۶۰مدولهای منفرد ونامنفرد توسط افرادی چون گودرل [۱۰] مورد مطالعه و بررسی قرارگرفت([۱۳]). در سالهای اخیر دوگان این مدولها تحت عنوان مدولهای هم منفرد و ناهم منفرد و رابطه آنها با مدولهای بالا برنده توسط افرادی چون ویز بایر، کریستین لامپ، واناجا و طالبی مورد مطالعه قرار گرفته است([۳۴، ۳۷]). مفهوم حلقه های بئر و شبه بئر مورد توجه برخی از ریاضیدانان از جمله کاپلانسکی[۱۱] (۱۹۶۸) و کلارک (۱۹۶۷)و بیرکن مایر [۱۲] (۲۰۰۰) قرار گرفته است([۱۶، ۹، ۸]). در سال ۲۰۰۴، ریزوی [۱۳] و رومن [۱۴] مدولهای بئر و شبه بئر را معرفی کردند([۲۴]).

[۱] complement
[۲] supplement
[۳] Takeuchi
[۴] Vanaja
[۵] Clark
[۶] Wisbauer
[۷] Keskin
[۸] Lomp
[۹] Zoschinger
[۱۰] Gooderl
[۱۱] Kaplansky
[۱۲] Birkenmeier
[۱۳] Rizvi
[۱۴] Roman

به عنوان مثالهایی از مدولهای بئر می توان مدولهای نامنفرد توسعه یافته و گروههای نیمه ساده و مثالهایی از مدولهای شبه بئر را می توان مدولهای نامنفرد FI-توسعه یافته و گروههای آبلی بدون تاب را نام برد. در این رساله، دوگان مدولهای بئر و شبه بئر را معرفی کرده و ارتباط این مدولها را با مدولهای بالابرنده و FI-بالا برنده بررسی می کنیم. همچنین مدولهای $\mathcal{T}$- ناهم منفرد و $\mathcal{T}$-FI - ناهم منفرد را تعریف کرده و ارتباط این مدولها را با دوگان مدولهای بئر وشبه بئر بررسی می کنیم.

در فصل اول مفاهیم و قضایای مقدماتی که در فصل های بعد مورد استفاده قرار می گیرند را بیان می کنیم.

در فصل دوم به بررسی مدولهای (به طور قوی) τ-FI-بالابرنده، مدولهای τ-مکمل پذیر و (کاملا) τ-$\oplus$-مکمل پذیر می پردازیم و نتایج متعددی در مورد این مدولها ارائه می دهیم. از جمله نشان می دهیم که مجموع مستقیم متناهی از مدولهای τ-FI-بالابرنده، τ-FI-بالابرنده است (قضیه ۸.۱.۲). همچنین شرایطی را فراهم می کنیم که تحت آن هر مدول τ-$\oplus$-مکمل پذیر، یک مدول τ-بالابرنده باشد (نتیجه ۱۱.۶.۲).

در فصل سوم مدولهای پژکتیو معرفی می شوند و با استفاده از این مدولها شرط لازم و کافی برای آنکه مجموع مستقیم مدولهای بالابرنده، بالابرنده باشد را می یابیم. در بخش دوم این فصل یک تعمیم از مدولهای بالابرنده ارائه و بررسی می شود.

در ابتدای فصل چهارم مدولهای $\mathcal{T}$-ناهم منفرد را مورد مطالعه قرار می دهیم و در بخش دوم این فصل مدولهای دوگان بئر و کاربردهای آن شرح داده می شود. ارتباط بین مدولهای دوگان بئر و بالابرنده را در قضیه مهم زیر خواهیم دید:

یک مدول M بالابرنده و $\mathcal{T}$-ناهم منفرد است اگر و تنها اگر M، $\mathcal{K}$-مدول دوگان بئر باشد (قضیه ۷.۲.۴).

