گروه ریاضیات و کاربردها

بررسی متریکهای راندرس پایا روی خمینه های ریمانی همگن

استاد راهنما

دکتر داریوش لطیفی

دکتر کاظم حق نژاد آذر

پژوهشگر

زری رنجبر

دانشکده علوم ریاضی

تابستان ۹۱

اگر ایستاده ام قامتم بود دیدو اگر گامی بر می دارم به استواری گامهای شماست

ثمره کوچک دستانم و کام کوچک زندگیم

تقدیم به

دست پر تشکرانه و رنج کشیده پدرم که در سایه محبتش اساس زندگی را شناختم و راز زیستن را آموختم

و به مادرم که آسمان بودنم را در نور خورشید پارسایی و مهرش تا همیشه روشن و امید بخش دیده ام

سپاس گزاری ...

سپاس بی کران پروردگار یکتا را که هستی مان بخشید و به طریق علم و دانش رهنمونمان شد و به همنشینی رهروان علم و دانش مفتخرمان نمود و خوشه چینی از علم و معرفت را روزیمان ساخت.نمی توانم معنایی بالاتر از تقدیر و تشکر را بر زبانم جاری سازم و سپاس خود را در وصف اساتید خویش آشکار نمایم که هر چه گویم و سرایم کم گفته ام. وظیفه‌ی خود می‌دانم از زحمات بی‌دریغ و راهنمایی‌های ارزشمند اساتید ارجمندم، جناب آقای دکتر داریوش لطیفی و جناب آقای دکتر کاظم حق نژاد آذر صمیمانه تشکر و قدردانی نمایم که قطعاً بدون راهنمایی های ارزنده آن ها ، این مجموعه به اتمام نمی رسید.

حسن نظر و دقت فراوان جناب آقای دکتر اباذری و جناب آقای دکتر ضارب نیا که داوری این پایان‌نامه را به عهده داشتند، سپاس می گویم.

در پایان از کلیه‌ی اعضای خانواده‌ی گرامی‌ام به‌ویژه پدر و مادر و برادران عزیزم که در تمامی مراحل تحصیل همواره یار و مشوق اینجانب بوده‌اند، سپاسگزاری می‌نمایم.

زری رنجبر

شهریور ۱۳۹۱

نام خانوادگی: رنجبر نام: زری

عنوان پایان‌نامه: بررسی متریکهای راندرس ناوردا روی خمینه های ریمانی همگن

اساتید راهنما: دکتر داریوش لطیفی، دکتر کاظم حق نژاد آذر
مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد رشته: ریاضی محض گرایش: هندسه

دانشگاه: محقق اردبیلی دانشکده: علوم ریاضی
تاریخ فارغ‌التحصیلی: تابستان ۱۳۹۱ تعداد صفحه: ۸۲

کلیدواژه‌ها: متریک های راندرس، خمینه های همگن، متریکهای ناوردا.

چکیده

دراین پایان‌نامه متریکهای راندرس ناوردا روی خمینه های ریمانی همگن بررسی می شود. سعی می شود تا یک توصیف جبری از این متریکها داده شود و همچنین شرایط لازم و کافی برای خمینه های همگن که چنین متریکهایی داشته باشند مورد بررسی قرار می گیرد. بعنوان حالت خاص متریکهای راندرس دو ناوردا روی گروه های لی بررسی خواهند شد. انحنا و ژئودزیکهای این متریکها مورد محاسبه قرار گرفته و مطالعاتی در مورد وجود این متریکها انجام خواهد شد.

