دانشگاه صنعتی امیرکبیر

(پلی تکنیک تهران)

دانشکده: ریاضی و علوم کامپیوتر

پایان نامه کارشناسی ارشد

رشته تحصیلی: ریاضی محض – گروه آنالیز

عنوان

درخت های متری، ابرمحدب بودن و قضایای نقطه ثابت

استاد راهنما

دکتر سید منصور واعظ پور

دانشجو

تکتم دینوری

استاد مشاور

دکتر عبدالحمید ریاضی

بسمه تعالی

دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی‌تکنیک تهران)

تاریخ:
شماره:

فرم اطلاعات پایان‌نامه
کارشناسی- ارشد و دکترا

معاونت پژوهشی
فرم پروژه تحصیلات تکمیلی ۷

مشخصات دانشجو:

نام و نام خانوادگی:تکتم دی‌نوری دانشجوی آزاد بورسیه معادل

شماره دانشجوئی:۸۵۱۱۳۰۱۹ دانشکده:ری‌اضی و علوم کامپی‌وتر رشته

تحصیلی:ری‌اضی محض گروه: آنالی‌ز

مشخصات استاد راهنما:

نام و نام خانوادگی:دکتر سی‌د منصور واعظ پور درجه و رتبه:دانشی‌ار

مشخصات استاد مشاور:

نام و نام خانوادگی:دکتر عبدالحمی‌د ری‌اضی درجه و رتبه:استاد

عنوان پایان‌نامه به فارسی :درخت های متری، ابرمحدب بودن و قضای‌ای نقطه ثابت

عنوان پایان‌نامه به انگلیسی: **Metric trees, Hyperconvexity and Fixed point theorems**

نوع پروژه: کارشناسی ارشـــد دکتـــرا سال تحصیلی: 1386-87

کاربردی بنیادی توسعه‌ای نظـــری

تاریخ شروع :۸۶/۷ تاریخ خاتمه :۸۷/۴ تعداد واحد :۶

سازمان تأمین کننده اعتبار :

واژه‌های کلیدی به فـارسـی:

نقاط ثابت، بهتری‌ن تقری‌ب، درخت های متری، فضاهای ابرمحدب

واژه‌های کلیدی به انگلیسی :

Fixed points, Best approximation, Metric trees, Hyperconvex spaces

مشخصات ظاهری	تعداد صفحات ۷۲	تصویر جدول نمودار نقشه واژه‌نامه	تعداد مراجع ۴۲	تعداد صفحات ضمائم
زبان متن	فارسی انگلیسی		چکیده	فارسی انگلیسی
یادداشت				

نظرها و پیشنهادها به منظور بهبود فعالیت‌های پژوهشی دانشگاه

استاد:

با احترام و سپاس، تقدیم به پدر و مادرم

به پاس زحمات بی دریغشان

با سپاس فراوان از استاد ارجمند، جناب آقای دکتر سید منصور واعظ پور، که در کلیه مراحل انجام این پروژه از راهنمایی های ارزنده ایشان بهره مند گردیده ام.

همچنین از استاد مشاور بزرگوار جناب آقای دکتر عبدالحمید ریاضی، و اساتید گرامی جناب آقای دکتر مسعود پورمهدیان و جناب آقای دکتر علی آبکار که داوری این پایان نامه را بر عهده داشتند، کمال تشکر را دارم.

چکیده

در این پایان نامه با مطالعه رابطه درخت های متری و فضاهای ابرمحدب، وجود نقطه ثابت مشترک برای هر خانواده جابه جایی از نگاشت های غیرانبساطی در درخت های متری تام و به طور ژئودزیکی کراندار مورد بررسی قرار گرفته است. در ادامه با بیان اصل نگاشت های KKM و GKKM در درخت های متری، قضایای بهترین تقریب فان و پرولا برای نگاشت های نیم پیوسته بالا مورد مطالعه قرار گرفته اند. در پایان با اشاره به کاربرد درخت های متری در نظریه گراف، اثبات دیگری برای قضیه کلاسیک یال ثابت نواکوفسکی و رایول مطرح شده است.