در فصل پنجم مدولهای p-دوگان بئر و مدولهای ریکارت و ارتباط این مدولها با یکدیگر را مورد بررسی قرار می دهیم.

در سر تا سر این رساله R نشان دهنده یک حلقه با عنصر همانی ضربی ناصفر است و منظور از مدول، یک R - مدول راست یکانی می باشد. حلقه ها در حالت کلی ناجابجایی هستند، مگر این که خلاف آن تصریح شود. از نمادهای $\mathbb{Z}$، $\mathbb{N}$، $Rad(M)$، $Z(M)$ و $E(M)$ به ترتیب برای نشان دادن حلقه اعداد صحیح، مجموعه اعداد طبیعی، رادیکال مدول M، زیر مدول منفرد مدول M و غلاف انژکتیو مدول M استفاده می کنیم.

فصل ۱

مفاهیم و قضایای مقدماتی

در این فصل به بیان مفاهیم اولیه و قضایای مقدماتی که در این رساله مورد استفاده قرار می گیرد می پردازیم.

۱.۱ مدولهای تزریقی و تصویری

تعریف ۱.۱.۱. *فرض کنید M یک مدول باشد. مدول N را M - تزریقی* [۱] *می نامیم هرگاه برای هر زیر مدول X از M، هر همریختی $\phi : X \longrightarrow N$ را بتوان به یک همریختی $\psi : M \longrightarrow N$ توسعه داد.*

تعریف ۲.۱.۱. *فرض کنید M یک مدول باشد. M، یک مدول تزریقی* [۲] *نامیده می شود هرگاه به ازای هر مدول N داشته باشیم M، N - تزریقی است. مدول M را شبه تزریقی* [۳] *گوییم هرگاه M - تزریقی باشد.*

لم ۳.۱.۱. *فرض کنید M یک مدول باشد. M تزریقی است، اگر و تنها اگر به ازای هر مدول N هر تکریختی از M به N شکافته شود.*

برهان. به لم ۲.۱ از مرجع [۲۰] رجوع شود. □

گزاره ۴.۱.۱. *فرض کنید $(M_i)_{i\in\Lambda}$ خانواده ای از مدول ها باشد. آنگاه $\prod_{i\in\Lambda} M_i$ تزریقی است اگر و تنها اگر به ازای هر $i \in \Lambda$، M_i تزریقی باشد.*

برهان. به گزاره ۶.۱ از مرجع [۲۰] رجوع شود. □

[۱] M-injective
[۲] injective
[۳] quasi-injective

تعریف ۵.۱.۱. *فرض کنید M یک مدول باشد. مدول N را M-تصویری* [۴] *می نامند هرگاه به ازای هربرووریختی $B \longrightarrow M : g$ و هر همریختی $B \longrightarrow N : f$، یک همریختی $M \longrightarrow N : h$ موجود باشد به طوری که $gh = f$.*

یا معادلاً مدول N را M- تصویری می نامند، هرگاه به ازای هر زیر مدول X از M و هر همریختی $M/X \longrightarrow N : \phi$، یک همریختی $M \longrightarrow N : \psi$ موجود باشد به طوری که نمودار زیر جابجایی باشد:

$$\begin{tikzcd} & N \arrow[dl, "\psi"'] \arrow[d, "\phi"] & \\ M \arrow[r, "\pi"] & M/X \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

که در آن $M/X \longrightarrow M : \pi$ برووریختی کانونی است.