فهرست مطالب

مقدمه

در طول تاریخ هندسه بعنوان شاخه ای اساسی و وسیع از علم ریاضی توجه بسیاری از ریاضیدانان و فیزیکدانان را به خود جلب کرده است. از جمله زمینه های کارآمد که تا حد قابل توجهی توسعه یافته است به هندسه فینسلر می توان اشاره کرد، از آنجاییکه جی اف بی ریمان عقیده داشت مفهوم متریکی که بعدها به نام ریمان معروف شد برای مطالعه مفاهیم هندسی و ادامه کارهای گاوس [۱] مناسب تر است به مطالعات خود ادامه نداد. اما نظر به اینکه این تابع در تعابیر پدیده های فیزیکی نقش مؤثری داشت بعدها توسط دیگران مورد مطالعه قرار گرفت. از جمله این افراد پل فینسلر [۲] بود که در سال ۱۹۱۸ با استفاده از نتایج بدست آمده توسط استاد خودش کنستانتین کاراتئودوری [۳] و قضیه اویلر توانست تعریف مدونی از این متریک ارائه نماید. او در حقیقت شرایطی برای یک تابع مانند $F(x,y)$ روی کلاف مماس TM ارائه نمود که در عین حال که از تابع ریمان جامع تر بود خواص آن را نیز داشت، در سال ۱۹۴۱ فیزیکدانی به نام راندرس [۴] هنگام مطالعه در مورد نظریه نسبیت عام یک فضای فینسلری خاص را معرفی نمود تا در مورد یکی کردن میدان های گرانشی و الکترومغناطیس بحث کند و با این کار فیزیکدان های بسیاری متوجه فینسلر شدند، راندرس نوع بسیار جالبی از مترهای فینسلر را در نظر گرفت که جمع یک متر ریمانی و یک ۱-فرمی است یعنی $F = \alpha + \beta$ این نوع از مترهای فینسلری متر راندرس نامیده شد [۲]. این گونه مترها به طور طبیعی در زمینه های دیگر فیزیک مانند اپتیک نیز کاربرد فراوان دارند، با توجه به اینکه متریک ریمانی خصوصیتی دارد که به نظر می رسد برای کاربردهای فیزیکی فضا-زمان مناسب نیست و آن تقارن کامل بین جهت های مختلف در هر بازه زمانی است و

[۱] Carl Friedrich Gauss
[۲] Paul Finsler
[۳] Constantin Caratheodory
[۴] Gunnar Randers

از آنجا که بارزترین خصوصیت جهان فیزیکی یک سویه بودن بازه های شبه زمانی است بنابراین برای بیان این عدم تقارن در توصیفات ریاضی لازم و قابل توجه است که یک متر با خصوصیات نامتقارن در نظر گرفته شود. این مساله یکی از علل جالب توجه مطالعه متر راندرس می باشد [۶].

با توجه به اهمیت متر راندرس در هندسه و سایر علوم در این پایان نامه به بررسی مترهای راندرس ناوردا روی خمینه های ریمانی همگن می پردازیم و کمیت های هندسی ژئودزیک و انحنای پرچمی آن را محاسبه می نماییم. برای این منظور در فصل اول به معرفی متر ریمان و تعمیم آن، یعنی متر فینسلری می پردازیم و خواص هندسی این فضاها را مورد مطالعه قرار می دهیم، در فصل دوم هندسه مترهای ریمان ناوردا را مورد مطالعه قرارداده متر های ریمان ناوردا را روی گروههای لی بررسی می کنیم، همچنین فضاهای همگن را معرفی کرده و خواص مترهای ریمان ناوردا را روی خمینه های همگن اثبات می کنیم. در فصل سوم فضاهای راندرس را معرفی کرده ساختار آن را توصیف می کنیم و به بیان قضایای اساسی در مورد فضای راندرس خواهیم پرداخت. در فصل چهارم مترهای راندرس ناوردا روی خمینه های ریمانی همگن را بررسی کرده و ژئودزیک و انحنای پرچمی را محاسبه می کنیم. در فصل پنجم به عنوان حالت خاص مترهای راندرس دوناوردا را روی گروههای لی مورد بررسی قرار می دهیم.

