دانشگاه پیام نور

پایاننامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد

در رشته‌ی ریاضی کاربردی، گرایش آنالیز عددی

دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی کاربردی

عنوان پایان نامه:

جواب تقریبی معادله غیرخطی با مشتقات کسری ریمان – لیوویل بوسیله روش تکرار تغییراتی هی (He)

استاد راهنما:

دکتر حسین خیری

استاد مشاور :

دکتر مهدی صحت خواه

نگارش:

شهناز رسائیان

۱۳۸۸

بسم الله الرحمن الرحیم

در آغاز هیچ نبود، کلمه بود، آن کلمه خدا بود. پس خدایم به من قدرت بده تا زبانم را آنگونه بگشایم که شایستهٔ بندگی توست و مرا سرنوشتی خیر بنویس که آغاز خود را به پایانی که تو می‌خواهی پیوند دهم و عقل و اندیشه‌ام را در راهی به کار گیرم که تو خواهان آنی.

به من قدرتی بده تا لقایت داشته باشم در اوج قدرت انسان باشم و باور کنم که انسان را در راه رسیدن به اوج هیچ مانعی نیست و تو آن را که مسیر کمال را با عشق طی کند به مقصد خواهی رساند.

به من ایمان بده که انسان را انسان باشم، انسانی که طراوت باران و گرمی و مهربانی خورشید، زلالی آب، بلندای آسمان و نور ماه را به حرمت او آفریدی و به همین حرمت به من یاد بده که همچو باران، گل و خار بودن برایم بی‌معنا باشد و بارش مهربانیم را به یکسان نثار آفریده‌هایت نمایم و بسان خورشید همواره روان و در حرکت باشم. حرکتی که من را به دور دست ترین ستاره‌ها برساند و در این سفر از رسیدن، از لحظه لحظه رفتن و بودن لذت ببرم و هر دم را با سراپای وجود، زندگی را زندگی کنم. زندگی که معنای آن پرنده در پرواز، گل سرخ در باد، برآمدن خورشید در پگاه و رسیدن از عمق به اوج و از خود به خداست.

تقدیم به:

پدر و مادر بزرگوارم

و

همسر مهربانم

بنام خدا

و لَمْ یَشْکُر الْمَخلوق لَمْ یَشْکُر الْخالِقْ.

سپاس و ستایش به پیشگاه خداوند متعال که به اینجانب توفیق تلاش در راه کسب علم و دانش را عطا فرموده است. امیدوارم بتوانم آنچه را که یاد گرفته‌ام در راه پیشرفت وطن خویش بکار گیرم. در آغاز بر خود لازم می‌دانم از زحمات بیدریغ جناب آقای دکتر حسین خیری که راهنمای دلسوز اینجانب بوده‌اند، صمیمانه تشکر نمایم. از آقای دکتر مهدی صحت خواه که زحمات مطالعه و مشاوره این رساله را قبول فرموده‌اند، تشکر می‌نمایم.

از جناب آقای دکتر صداقت شهمراد که زحمات داوری این رساله را قبول فرمودند، تشکر می‌کنم. از اساتید گرامی و کارکنان زحمتکش دانشکده علوم ریاضی دانشگاه پیام نور که در طول تحصیلات دانشگاهی اینجانب زحمات فراوانی را قبول کرده‌اند، تشکر می‌نمایم.

در پایان از کلیه اعضای خانواده‌ام که در راه کسب علم و دانش همواره یاریگر و مشوق من بوده و با قبول تمام مشکلات بر خود راه تحصیل مرا هموار نموده‌اند، سپاسگزاری می‌کنم.