تعریف ۶.۱.۱. *فرض کنید M یک مدول باشد. M را تصویری* [۵] *گویند هرگاه به ازای هر مدول مانند N داشته باشیم M، N-تصویری است. مدول M را شبه تصویری* [۶] *می نامند هرگاه M- تصویری باشد.*

تعریف ۷.۱.۱. *خانواده ای از مدول ها مانند $\{M_i\}_{i\in I}$ را به طور نسبی تصویری* [۷] *گویند هرگاه به ازای هر دو i و j متمایز در I داشته باشیم M_i یک مدول M_j - تصویری است.*

گزاره ۸.۱.۱. *عبارات زیر برای یک مدول M معادلند:*

(۱) *M تصویری است؛*

(۲) *هر برووریختی $0 \longrightarrow M \longrightarrow N$ شکافته می شود؛*

(۳) *M جمعوند مستقیم یک R- مدول آزاد است.*

برهان. به گزاره ۱۷.۲ از مرجع [۵] رجوع شود. □

[۴] M-projective
[۵] projective
[۶] quasi-projective
[۷] relatively projective

گزاره ۹.۱.۱. *احکام زیر برقرارند:*

(۱) *فرض کنید M یک مدول N- تصویری باشد. اگر $K \le N$، آنگاه M، K-تصویری و N/K-تصویری است.*

(۲) *مجموع مستقیم $\bigoplus_{i\in I} M_i$ یک مدول N- تصویری است، اگر و تنها اگر به ازای هر $i \in I$، M_i یک مدول N-تصویری باشد.*

(۳) *یک مدول N، $\bigoplus_{i=1}^{n} N_i$ - تصویری است اگر و تنها اگر به ازای هر $i = ۱, ۲, \cdots, n$، N یک مدول N_i- تصویری باشد.*

برهان. به گزاره ۳۱.۴-۳۳.۴ از مرجع [۲۰] رجوع شود. □

گزاره ۱۰.۱.۱. *موارد زیر برای یک مدول $M = M_۱ \oplus M_۲$ معادلند:*

(۱) *$M_۲$ یک مدول $M_۱$- تصویری است.*

(۲) *به ازای هر زیر مدول N از M به طوری که $M = N + M_۱$، زیر مدول N' از N موجود است به طوری که $M = N' \oplus M_۱$.*

برهان. به گزاره ۱۴.۴۱ از مرجع [۳۷] مراجعه شود. □

۲.۱ زیر مدولهای ناچیز

تعریف ۱.۲.۱. *فرض کنید M یک مدول باشد. زیر مدول N از M را ناچیز [۸] در M گوییم و با علامت $N \ll M$ نمایش می دهیم، هرگاه به ازای هر زیر مدول محض L از M داشته باشیم $N + L \neq M$ یا به طور معادل، به ازای هر زیر مدول L از M، از $N + L = M$ نتیجه شود $L = M$.*

مثال ۱. *بدیهی است که اعداد صحیح $\mathbb{Z}$، یک زیرمدول ناچیز در اعداد گویا $\mathbb{Q}$ است و $\mathbb{Z}$- مدول $\mathbb{Z}$ دارای زیرمدول ناچیز غیر صفر نیست.*

[۸] small

گزاره ۲.۲.۱. *فرض کنید K، L، N و M مدول باشند. آنگاه :*

(۱) *اگر $K \subseteq L \subseteq M$ آنگاه $L \ll M$ اگر وتنها اگر $K \ll M$ و $L/K \ll M/K$.*

(۲) *اگر K_1، ...، K_n زیرمدولهای ناچیز از M باشند، آنگاه $K_1 + ... + K_n$ یک زیرمدول ناچیز از M است.*

(۳) *برای هر $K \ll M$ و $f : M \to N$ داریم $f(K) \ll N$. عکس این مطلب زمانی برقرار است که $Kerf \ll M$.*

(۴) *اگر $K \subseteq L \subseteq M$ و L یک جمعوند مستقیم در M باشد، آنگاه $K \ll M$ اگر وتنها اگر $K \ll L$.*

(۵) *اگر $K \ll M$، آنگاه M متناهیا" تولید شده است اگر وتنها اگر M/K متناهیا" تولید شده باشد.*

برهان. به ۲.۲ از مرجع [۱۰] رجوع شود. □

تعریف ۳.۲.۱. *یک مدول غیر صفر M را پوچ [۹] نامند هرگاه هر زیر مدول غیر صفر ناچیز در M باشد.*