فصل ۱
تعاریف و مفاهیم اولیه

۱.۱ هندسه ریمانی

هندسه ریمانی در قرن نوزدهم توسط برنهارد ریمان [۱] پایه گذاری شد. هندسه ای که ریمان برای اولین بار مطرح ساخت و به هندسه ریمانی معروف گردید در حقیقت تعمیم مطالبی به نام هندسه دیفرانسیل رویه هاست که توسط گاوس مورد مطالعه قرار گرفته بود. در هندسه دیفرانسیل رویه ها یک ضرب داخلی روی خانواده بردارهای مماس بر رویه تعریف می گردد که توسط این ضرب می توان طول بردارهای مماس بر رویه در $\mathbb{R}^3$ را به دست آورد، این ضرب داخلی را معمولاً توسط $<,>$ نمایش می دهند. از خواص جالب توجه این ضرب آن است که کلیه خواص هندسی رویه از جمله طول قوس یک منحنی $\gamma(t)$ در روی هر رویه را نیز می توان با استفاده از آن به دست آورد.

$$L = \int_a^b < \gamma'(t), \gamma'(t) > dt$$

مفاهیم دیگری نیز با استفاده از این ضرب داخلی در روی رویه تعریف می شود که عبارتند ازمساحت یک رویه، زاویه بین دو منحنی، انحنای رویه و ...، طول قوس یک خم و روش محاسبه آن اساس تعریف خواص هندسی آن فضاست، بعبارت دیگر وقتی روشی یا فرمولی (معمولاً با استفاده از انتگرال ریمان) برای محاسبه طول قوس یک خم در یک فضا ارائه می دهیم یک نوع ضرب داخلی یا متریک روی آن فضا تعریف کرده ایم. لذا می توان گفت که با ارائه یک متریک در یک فضا هندسه آن فضارا تعریف کرده ایم، در حقیقت اولین کار ریمان تعمیم این ضرب بود که بعدها منجر به تعریف انتگرال ریمان

[۱] George Friedrich Berhnard Reimann

و متریک ریمان گردید و موجبات تعریف هندسه ریمانی را پس از هندسه اقلیدسی فراهم آورد. بطور شهودی می توان گفت که هندسه ریمانی با پیوند زدن هندسه اقلیدسی با نظریه خمینه [۱] های هموار و نگاشت های هموار به دست می آید، لذا هندسه ریمانی شاخه ای از هندسه دیفرانسیل است که به بررسی خمینه های ریمانی می پردازد و یک خمینه ریمانی خمینه ای است که مجهز به متریک ریمانی باشد، یعنی یک ضرب داخلی در فضای مماس بر هر نقطه خمینه که بطور هموار تغییر می کند. در این بخش مقدماتی از هندسه ریمانی را بیان خواهیم کرد و در این راستا به معرفی التصاق، انحناء و ژئودزیک خواهیم پرداخت.

۱.۱.۱ خمینه

تعریف ۱.۱.۱. فرض کنیم M یک فضای توپولوژیکی باشد. M را خمینه توپولوژیکی از بعد n گوییم هر گاه

- M هاسدورف [۲] باشد، (برای هر دو نقطه $p, q \in M$ زیر مجموعه های مجزا و باز U, V از M موجود باشد طوریکه $p \in U$ و $q \in V$ باشد.)
- M شمارای نوع دوم [۳] باشد (پایه شمارش پذیری برای توپولوژی M موجود باشد.)
- M موضعاً اقلیدسی [۴] از بعد n باشد، (هر نقطه از M همسایگی داشته باشد که با زیر مجموعه بازی از $\mathbb{R}^n$ همیومورف باشد.)

به بیان دیگر خمینه فضای متری M با ویژگی زیر است:

اگر $x \in M$ باشد آنگاه یک همسایگی U از x و عدد صحیح $n \geq 0$ چنان وجود دارد که U با $\mathbb{R}^n$ همیومورف است.