شهناز رسائیان

فروردین ۱۳۸۸

نام خانوادگی دانشجو: رسائیان   نام: شهناز

عنوان: جواب تقریبی معادله غیرخطی با مشتقات کسری ریمان – لیوویل بوسیله روش تکرار تغییراتی هی (He)

استاد راهنما: دکتر حسین خیری

استاد مشاور : دکتر مهدی صحت خواه

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد   رشته: ریاضی کاربردی   گرایش: آنالیز عددی   دانشگاه تبریز

دانشکده‌ی علوم ریاضی   تاریخ فارغ‌التحصیلی: ۱۳۸۸   تعداد صفحه: ۶۵

کلید واژه‌ها: روش تغییراتی، روش تجزیه آدومیان، معادله دیفرانسیل کسری، مشتق کسری ریمان – لیوویل، انتگرال کسری

چکیده

دراین پایاننامه روش تکرار تغییراتی هی را برای یافتن جواب تقریبی معادله دیفرانسیل کسری با مشتقات ریمان – لیوویل بکار می‌بریم. برای نشان دادن کارائی این روش نتایج حاصل را با نتایج بدست آمده از روش تجزیه آدومیان، مقایسه می‌کنیم. نشان می‌دهیم که این روش، بسیار کارا و ساده بوده و طیف وسیعی از مسائل غیر خطی را می‌توان با دقت بالا حل نمود.

فهرست مطالب

مقدمه

بسیاری از مسائل فیزیک و مکانیک منجر به یک مسأله دیفرانسیل کسری می‌گردد. با توجه به اینکه حل تئوری این مسائل در حالت کلی بسیار پیچیده و در پاره‌ای مواقع غیر ممکن می‌باشد، لذا به حل عددی این مسائل روی می‌آوریم و در این میان یک راه‌حل عددی مناسب که بتواند به جواب واقعی تا حد امکان نزدیک باشد، در دستور کار قرار می‌گیرد. جهت حل چنین معادلاتی، روش‌های تجزیه آدومیان و تکرار تغییراتی هی را بکار می‌بریم. در پایان خواهیم دید که دقت روش تکرار تغییراتی هی، در بیشتر حالت‌ها بهتر از روش تجزیه آدومیان می‌باشد.

در فصل اول پایاننامه به ارائه تعاریف و مفاهیم اولیه و قضایای مقدماتی می‌پردازیم که در فصلهای بعدی مورد نیاز است.

در فصل دوم به بررسی روش تجزیه آدومیان می‌پردازیم و اصلاحهائی از آن را بیان می‌کنیم. همچنین همگرائی روش را بررسی می‌کنیم و در پایان، با استفاده از این روش، معادله دیفرانسیل کسری را حل می‌نمائیم.

در فصل سوم روش تکرار تغییراتی هی را معرفی کرده و همگرائی این روش را بررسی می‌کنیم. همچنین کاربرد این روش را در حل معادله دیفرانسیل با مشتقات کسری مورد توجه قرار می‌دهیم.

فصل ۱

پیشینه پژوهش و مفاهیم مقدماتی

۱.۱ تعاریف مقدماتی

مفاهیم و تعاریفی که در این پایاننامه نیاز است در این فصل بیان می‌کنیم.

تعریف ۱.۰.۱ گوی بسته به مرکز z و شعاع r عبارتست از:

$$B(z,r) = \{x : \|x - z\| \leq r\}$$

تعریف ۲.۰.۱ نگاشت $T : X \to X$ را در گوی $B(z,r)$ نگاشت انقباض گویند، اگر ثابتی چون $0 \leq \theta < 1$ موجود باشد بطوریکه:

$$\|Tx_1 - Tx_2\| \leq \theta\|x_1 - x_2\|, \qquad \forall x_1, x_2 \in B(z,r).$$

که در آن θ را ضریب انقباض گویند.

تعریف ۳.۰.۱ فضای برداری مختلط X را یک فضای خطی نرمدار نامیم اگر به هر x یک عدد حقیقی نامنفی مانند $\|x\|$ به نام نرم x چنان مربوط شده باشد که:

۱) به ازای هر x و y در X نتیجه شود $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

۲) اگر $x \in X$ و α اسکالر باشد آنگاه $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$.

۳) $\|x\| = 0$ اگر و تنها اگر $x = 0$.

تعریف ۴.۰.۱ فضای برداری X را فضای باناخ گویند هرگاه نرمدار بوده و با متر تعریف شده توسط نرم، تام باشد.