مثال ۲. $\mathbb{Z}$- *مدول $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ یک مدول پوچ است.*

تعریف ۴.۲.۱. *فرض کنید M یک مدول و $K \leq L \leq M$ باشد. اگر $L/K \ll M/K$، آنگاه K یک زیرمدول هم ناچیز [۱۰] از L در M نامیده می شود.*

گزاره ۵.۲.۱. *فرض کنید M یک مدول و $K \subseteq L \subseteq M$ باشد. آنگاه عبارات زیر معادلند:*

(۱) *K زیرمدول هم ناچیز از L در M است.*

(۲) *برای هر زیرمدول $X \subseteq M$، $L + X = M$ نتیجه می دهد که $K + X = M$.*

برهان. به ۳.۲ از مرجع [۱۰] رجوع شود. □

---

[۹] hollow
[۱۰] cosmall

تعریف ۶.۲.۱. *یک زیرمدول L از M را هم بسته [۱۱] در M گوییم هر گاه L زیر مدول محض مانند K نداشته باشد بطوریکه K زیرمدول هم ناچیز از L در M باشد.*

گزاره ۷.۲.۱. *فرض کنید $K \subseteq L \subseteq M$ زیر مدول باشند. آنگاه:*

(۱) *اگر L هم بسته در M باشد، آنگاه L/K هم بسته در M/K است.*

(۲) *اگر $K \ll L$ و L/K هم بسته در M/K باشد، آنگاه L هم بسته در M است.*

(۳) *اگر $L \subseteq M$ هم بسته باشد، آنگاه $K \ll M$ نتیجه می دهد که $K \ll L$.*

(۴) *اگر K هم بسته در M باشد، آنگاه K هم بسته در L است و عکس زمانی برقرار است که L هم بسته در M باشد.*

برهان. به۳.۷ از مرجع [۱۰] رجوع شود. □

۳.۱ مدول های مکمل پذیر و بالابرنده

تعریف ۱.۳.۱. *فرض کنید M یک مدول باشد و N و L زیر مدول های M باشند. N را یک مکمل [۱۲] برای L در M گویند، هرگاه $M = N + L$ و N نسبت به این خاصیت مینیمال باشد، یا به طور معادل $M = N + L$ و $N \cap L \ll N$.*

تعریف ۲.۳.۱. *فرض کنید M یک R - مدول و L و N زیر مدول های M باشند. N را یک مکمل ضعیف[۱۳] برای L گویند هر گاه $N + L = M$ و $N \cap L \ll M$.*

واضح است که هر زیر مدول مکمل یک زیر مدول مکمل ضعیف است.

تعریف ۳.۳.۱. *یک زیر مدول N از M را یک زیر مدول مکمل(ضعیف) یا به طور خلاصه یک مکمل(ضعیف) نامند هرگاه N یک مکمل(ضعیف) برای زیر مدولی از M باشد.*

---
[۱۱] coclosed
[۱۲] supplement
[۱۳] weak supplement

تعریف ۴.۳.۱. *مدول M مکمل پذیر(ضعیف)* [۱۴] *نامیده می شود هرگاه هر زیر مدول از M دارای یک مکمل (ضعیف) در M باشد.*

مدول های آرتینی نمونه ای از مدول های مکمل پذیر هستند.