مثال ۲.۱.۱. *ساده ترین مثال از یک خمینه فضای $\mathbb{R}^n$ است. کافیست به ازای هر $x \in \mathbb{R}^n$ مجموعه U را خود $\mathbb{R}^n$ در نظر بگیریم.*

[۱] Manifold
[۲] Hausdorff
[۳] Second countable
[۴] locally Euclidean

۲.۱.۱ متر ریمانی

تعریف ۳.۱.۱. فرض کنیم M یک خمینه هموار $n-$ بعدی باشد، یک **متر ریمانی** روی M عبارتست از یک تانسور g از نوع (۰،۲) روی M بطوریکه در هر نقطه $p \in M$ ، دارای خواص زیر است:

۱) g متقارن است، یعنی

$$\forall X, Y \in T_pM \quad g_p(X,Y) = g_p(Y,X)$$

۲) g مثبت معین است یعنی

$$g(X,X) \geq 0 \quad , \quad g(X,X) = 0 \Longleftrightarrow X = 0$$

هموار بودن متریک ریمانی را می توان به صورت زیر بیان کرد:

تعریف ۴.۱.۱. فرض کنیم M خمینه هموار $n-$ بعدی باشد، به ازای هر $X, Y \in M$ تعریف می کنیم $f =< X, Y >$ ، متریک را **هموار** گوییم هرگاه $f(p) =< X(p), Y(p) >$ ، هموار باشد.

تعریف ۵.۱.۱. خمینه هموار M با متر ریمانی g یک **خمینه ریمانی** [1] نامیده می شود و با نماد (M,g) نمایش داده می شود.

نکته ۶.۱.۱. *اگر (x,U) یک کارت در همسایگی نقطه p از خمینه M و $x(p) = (x^1, x^2, \cdots, x^n)$ مختصات موضعی وابسته به آن و $\frac{\partial}{\partial x^i}$ پایه ای در همسایگی p روی $T_p(M)$ باشد، داریم*

$$X(p) = \sum_{i=1}^{n} X^i \frac{\partial}{\partial x^i}(p), \quad Y(p) = \sum_{i=1}^{n} Y^i \frac{\partial}{\partial x^i}(p)$$

آنگاه در مختصات موضعی تانسور ریمان بصورت زیر نوشته می شود:

$$g_p(X,Y) = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}(p) dx^i \otimes dx^j(X,Y)$$

[1] Riemannian manifold

چون g متقارن است رابطه فوق را می توان به صورت

$$g = \sum g_{ij} dx^i dx^j$$

نوشت که در آن $g_{ij}(x^1, \cdots, x^n)$ توابعی هستند که روی کارت (x, U) در همسایگی $p \in M$ به صورت زیر تعریف می شوند:

$$g_{ij}(p) = g(\frac{\partial}{\partial x^i}(p), \frac{\partial}{\partial x^j}(p)) =< \frac{\partial}{\partial x^i}(p), \frac{\partial}{\partial x^j}(p) >$$

و در رابطه $g_{ij} = g_{ji}$ صدق می کنند. اگر $X, Y \in T_p(M)$ باشد، آنگاه متریک ریمانی $g(X, Y)$ یا ضرب داخلی بین دو بردار X و Y را می توان به صورت زیر نوشت:

$$< X, Y >=< \sum_{i=1}^{n} X^i (\frac{\partial}{\partial x^i})(p), \sum_{j=1}^{n} Y^j (\frac{\partial}{\partial x^j})(p) >= \sum_{i,j} X^i Y^j < \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} >$$

لذا

$$g(X, Y) =< X, Y >= \sum_{i,j} g_{ij} X^i Y^j$$

خواهد بود.