کلمات کلیدی: نقاط ثابت، بهترین تقریب، درخت های متری، فضاهای ابرمحدب.

فهرست مندرجات

مقدمه

درخت های متری اولین بار در سال ۱۹۷۷ توسط تیتز[۱] معرفی شدند [۴۰]. درخت متری فضایی متری است که بین هر دو نقطه آن یک مسیر منحصر به فرد وجود دارد که مسیر مذکور پاره خطی ژئودزیک است.درخت متری در واقع تعمیمی از یک درخت معمولی است که در آن یال ها می توانند طول های متفاوتی اختیار کنند. درخت های متری علاوه بر کاربرد در شاخه های مختلف ریاضی مانند توپولوژی، هندسه و نظریه گروه ها [۹]، در سایر علوم مانند علوم کامپیوتر [۸]، زیست شناسی و داروسازی (در بررسی ساختار درخت های فیلوژنتیک [۲] که به مطالعه رشد تکاملی درخت های ژنتیکی در موجودات زنده می پردازد [۳۶])، نیز کاربرد دارند.

از سوی دیگر قضایای نقطه ثابت نقشی اساسی در شاخه های مختلف آنالیز تابعی غیرخطی ایفا می کنند. در سال های اخیر مبحث نقطه ثابت برای نگاشت های تک مقداری و چند مقداری در درخت های متری مورد توجه قرار گرفته است. در سال ۱۹۹۸، کرک [۳] نشان داد فضای متری X، یک درخت متری تام است اگر و تنها اگر ابرمحدب و به طور یکتا ژئودزیک باشد [۲۲]. پس از آن اکثر تحقیقات انجام شده در درخت های متری، بر مبنای ابرمحدب بودن آن ها صورت گرفته است.

در این پایان نامه به مطالعه آخرین نتایج به دست آمده در مبحث نقطه ثابت در درخت های متری می پردازیم. بخش عمده این پایان نامه از مراجع [۱۵]، [۲]، [۲۲] و [۲۴] استخراج شده است.

در فصل اول با معرفی فضاهای ابرمحدب، فضاهای ژئودزیک و درخت های متری، و بررسی اجمالی خواص آن ها، برخی قضایا و مفاهیم مورد نیاز در فصول بعدی، ارایه شده است.

در فصل دوم با مطالعه رابطه بین درخت های متری و فضاهای ابرمحدب، ویژگی تقریب زنندگی مجموعه های بسته و محدب درخت های متری و غیرانبساطی بودن تصاویر متری، مورد بررسی قرار

[۱] Tits

[۲] phylogenetic tree

[۳] Kirk

گرفته است و در نهایت با استفاده از نتایج به دست آمده، قضایای انتخاب در درخت های متری ارایه شده است.

در فصل سوم، با اشاره به چند ویژگی مهم مجموعه های دریچه دار، قضایای نقطه ثابت در درخت های متری مورد بررسی قرار گرفته اند. به ویژه نشان داده شده است که هر خانواده جا به جایی از نگاشت های غیرانبساطی در درخت های متری تام و به طور ژئودزیکی کراندار، دارای مجموعه نقطه ثابت مشترک ناتهی است. در بخش ۳ این فصل، اصل نگاشت های KKM و توسیعی از قضیه بهترین تقریب فان [۴] برای نگاشت های چندمقداری نیم پیوسته بالا در درخت های متری مورد مطالعه قرار گرفته است. مطالب قسمت پایانی این بخش، نتایج تحقیقاتی است که در طول نگارش این پایان نامه صورت گرفته است؛ در این قسمت اصل نگاشت های GKKM، و توسیعی از قضیه بهترین تقریب پرولا [۵] برای نگاشت های نیم پیوسته بالا در درخت های متری را مورد بررسی قرار داده ایم. در نهایت در بخش پایانی این فصل کاربرد درخت های متری در نظریه گراف بیان شده است؛ به ویژه با استفاده از نتایج بخش ۲.۳، اثبات دیگری برای قضیه کلاسیک یال ثابت نواکوفسکی [۶] و رایول [۷] مطرح شده است.