تعریف ۵.۳.۱. *مدول M را یک مدول $\oplus$ - مکمل پذیر* [۱۵] *نامند، هرگاه هر زیر مدول از M دارای یک مکمل در M باشد به طوری که آن مکمل یک جمعوند مستقیم از M است. اگر هر جمعوند مستقیم از M یک مدول $\oplus$ - مکمل پذیر باشد، M را یک مدول کاملاً $\oplus$ - مکمل پذیر* [۱۶] *می نامند.*

گزاره ۶.۳.۱. *برای یک زیرمدول N از M عبارات زیر معادلند:*

(۱) N *یک مکمل در M است.*

(۲) N *یک مکمل ضعیف در M است که هم بسته در M است.*

(۳) N *یک مکمل ضعیف در M است و هرگاه $K \subseteq N$ و $K \ll M$، آنگاه $K \ll N$.*

برهان. به۲۰.۲ از مرجع [۱۰] رجوع شود. □

گزاره ۷.۳.۱. *فرض کنید M یک مدول و $N \leq M$. شرایط زیر را در نظر بگیرید:*

(۱) N *یک زیر مدول مکمل در M است.*

(۲) N *هم بسته در M است.*

(۳) *برای هر $K \subseteq N$، اگر $K \ll M$، آنگاه $K \ll N$.*

آنگاه (۳) $\Rightarrow$ (۲) $\Rightarrow$ (۱) برقرار هستند و اگر M یک مدول مکمل پذیر ضعیف باشد، آنگاه (۱) $\Rightarrow$ (۳) برقرار است.

برهان. به لم ۱.۱ از مرجع [۱۸] رجوع شود. □

[۱۴] (weakely) supplemented
[۱۵] $\oplus$- supplemented
[۱۶] completely $\oplus$- supplemented

گزاره ۸.۳.۱. *فرض کنید U و V زیرمدولهای M باشند و V یک مکمل از U در M باشد. آنگاه :*

(۱) *اگر $M = V + W$ برای بعضی $W \subseteq U$، آنگاه V یک مکمل از W است.*

(۲) *اگر M متناهیا تولید شده باشد، آنگاه V نیز متناهیا تولید شده است.*

(۳) *اگر $K \ll M$، آنگاه V یک مکمل از $U + K$ است.*

(۴) *فرض کنید $W \subseteq V$. آنگاه W هم بسته در V است اگر وتنها اگر W هم بسته در M باشد.*

(۵) *اگر U یک مکمل در M باشد، آنگاه U یک مکمل از V در M است.*

برهان. به۲۰.۴ از مرجع [۱۰] رجوع شود. □

گزاره ۹.۳.۱. *فرض کنید M یک مدول باشد. آنگاه :*

(۱) *فرض کنید M_1 و U زیرمدولهایی از M باشند ونیز M_1 مکمل پذیر باشد. اگر یک مکمل برای $M_1 + U$ در M وجود داشته باشد، آنگاه U نیز دارای یک مکمل در M است.*

(۲) *اگر M_1 و M_2 مدولهای مکمل پذیر باشند و $M = M_1 + M_2$، آنگاه M نیز مکمل پذیر است.*

برهان. به ۴۱.۲ از مرجع [۳۷] رجوع شود. □

گزاره ۱۰.۳.۱. *برای یک مدول متناهیا تولید شده M، عبارات زیر معادلند:*

(۱) *M مکمل پذیر است.*

(۲) *هر زیرمدول ماکسیمال از M دارای یک مکمل در M است.*

(۳) *M مجموع زیر مدولهای ناچیز است.*

برهان. به ۴۱.۶ از مرجع [۳۷] رجوع شود. □

تعریف ۱۱.۳.۱. *مدول M یک مدول فرامکمل پذیر [۱۷] نامیده می شود، هرگاه به ازای هر دو زیر مدول U و V از M به طوری که $M = U + V$، داشته باشیم U شامل یک مکمل از V است.*

[۱۷] amply supplemented

هر مدول فرامکمل پذیر یک مدول مکمل پذیر و هر مدول مکمل پذیر یک مدول مکمل پذیر ضعیف است.