قضیه ۷.۱.۱. *هر خمینه هموار M دارای متر ریمانی است.*

اثبات. برای اثبات به مرجع [۱] مراجعه شود. □

مثال ۸.۱.۱. *فضای $\mathbb{R}^n$ با مختصات اقلیدسی و پایه $\frac{\partial}{\partial x^i}$ را برای فضای مماس در نظر می گیریم. اگر مختصات نقطه p توسط $(x^1, \cdots, x^n)$ داده شود داریم:*

$$g_{ij}(p) =< (\frac{\partial}{\partial x^i})(p), (\frac{\partial}{\partial y^j})(p) >= \delta_{ij}$$

متریک ریمان حاصل

$$g = \sum_{i=1}^{n} \delta_{ij} dx^i \otimes dx^j = (dx^1)^2 + \cdots + (dx^n)^2$$

را متریک طبیعی [۱] ، متریک کانونی فضای اقلیدسی [۲] یا متریک اقلیدسی می نامند.

[۱] Natural metric
[۲] Canonical metric

تعریف ۹.۱.۱. فرض کنید g یک متریک ریمانی روی M باشد. منحنی $C : [a,b] \to M$ را روی خمینه ریمانی (M,g) در نظر می گیریم. اگر $x^i(t)$ مؤلفه های آن در مختصات موضعی و $\frac{dx^i}{dt}$ مؤلفه های بردار مماس بر $C(t)$ باشد در اینصورت طول قوس منحنی از رابطه زیر به دست می آید:

$$L(C) = \int_a^b \sqrt{g_{ij}(x)\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt}}dt$$

که در آن $g_{ij}(x)$ مؤلفه های تانسور متریک ریمان و توابع حقیقی روی M هستند.

۳.۱.۱ التصاق آفین

التصاق ها روی یک خمینه ابزاری برای محاسبه تغییرات موجودات هندسی از قبیل میدان های برداری، فرم های دیفرانسیل و ... در امتداد یک میدان برداری و یا یک بردار مماس می باشند، به عبارت دیگر التصاق ها ابزاری هستند که فضاهای مماس در نقاط مختلف یک خمینه را به یکدیگر متصل می کنند و از این طریق امکان محاسبه تغییرات موجودات هندسی مذکور را فراهم می آورند. بعنوان مثال وقتی که می خواهیم مفهوم شتاب یک منحنی روی یک خمینه را تعریف کنیم لازم است راهی پیدا کنیم که بتوانیم بدون توجه به مختصات از بردارها (یا میدان های برداری)در طول یک منحنی مشتق گیری نماییم. به بیان ساده تر باید بتوانیم مقادیر دو بردار را از دو فضای برداری مجاور و متفاوت با یکدیگر مقایسه نماییم یا بعبارت دیگر دو فضای برداری مجاور را توسط یک مشتق گیری به یکدیگر "الصاق"نماییم. اینجاست که مفهوم التصاق مفهوم پیدا می کند.

فرض کنیم M خمینه هموار و $\chi(M)$ مجموعه میدان های برداری دیفرانسیل پذیر روی آن باشد.

تعریف ۱۰.۱.۱. *التصاق آفین* [۱] روی خمینه M ، نگاشت $\nabla : \chi(M) \times \chi(M) \longrightarrow \chi(M)$ با ضابطه $\triangledown(x,y) = \triangledown_x(Y)$ که زوج (X,Y) را به میدان برداری $\triangledown_x(Y)$ نظیر می کند به نحوی که به ازای هر $f,g \in C^\infty(M)$ و $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ و به ازای هر $X,Y,Z \in \chi(M)$ در خواص زیر صدق می کند:

[۱] Affine connection

$$۱)\nabla_{\alpha X+\beta Y}Z=\alpha\nabla_X Z+\beta\nabla_Y Z$$

$$۲)\nabla_{fX+gY}Z=f\nabla_X Z+g\nabla_Y Z$$

$$۳)\nabla_X(fY+gZ)=f\nabla_X Y+(Xf)Y+g\nabla_X Z+(Xg)Z$$

التصاق آفین ∇ تعریف شده التصاق خطی [1] یا التصاق کازول [2] نامیده می شود. عملگر ∇_X دیفرانسیل همورد نسبت به X و میدان برداری $\nabla_X Y\in\chi(M)$ مشتق همورد Y نسبت به X نامیده می شود.