[۴] Fan

[۵] Prolla

[۶] Nowakowski

[۷] Rival

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم مقدماتی

در این فصل به بیان برخی تعاریف، مفاهیم مقدماتی و قضایا، که در فصول بعد مورد استفاده قرار می‌گیرند، می‌پردازیم.

۱.۱ فضاهای ابر محدب

مفهوم ابرمحدب بودن، اولین بار در سال ۱۹۵۶ توسط آرونزان [1] و پانیچپاکدی [2] معرفی شد([۶]).
فضاهای ابرمحدب، ساختار متری بسیار قوی دارند، که منجر به مجموعه ای از نتایج جالب در شاخه های مختلف ریاضی، مانند توپولوژی، نظریه گراف و به ویژه قضایای نقطه ثابت شده است.
در این بخش به بررسی مقدماتی ساختار چنین فضاهایی و ارتباط آن با قضایای نقطه ثابت، می پردازیم.

---

۱ Aronszajn
۲ Panitchpakdi

قرارداد. در فضای متری (X,d)، از نماد $B(x,r)$ برای نمایش گوی های بسته با مرکز x و شعاع $r \geq 0$ استفاده می کنیم. بنابراین

$$B(x,r) = \{\, z \in X : d(x,z) \leq r \,\}\,.$$

تعریف ۱.۱.۱ . فضای متری (X,d) را ابرمحدب [۳] گوییم، چنانچه برای هر خانواده از اعضای $\{x_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ در X و هر خانواده از اعداد حقیقی مثبت $\{r_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ که به ازای هر $\alpha,\beta \in \Gamma$، در ویژگی $d(x_\alpha, x_\beta) \leq r_\alpha + r_\beta$ صدق می کنند، داشته باشیم:

$$\bigcap_{\alpha\in\Gamma} B(x_\alpha, r_\alpha) \neq \emptyset.$$

مثال ۲.۱.۱ . مجموعه اعداد حقیقی $I\!R$ و فضاهای باناخ حقیقی متناهی البعد با نرم ماکزیمم، مثال های ساده ای از فضاهای ابر محدب هستند.

مثال ۳.۱.۱.[۳۰] L^∞ و l^∞ فضاهایی ابر محدب هستند، اما فضای هیلبرت l^2 ابرمحدب نیست.

تعریف ۴.۱.۱ . فضای متری (X,d) را محدب متری [۴] گوییم، هرگاه به ازای هر دو نقطه متمایز $x,y \in X$، نقطه $z \in X$ ($x \neq z \neq y$) موجود باشد که

$$d(x,z) + d(z,y) = d(x,y)\,.$$

---

[۳] hyperconvex

[۴] metrically convex

تذکر ۵.۱.۱. فرض کنیم X یک فضای متری باشد. در این صورت به ازای هر $x_1, x_2 \in X$ و اعداد حقیقی مثبت r_1, r_2 داریم:

$$B(x_1, r_1) \cap B(x_2, r_2) \neq \emptyset \qquad \Longrightarrow \qquad d(x_1, x_2) \leq r_1 + r_2 \,.$$

اما عکس مطلب فوق ممکن است برقرار نباشد و همین مسئله است که منجر به تعریف مفهوم محدب متری شده است. در واقع اگر X محدب متری باشد، آن گاه به ازای هر $x_1, x_2 \in X$ و اعداد حقیقی مثبت r_1, r_2 داریم:

$$B(x_1, r_1) \cap B(x_2, r_2) \neq \emptyset \qquad \Longleftrightarrow \qquad d(x_1, x_2) \leq r_1 + r_2 \,.$$

مثال ۶.۱.۱. فرض کنیم X فضای متری با متر گسسته باشد. در این صورت X محدب متری نیست؛ چرا که اگر x, y دو نقطه متمایز X باشند آن گاه $d(x,y) = 1$، اما $B(x, \frac{3}{4}) \cap B(y, \frac{3}{4}) = \emptyset$.

تعریف ۷.۱.۱. فضای متری X دارای خاصیت اشتراک دوتایی گوی ها [5] است، هر گاه دارای ویژگی زیر باشد:
اگراشتراک هر دو گوی بسته در X ناتهی باشد، آن گاه اشتراک هر خانواده از گوی های بسته در X ناتهی است.