گزاره ۱۲.۳.۱. *فرض کنید M یک مدول فرامکمل پذیر باشد. آنگاه :*

(۱) *هر مکمل از یک زیرمدول از M یک مدول فرامکمل پذیر است.*

(۲) *جمعوندها و مدولهای خارج قسمتی از M فرامکمل پذیر هستند.*

برهان. به ۴۱.۷ از مرجع [۳۷] رجوع شود. $\square$

گزاره ۱۳.۳.۱. *برای یک مدول M عبارات زیر معادلند:*

(۱) *M فرامکمل پذیر است.*

(۲) *هر زیر مدول $U \subseteq M$ را میتوان بصورت $U = X + Y$ نوشت که درآن X مکمل پذیر و $Y \ll M$ می باشند.*

(۳) *برای هر زیرمدول $U \subseteq M$، یک زیرمدول مکمل پذیر $X \subseteq U$ وجود دارد بطوریکه $U/X \ll M/X$.*

برهان. به ۴۱.۹ از مرجع [۳۷] رجوع شود. $\square$

تعریف ۱۴.۳.۱. *یک زیرمدول K از M را اساسی در M* [۱۸] *(با نماد $K \leq_e M$) نامند هرگاه برای هر زیرمدول غیرصفر A از M داشته باشیم $K \cap A \neq 0$.*

فرض کنید M یک مدول باشد. شرایط زیر را بر M در نظر بگیرید:

- (C_1): هر زیر مدول از M در یک جمعوند مستقیم M اساسی است؛
- (C_2): هر زیر مدول از M که با یک جمعوند مستقیم M یکریخت باشد، خود یک جمعوند مستقیم M است؛

[۱۸] essential

• (C_3): اگر M_1 و M_2 جمعوندهای مستقیمی از M باشند به طوری که $M_1 \cap M_2 = 0$، آنگاه $M_1 \oplus M_2$ یک جمعوند مستقیم M است.

تعریف ۱۵.۳.۱. *یک مدول که در شرط C_1 صدق کند را توسعه یافته [19]، یک مدول که در شرط C_1 و C_2 صدق کند را پیوسته [20] و یک مدول که در شرط C_1 و C_3 صدق کند را شبه پیوسته [21] گویند.*

مدول های یکنواخت و مدولهای پیوسته، شبه پیوسته هستند و مدول های نیمه ساده و مدولهای تزریقی، پیوسته می باشند.

سلسله مراتب زیر همواره برقرار است:

تزریقی $\Leftarrow$ شبه تزریقی $\Leftarrow$ پیوسته $\Leftarrow$ شبه پیوسته $\Leftarrow$ توسعه یافته.

دوگان شرایط بالا را برای مدول M به صورت زیر نظر بگیرید:

• (D_1): برای هر زیرمدول N از M یک تجزیه $M = M_1 \oplus M_2$ وجود دارد بطوریکه $M_1 \subseteq N$ و $N \cap M_2 \ll M$؛

• (D_2): اگر $N \leq M$ به طوری که M/N با یک جمعوند مستقیم از M یکریخت باشد آنگاه N یک جمعوند مستقیم از M است؛

• (D_3): اگر M_1 و M_2 جمعوند های مستقیمی از M باشند به طوری که $M = M_1 + M_2$، آنگاه $M_1 \cap M_2$ نیز جمعوند مستقیمی از M است.

تعریف ۱۶.۳.۱. *یک مدول که در شرط D_1 صدق کند را بالابرنده [22]، یک مدول که در شرط D_1 و D_2 صدق کند را گسسته [23] و یک مدول که در شرط D_1 و D_3 صدق کند را شبه گسسته [24] گویند.*

[19] extending
[20] continuous
[21] quasi-continuous
[22] lifting
[23] discrete
[24] quasi-discrete

گزاره ۱۷.۳.۱. *فرض کنید U یک زیرمدول از مدول M باشد. آنگاه عبارات زیر معادلند:*

(۱) *M بالابرنده است.*

(۲) *وجود دارد یک خودتوان $e \in End(M)$ به طوریکه $eM \subseteq U$ و $U(1-e) \ll M(1-e)$.*