تعریف ۱.۱.۱۱. فرض کنید ∇ یک التصاق روی M و $(x;x^۱,x^۲,\ldots,x^n)$ یک کارت مختصاتی باشد اگر $X^i=\frac{\partial}{\partial x^i}$ و $X^j=\frac{\partial}{\partial x^j}$ در اینصورت

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\frac{\partial}{\partial x^j}=\Gamma_{ij}^k\frac{\partial}{\partial x^k}$$

که Γ_{ij}^k ها توابع C^∞ روی X می باشد که ضرایب التصاق ∇ نسبت به مختصات موضعی x^i نامیده می شوند. همچنین توابع Γ_{ij}^k را نمادهای کریستوفل [3] التصاق خطی ∇ در مختصات موضعی ارائه شده گویند.

تعریف ۱.۱.۱۲. فرض کنید M خمینه ای دیفرانسیل پذیر همراه با التصاق آفین ∇ و $C(t)$ که $C(t):I\to M$ یک منحنی دیفرانسیل پذیر روی خمینه M باشد، به هرمیدان برداری هموار V در طول خم هموار $C(t)$ یک و تنها یک میدان برداری $\nabla_{C'(t)}V$ وابسته می گردد، این میدان برداری را مشتق کوواریان میدان برداری V در امتداد خم C نامیده و با $\frac{DV}{dt}$ نمایش می دهند.

گزاره ۱.۱.۱۳. *فرض کنید V و W میدان های برداری در امتداد خم $C:I\to M$ و f نگاشتی هموار بر I باشد در اینصورت داریم :*

$$\frac{D}{dt}(V+W)=\frac{DV}{dt}+\frac{DW}{dt},\quad \frac{D}{dt}(fV)=\frac{df}{dt}\ V+f\ \frac{DV}{dt}.$$

[1] Linear connection
[2] Koszul
[3] Christoffel

اثبات. برای اثبات به مرجع [۱] مراجعه شود. □

تعریف ۱۴.۱.۱. M را یک خمینه هموار با یک التصاق آفین ∇ در نظر بگیرید. میدان برداری هموار V را روی M در امتداد خم هموار $\alpha : I \to M$ موازی گویند هرگاه

$$\forall t \in I \quad \frac{DV}{dt} = \circ .$$

قضیه ۱۵.۱.۱. *فرض کنید M یک خمینه هموار با التصاق آفین ∇ و $C : I \to M$ یک خم هموار باشد. اگر $V_{t_\circ} \in T_{C(t_\circ)}M$ در اینصورت یک میدان برداری متوازی V در امتداد C وجود دارد که* $V(t_\circ) = V_{t_\circ}$.

اثبات. برای اثبات به مرجع [۱] مراجعه شود. □

با استفاده از مفهوم انتقال موازی می توان سازگاری التصاق آفین و متریک ریمانی را بر خمینه هموار و ریمان M به صورت زیر تعریف نمود.

تعریف ۱۶.۱.۱. فرض کنید M یک خمینه هموار، $<,>$ یک متریک ریمانی باشد. التصاق آفین ∇ روی M با متریک ریمانی سازگار نامیده می شود هرگاه برای هر جفت میدان برداری متوازی P, P' در امتداد یک خم هموار دلخواه داشته باشیم، $< P, P' >= c$ که در آن c یک عدد ثابت است.