لم ۸.۱.۱.[۲۵] اگر X فضایی متری باشد، آن گاه گزاره های زیر معادلند:

۱. X ابرمحدب است.

۲. X محدب متری و دارای خاصیت اشتراک دوتایی گوی ها است.

تذکر ۹.۱.۱. با توجه به تعریف فضای ابرمحدب و تذکر ۵.۱.۱، خاصیت اشتراک دوتایی گوی ها، به تنهایی، ابرمحدب بودن را موجب نمی شود.

[5] binary ball intersection property

قضیه ۱۰.۱.۱ [۷]. فرض کنیم X یک فضای متری کراندار و $\{H_\beta\}_{\beta\in\Gamma}$ خانواده ای از زیرمجموعه های ناتهی و ابرمحدب X که به صورت نزولی جهت دار شده اند، باشد؛ در این صورت $\bigcap_{\beta\in\Gamma} H_\beta$ ناتهی و ابرمحدب است.

تذکر ۱۱.۱.۱ . اشتراک دو مجموعه ابرمحدب، لزوما ابرمحدب نیست. به عنوان مثال، فضای $\mathbb{R}^۲$ را با نرم ماکزیمم در نظر می گیریم. فرض کنیم $H_۱$ گوی یکه و $H_۲ = \{(x,y) : x+y = ۲,\ x,y \geq ۰\} \cup \{(x,-y) : x+y = ۲,\ x,y \geq ۰\}$ باشد. در این صورت $H_۱$ و $H_۲$ هر یک ابرمحدب هستند، اما اشتراک آن دو چنین نیست.

تعریف ۱۲.۱.۱ . فضای متری (X,d) دارای خاصیت اشتراک گوی ها [۶] یا به اختصار BIP است، اگر برای هر خانواده از گوی های بسته $\{B_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ که به ازای هر زیرمجموعه متناهی دلخواه Γ_f از Γ، $\bigcap_{\alpha\in\Gamma_f} B_\alpha \neq \emptyset$، داشته باشیم:

$$\bigcap_{\alpha\in\Gamma} B_\alpha \neq \emptyset\ .$$

تذکر ۱۳.۱.۱ . هر فضای ابرمحدب، دارای خاصیت BIP است.

قضیه ۱۴.۱.۱ . فضای متری X با خاصیت BIP، تام است. به ویژه هر فضای ابرمحدب تام است.

اثبات. فرض کنیم $\{x_n\}_{n=۱}^{\infty}$ دنباله ای کوشی در X باشد. برای هر $n \geq ۱$ قرار می دهیم

$$r_n = \sup_{m\geq n} d(x_n, x_m)\ .$$

[۶] ball intersection property

حال مجموعه گوی های $\{B(x_n, r_n)\}_{n\geq ۱}$ را در نظر می گیریم. به ازای m هایی که $m \geq n$ داریم $d(x_n, x_m) \leq r_n$. پس برای هر $n_۱ < n_۲ < ... < n_k$، داریم

$$x_{n_k} \in B(x_{n_۱}, r_{n_۱}) \cap B(x_{n_۲}, r_{n_۲}) \cap ... \cap B(x_{n_k}, r_{n_k}) \,.$$

اما X دارای ویژگی BIP است، بنابراین $\bigcap_{n\geq ۱} B(x_n, r_n) \neq \emptyset$. حال چون $\{x_n\}$ دنباله ای کوشی است، $\lim_{n\to\infty} r_n = ۰$. بنابراین $\bigcap_{n\geq ۱} B(x_n, r_n)$ فقط شامل یک نقطه مانند z است که به وضوح حد دنباله $\{x_n\}$ است.