(۳) *یک جمعوند مستقیم X از M وجود دارد بطوریکه $X \subseteq U$، $U = X + Y$ و $Y \ll M$.*

(۴) *U دارای یک مکمل V در M است بطوریکه $U \cap V$ یک جمعوند مستقیم در U است.*

(۵) *یک جمعوند مستقیم X از M وجود دارد بطوریکه $X \subseteq U$ و $U/X \ll M/X$.*

برهان. به ۴۱.۱۱ از مرجع [۳۷] رجوع شود. □

گزاره ۱۸.۳.۱. *برای یک مدول M عبارات زیر معادلند:*

(۱) *M فرامکمل پذیر است و هر زیرمدول مکمل یک جمعوند مستقیم است.*

(۲) *M بالابرنده است.*

(۳) (i) *هر زیرمدول غیر ناچیز از M شامل یک جمعوند مستقیم غیر صفر از M می شود.*

(ii) *هر زیر مدول از M شامل یک جمعوند مستقیم ماکسیمال از M می شود.*

برهان. به ۴۱.۱۲ از مرجع [۳۷] رجوع شود. □

با توجه مطالب ذکر شده، نمودار زیر را داریم:

تصویری $\Leftarrow$ شبه تصویری $\not\Leftarrow$ گسسته $\Leftarrow$ شبه گسسته $\Leftarrow$ بالابرنده $\Leftarrow$ فرا مکمل پذیر $\Leftarrow$ مکمل پذیر $\Leftarrow$ به طور ضعیف مکمل پذیر.

در حقیقت یک مدول تصویری لزومی ندارد که بالابرنده باشد؛ به عنوان مثال $\mathbb{Z}_{\mathbb{Z}}$ دارای چنین ویژگی است.

۴.۱ ارتباط مدولهای بالابرنده با زیرمدولهای پایا

تعریف ۱.۴.۱. *یک زیرمدول N از M پایا* [۲۵] *نامیده می شود هرگاه برای هر $f \in End(M)$، داشته باشیم $f(N) \subseteq N$ و با نماد $N \trianglelefteq M$ نشان می دهیم.*

تعریف ۲.۴.۱. *مدول M را duo-مدول* [۲۶]*نامند هرگاه هر زیرمدول از M پایا باشد.*

لم ۳.۴.۱. *فرض کنید M یک مدول باشد. آنگاه:*

(۱) *مجموع و اشتراک زیرمدولهای پایا از M یک زیرمدول پایا از M است.*

(۲) *اگر $X \subseteq Y \subseteq M$ بطوریکه Y یک زیرمدول پایا از M و X یک زیرمدول پایا از Y است، آنگاه X یک زیرمدول پایا از M است.*

(۳) *اگر $M = \bigoplus_{i\in I} X_i$ و S یک زیرمدول پایا از M باشد، آنگاه*

$$S = \bigoplus_{i\in I} \pi_i(S) = \bigoplus_{i\in I}(X_i \cap S)$$

که در آن π_i، i-امین همریختی تصویری از M است.

(۴) *اگر $X \subseteq Y \subseteq M$ بطوریکه X یک زیرمدول پایا از M و Y/X یک زیرمدول پایا از M/X باشد، آنگاه Y یک زیرمدول پایا از M است.*

برهان. به [۷] لم ۱.۱ رجوع شود. □

لم ۴.۴.۱. *فرض کنید M یک مدول و $M = M_۱ \oplus M_۲$ یک تجزیه مجموع مستقیم مدولها باشد. اگر $N \trianglelefteq M$ سپس $N = N_۱ \oplus N_۲$ که در آن $N_i = N \cap M_i \trianglelefteq M_i$ برای $i = ۱, ۲$.*

برهان. به [۲۴] لم ۱.۱۰ رجوع شود. □

[۲۵] fully invariant
[۲۶] duo module