لم ۱۷.۱.۱. *خمینه ریمانی M را در نظر می گیریم. در اینصورت التصاق ∇ با متریک ریمانی $<,>$ سازگاراست اگر و تنها اگر*

- *برای هر دو میدان برداری V و W بر خم C داشته باشیم*

$$\frac{d}{dt} < V, W >=< \frac{DV}{dt}, W > + < V, \frac{DW}{dt} > .$$

- *برای هر سه میدان برداری $X, Y, Z \in \chi(M)$ داشته باشیم*

$$X < Y, Z >=< \nabla_X Y, Z > + < Y, \nabla_X Z > .$$

اثبات. برای اثبات مرجع [۱] را ببینید. □

تعریف ۱.۱.۱۸. فرض کنید (M, g) یک خمینه ریمانی $n-$ بعدی و ∇ یک التصاق خطی روی M باشد، تانسور تاب یک التصاق را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$T : \chi(M) \times \chi(M) \longrightarrow \chi(M)$$

$$T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y].$$

تعریف ۱.۱.۱۹. التصاق آفین ∇ بر خمینه هموار M متقارن نامیده می شود هر گاه

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y].$$

در یک دستگاه مختصات (U, x) بر M متقارن بودن ∇ به این معنی است که

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} - \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \frac{\partial}{\partial x_i} = [\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}] = 0$$

و این معادل است با اینکه $\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji}$.

۱.۱.۴ التصاق ریمانی

هرگاه خمینه مجهز به یک متر ریمانی شده باشد در اینصورت بین التصاق های موجود روی یک خمینه برخی مناسب تر از بقیه می باشند. در هندسه ریمانی ثابت می شود که فقط و فقط یک التصاق شرط سازگاری با متریک و تاب آزاد بودن را همزمان برآورده می سازد. این التصاق یکتا معروف به التصاق لوی-چویتای [۱] آن خمینه ریمانی می باشد. نقش و اهمیت التصاق لوی-چویتا در مطالعه هندسه ریمان غیر قابل انکار است، بنابراین انتظار طبیعی این است که التصاق ها در تعمیم خمینه های ریمانی یعنی در خمینه های فینسلری نیز نقش به سزایی داشته باشند.

تعریف ۱.۱.۲۰. التصاق لوی-چویتا یا التصاق ریمانی

فرض کنید (M, g) یک خمینه ریمانی از بعد n با التصاق خطی ∇ باشد. التصاق خطی ∇ روی M

[۱] Levi-civita

التصاق لوی-چویتا یا التصاق ریمانی نامیده می شود اگر ∇ در شرایط زیر صدق کند:

۱)∇ متقارن یا تاب آزاد است یعنی

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y].$$

۲)∇ سازگار با متر ریمانی سازگار است یعنی

$$\forall X, Y, Z \in \chi(M) \quad X < Y, Z >=< \nabla_X Y, Z > + < Y, \nabla_X Z >$$

قضیه ۲۱.۱.۱. *التصاق لوی-چویتا ∇ روی خمینه (M, g) به ازای هر $X, Y, Z \in \chi(M)$ در ضابطه فرمول کازول صدق می کند:*

$$\begin{aligned} 2 < \nabla_X Y, Z >= X < Y, Z > +Y < Z, X > \quad - \quad & Z < X, Y > + < [X, Y], Z > \\ - \quad & < [Y, Z], X > + < [Z, X], Y > . \end{aligned}$$

اثبات. برای اثبات مرجع [۱] را ببینید. □

قضیه ۲۲.۱.۱. *هر خمینه ریمانی (M, g) از بعد n یک التصاق متری تاب آزاد یکتا را می پذیرد.*

اثبات. برای اثبات مرجع [۱] راببینید. □

۵.۱.۱ انحنا

حال به بیان روش هایی می پردازیم که تفاوت بین یک خمینه M با فضای اقلیدسی را آشکار می کند. یکی از بهترین روشها این است که ببینیم چه نگاشتهایی تحت ایزومتری ها پایا هستند. ریمان برای تعریف یکی از نگاشت های پایا تحت ایزومتری ها از تفاوت خاصیت تعویض ترتیب مشتق گیری دوم همگرد در $\mathbb{R}^n$ و M استفاده کرد. از این رو به بیان تانسورهای نوع اول و دوم ریمان پرداخته خواص آن را بررسی می کنیم.