□

یادآوری. فرض کنیم (X, d) یک فضای متری، $x \in X$ و Y زیر مجموعه ای از X باشد، در این صورت

$$dist(x, Y) := \inf\{d(x, y) : y \in Y\} \,.$$

تعریف ۱۵.۱.۱ . زیرمجموعه E از فضای متری (X, d) را ابرمحدب خارجی [۷] (نسبت به X) گوییم، چنانچه برای هر خانواده از اعضای $\{x_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ در X و هر خانواده از اعداد حقیقی مثبت $\{r_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ که به ازای هر $\alpha, \beta \in \Gamma$، در ویژگی های $d(x_\alpha, x_\beta) \leq r_\alpha + r_\beta$ و $dist(x_\alpha, E) \leq r_\alpha$ صدق می کنند، داشته باشیم:

$$\bigcap_{\alpha\in\Gamma} B(x_\alpha, r_\alpha) \cap E \neq \emptyset \,.$$

قرارداد. خانواده تمام زیرمجموعه های ابرمحدب خارجی X را با نماد $\mathcal{E}(X)$ و خانواده تمام زیرمجموعه های ابرمحدب X را با نماد $\mathcal{H}(X)$، نمایش می دهیم.

[۷] externally hyperconvex

تعریف ١٦.١.١ . فرض کنیم (X,d) یک فضای متری و A زیرمجموعه ای ناتهی و کراندار از X باشد، قرار می دهیم :

۱. $cov(A) = \cap\{ B : A \subseteq B,$ گوی بسته است $B\}$

۲. $\mathcal{A}(X) = \{A \subseteq X : A = cov(A)\}$

۳. $r_x(A) = \sup\{d(x,y) : y \in A\}\,;\, x \in X$

۴. $r(A) = \inf\{r_x(A) : x \in X\}$

۵. $diam(A) = \sup\{d(x,y) : x, y \in A\}$

٦. $R(A) = \inf\{r_x(A) : x \in A\}$

۷. $\mathcal{C}(X) = \{ A : A \subseteq X,$ بسته و محدب است $A\}$

اعضای $\mathcal{A}(X)$ را مجموعه های پذیرفتنی [۸] در X، $cov(A)$ را پوشش [۹] A، $r(A)$ را شعاع A (نسبت به X)، $R(A)$ را شعاع چبیشف [۱۰] A و $diam(A)$ را قطر A گوییم.

تذکر ١٧.١.١ . به وضوح $\mathcal{A}(X)$ شامل تمام گوی های بسته در X است و اشتراک هر خانواده از اعضای خود را نیز دربردارد.

تذکر ١٨.١.١ . شعاع چبیشف A، بیانگر شعاع کوچکترین گویی است که A را دربردارد و مرکز آن نیز در A قرار دارد.

لم ١٩.١.١ .[۱۴] اگر A زیرمجموعه ای کراندار از فضای متری ابرمحدب (X,d) باشد، آنگاه

۸ admissible set

۹ cover

۱۰ Chebyshev radius

۱. $cov(A) = \cap\{B(x, r_x(A)) : x \in X\}$.

۲. $r_x(cov(A)) = r_x(A) \quad ; \quad \forall x \in X$.

۳. $r(cov(A)) = r(A)$.

۴. $r(A) = \frac{1}{2}\, diam(A)$.

۵. $diam(cov(A)) = diam(A)$.

۶. اگر $A = cov(A)$، آن گاه $r(A) = R(A)$. به ویژه $R(A) = \frac{1}{2}\, diam(A)$.

لم ۲۰.۱.۱. [۱۴] اگر X یک فضای متری ابرمحدب باشد، آن گاه

$$\mathcal{A}(X) \subset \mathcal{E}(X) \subset \mathcal{H}(X)\,.$$

تذکر ۲۱.۱.۱. در لم فوق رابطه شمول به صورت محض نیز اتفاق می افتد. به عنوان مثال فرض کنیم $X = \{(x,y) \in I\!R^2 : x \geq 0\}$ با متر ماکزیمم باشد. قرار می دهیم $E = B\Big((-1, 0), 2\Big) \cap X$ و $H = \{(x, \frac{x}{2}) : 0 \leq x \leq 1\}$.

در این صورت E ابرمحدب خارجی (نسبت به X) است ولی پذیرفتنی نیست، همچنین H ابرمحدب است ولی ابرمحدب خارجی نیست.