تعریف ۲۳.۱.۱. اگر (M,g) یک خمینه ریمانی و ∇ یک التصاق لوی-چویتا روی M باشد، نگاشت

$$R : \chi(M) \times \chi(M) \times \chi(M) \longrightarrow \chi(M)$$

$$R(X,Y),Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]Z},$$

را انحنای ریمان یا **تانسور انحنای ریمان** [۱] می نامیم.

تعریف ۲۴.۱.۱. فرض کنیم (M,g) یک خمینه ریمانی باشد. حاصلضرب داخلی تانسور انحنای ریمان را با R_m نمایش داده آن را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\forall X,Y,Z,W \in \chi(M) \quad R_m(X,Y,Z,W) =< R(X,Y)Z, W >$$

، R_m را **تانسور انحنای ریمان نوع دوم** [۲] یا برای سادگی در بیان، انحنای ریمان نیز می نامیم.

قضیه ۲۵.۱.۱. *اگر M یک خمینه هموار با التصاق خطی ∇ باشد، آنگاه تانسور انحنای R به ازای هر $X,Y,Z,U \in \chi(M), \alpha, \beta \in R$ و $f,g \in C^\infty(M)$ در عبارت های زیر صدق می کند:*

$$۱) \quad R(\alpha X + \beta Y, Z)U = \alpha R(X,Z)U + \beta R(Y,Z)U,$$

$$۲) \quad R(fX + gY, Z)U = f.R(X,Z)U + g.R(Y,Z)U,$$

$$۳) \quad R(X, fY + gZ)U = f.R(X,Y)U + g.R(X,Z)U,$$

$$۴) \quad R(X,Y)(fZ + gU) = f.R(X,Y)Z + g.R(X,Y)U.$$

اثبات. برای اثبات به مرجع [۱] مراجعه شود. □

قضیه ۲۶.۱.۱. *فرض کنیم (M,g) یک خمینه ریمانی و R^m تانسور انحنای ریمان (نوع دوم) آن باشد. آنگاه*

[۱] Riemannian Curvature
[۲] Riemannian Curvature of second kind

داریم: $\forall X, Y, Z, W \in \chi(M)$

$$۱) R_m(X,Y,Z,W) = -R_m(Y,X,Z,W),$$

$$۲) R_m(X,Y,Z,W) = -R_m(X,Y,W,Z),$$

$$۳) R_m(X,Y,Z,W) = R_m(Z,W,X,Y),$$

$$۴) R_m(X,Y,Z,W) + R_m(Y,Z,X,W) + R_m(Z,X,Y,W) = ۰.$$

که رابطه اخیر را اتحاد اول بیانچی [1] می نامیم که این خواص تانسور انحنای ریمان در مختصات موضعی به صورت زیر است:

$$۱) \quad R_{ijkl} = -R_{jikl}$$

$$۲) \quad R_{ijkl} = -R_{ijlk}$$

$$۳) \quad R_{ijkl} = R_{klij}$$

$$۴) \quad R_{ijkl} + R_{jkil} + R_{kijl} = ۰$$

اثبات. برای اثبات به مرجع [۱] مراجعه شود. □

همانطور که بیان شد ریمان یک تانسور انحنا معرفی کرد که تحت ایزومتری ها پایاست. این تانسور تعیین کننده آن است که تا چه اندازه یک خمینه می تواند خمیده باشد یا بعبارت دیگر چه اندازه به $\mathbb{R}^n$ از نظر ایزومتریک بودن نزدیک است. لذا تعریف زیر را داریم

تعریف ۲۷.۱.۱. خمینه ریمانی (M,g) را **مسطح یا تخت** گوییم اگر به طور موضعی با $\mathbb{R}^n$ ایزومتریک باشد.

[1] Bianchi identity