تعریف ۲۲.۱.۱. فرض کنیم (X,d) یک فضای متری و A زیرمجموعه ای ناتهی و کراندار از آن باشد، پوسته محدب [11] A را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$co(A) = \cap\{B : A \subseteq B\,,\ \text{محدب است } B\}\,.$$

پوسته محدب بسته A را نیز به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\overline{co}(A) = \cap\{B : A \subseteq B\,,\ \text{بسته و محدب است } B\}\,.$$

[11] convex hull

تعریف ۲۳.۱.۱. فرض کنیم (X,d) یک فضای متری و $A \subseteq X$ باشد. A را کاملا کراندار [۱۲] گوییم، اگر

$$\forall\, \epsilon > 0 \quad \exists\, x_1, x_2, ..., x_n \in X \quad ; \quad A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \epsilon)\,.$$

قضیه ۲۴.۱.۱. [۳۵] هر فضای متری فشرده، کاملا کراندار است.

قضیه ۲۵.۱.۱. [۳۴] هر فضای متری فشرده، تام است.

تعریف ۲۶.۱.۱. فرض کنیم X یک فضای متری باشد. $\mathcal{A}(X)$ را نرمال [۱۳] گوییم، اگر به ازای هر $D \in \mathcal{A}(X)$ که $diam(D) > 0$، داشته باشیم

$$R(D) < diam(D)\,.$$

تعریف ۲۷.۱.۱. فرض کنیم X یک فضای متری باشد. $\mathcal{A}(X)$ را نرمال یکنواخت [۱۴] گوییم، اگر $c \in [\frac{1}{2}, 1)$ موجود باشد که به ازای هر $D \in \mathcal{A}(X)$ که $diam(D) > 0$، داشته باشیم

$$R(D) \leq c\, diam(D)\,.$$

تذکر ۲۸.۱.۱. نرمال و نرمال یکنواخت بودن را می توان به طور مشابه برای $\mathcal{C}(X)$ نیز تعریف نمود.

---

۱۲ totally bounded

۱۳ normal

۱۴ uniformly normal

تعریف ۲۹.۱.۱. $\mathcal{A}(X)$ را فشرده (به طور شمارا فشرده) گوییم، اگر هر خانواده (خانواده شمارا) از مجموعه های ناتهی در $\mathcal{A}(X)$ که دارای ویژگی اشتراک متناهی هستند، دارای اشتراک ناتهی باشد. (اشتراک چنین خانواده ای نیز لزوما در $\mathcal{A}(X)$ قرار دارد.)

قضیه ۳۰.۱.۱.[۱۷] فرض کنیم X یک فضای متری تام باشد که $\mathcal{A}(X)$ نرمال یکنواخت است؛ در این صورت $\mathcal{A}(X)$ به طور شمارا فشرده است.

قضیه ۳۱.۱.۱.[۲۸] فرض کنیم X یک فضای متری باشد که $\mathcal{A}(X)$ به طور شمارا فشرده و نرمال است؛ در این صورت $\mathcal{A}(X)$ فشرده است.

تعریف ۳۲.۱.۱. فرض کنیم (X_1, d_1) و (X_2, d_2) فضاهایی متری باشند. نگاشت $T : X_1 \longrightarrow X_2$ را لیپ شیتزی [۱۵] گوییم، هر گاه ثابت $k \geq 0$ موجود باشد به طوری که به ازای هر $x, y \in X_1$ داشته باشیم

$$d_2(T(x), T(y)) \leq k\, d_1(x, y)\,.$$

به کوچکترین k، که در رابطه بالا صدق کند ثابت لیپ شیتز [۱۶] می گوییم و آن را با نماد $Lip(T)$ نمایش می دهیم.
اگر $k = 1$ باشد، نگاشت فوق را غیرانبساطی [۱۷] گوییم.

تعریف ۳۳.۱.۱. نگاشت $r : M \longrightarrow N$ را تورفتگی [۱۸] گوییم، هرگاه $N \subset M$ و تحدید r به N همانی باشد، یعنی به ازای هر $n \in N$ ، $r(n) = n$. مجموعه N را تورفتگی M گوییم.

---
۱۵ Lipschitzian mapping
۱۶ Lipschitz constant
۱۷ nonexpansive mapping
۱۸ retraction

قضیه ۳۴.۱.۱ [۶]. اگر M یک فضای ابرمحدب باشد، آن گاه M تورفتگی غیرانبساطی هر فضایی است که به طور طولپا در آن نشانده می شود.

قضیه ۳۵.۱.۱ [۱۸]. اگر M یک فضای متری باشد، آن گاه یک مجموعه اندیس I و یک نشاندن طبیعی طولپا از M به $l^{\infty}(I)$ وجود دارد.

قضیه ۳۶.۱.۱ [۳۰]. هر فضای متری تام با زیرمجموعه ای بسته از یک فضای باناخ، طولپا است.

یادآوری . نقطه $x \in X$ را نقطه ثابت [۱۹] نگاشت $T : X \longrightarrow X$ گوییم، هرگاه $T(x) = x$. مجموعه نقاط ثابت نگاشت T را با نماد $Fix(T)$ نمایش می دهیم.

قضیه (نقطه ثابت شودر) ۳۷.۱.۱. [۲۰] [۴۲] اگر A زیرمجموعه ای ناتهی، بسته و محدب از یک فضای باناخ و $T : A \longrightarrow A$ نگاشتی پیوسته با برد فشرده باشد، آن گاه T دارای نقطه ثابت است.

قضیه ۳۸.۱.۱ [۳۷]. فرض کنیم (X, d) یک فضای متری ابرمحدب و نگاشت $T : X \longrightarrow X$ غیرانبساطی باشد. در این صورت به ازای هر $\epsilon > 0$ مجموعه $F_{\epsilon}(T) := \{x \in X : d(x, T(x)) \leq \epsilon\}$ نیز ابرمحدب است.

قضیه ۳۹.۱.۱ [۷]. فرض کنیم H فضایی ابرمحدب و کراندار باشد. در این صورت هر نگاشت غیرانبساطی $T : H \longrightarrow H$ دارای نقطه ثابت است. علاوه بر این $Fix(T)$، ابرمحدب است.

---
۱۹ fixed point
۲۰ Schauder fixed point theorem

۲.۱ فضاهای ژئودزیک

تعریف ۱.۲.۱ . فرض کنیم (X,d) یک فضای متری و $x,y \in X$ باشد. نگاشت طولپای C از بازه بسته $[a,b]$ در $I\!R$ به X را که $C(a)=x$ و $C(b)=y$، مسیر ژئودزیک [21] بین x و y گوییم. در واقع به ازای هر $t_1,t_2 \in [a,b]$ داریم:

$$d(C(t_1),C(t_2)) = |t_1 - t_2|,$$

به ویژه $d(x,y)=b-a$.

تعریف ۲.۲.۱ . اگر C مسیری ژئودزیک بین x و y باشد، تصویر نگاشت C را پاره خط ژئودزیک [22] (پاره خط متری [23]) بین x و y گوییم، و آن را با نماد $[x,y]$ نمایش می دهیم.

تعریف ۳.۲.۱ . فضای متری X را فضای ژئودزیک [24] گوییم، هرگاه بین هر دو نقطه X، مسیری ژئودزیک موجود باشد.

اگر دقیقا یک پاره خط ژئودزیک بین هر دو نقطه فضای ژئودزیک X موجود باشد، X را فضای به طور یکتا ژئودزیک [25] نامیم.

مثال ۴.۲.۱ . فرض کنیم $X=I\!R$ و d متر معمولی روی $I\!R$ باشد. پاره خط ژئودزیک بین هر دو نقطه را پاره خط واصل بین آن دو نقطه در $I\!R$، در نظر می گیریم. به این ترتیب (X,d) یک فضای به طور یکتا ژئودزیک است.

تعریف ۵.۲.۱ . زیرمجموعه‌ای از فضای ژئودزیک X را که با $[0,\infty) \subset I\!R$ طولپا است، اشعه ژئودزیک [26] گوییم.

---

[21] geodesic path

[22] geodesic segment

[23] metric segment

[24] geodesic space

[25] uniquely geodesic space

[26] geodesic ray