تعریف ۵.۰.۱ اگر T یک عملگر روی فضای برداری X باشد آنگاه $x \in X$ را نقطه ثابت T گویند هرگاه $Tx = x$.

قضیه ۱.۱ (قضیه نگاشت انقباض) فرض کنید:

۱) X فضای باناخ است.

۲) $T : X \to X$.

۳) T در گوی $\bar{B}(x_0, r)$ نگاشت انقباض با ضریب انقباض $0 \leq \theta < 1$ است.

۴) $\frac{1}{1-\theta}\|x_1 - x_0\| = r_0 \leq r$.

آنگاه:

۱) T دارای نقطه ثابت منحصر بفرد $\tilde{x}$ درون $\bar{B}(x_0, r)$ است.

۲) دنباله $x_n = Tx_{n-1}$، $n = 1, 2, \cdots$ به نقطه ثابت $\tilde{x}$ همگراست.

۳) $\|x_n - \tilde{x}\| < \theta^n r_0$.

اثبات. ۱) به ازای هر $n = 0, 1, \cdots$ داریم:

$$\|x_{n+1} - x_n\| = \|Tx_n - Tx_{n-1}\|$$

$$\leq \theta\|x_n - x_{n-1}\| = \theta\|Tx_{n-1} - Tx_{n-2}\|$$

$$\leq \theta^2\|x_{n-1} - x_{n-2}\} \leq \cdots \leq \theta^n\|x_1 - x_0\|$$

$$\leq \theta^n(1-\theta)r_0$$

بنابراین به ازای هر $n = 0, 1, \cdots$ می‌توان نوشت

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leq \theta^n(1-\theta)r_0$$

۲) همچنین به ازای هر n می‌توان نوشت

$$\|x_n - x_0\| \leq (1-\theta^n) r_0, \tag{۱.۱}$$

اثبات به استقرا: ابتدای استقرا به ازای $n=1$ طبق فرض ۴) مسئله برقرار است. فرض کنید (۱.۱) به ازای n برقرار باشد. ثابت می‌کنیم برای $n+1$ نیز برقرار است.

$$\|x_{n+1} - x_0\| = \|x_{n+1} - x_n + x_n - x_0\| \leq \|x_{n+1} - x_n\| + \|x_n - x_0\|$$

$$\leq \theta^n (1-\theta) r_0 + (1-\theta^n) r_0 = (1-\theta^{n+1}) r_0.$$

۳) از رابطه (۱.۱) می‌توان نوشت

$$\|x_n - x_0\| \leq (1-\theta^n) r_0 \leq r_0$$

لذا

$$x_n \in \bar{B}(x_0, r).$$

۴) ثابت می‌کنیم دنباله $\{x_n\}$ یک دنباله کوشی است. فرض کنید ϵ یک عدد مثبت دلخواه باشد

$$\begin{aligned}
&\|x_{n+k} - x_n\| \\
&= \|x_{n+k} - x_{n+k-1} - x_{n+k-2} + \cdots + x_{n+1} - x_n\| \\
&\leq \|x_{n+k} - x_{n+k-1}\| + \|x_{n+k-1} - x_{n+k-2}\| + \cdots + \|x_{n+1} - x_n\| \\
&\leq (1-\theta) r_0 [\theta^{n+k-1} + \theta^{n+k-2} + \cdots + \theta^n] \\
&\leq (1-\theta)\theta^n r_0 [1 + \theta + \cdots + \theta^{k-1}] \leq (1-\theta)\theta^n r_0 \left(\frac{1}{1-\theta}\right) \leq \theta^n r_0
\end{aligned}$$

زیرا $\frac{1}{1-\theta} = \lim\limits_{k\to\infty} \left[1 + \theta + \cdots + \theta^{k-1}\right]$ (سری هندسی با قدر نسبت $\theta < 1$) است. بنابراین با انتخاب $N = \log_\theta^{\frac{\epsilon}{r_0}} + 1$ و به ازای $n \geq N$

$$\|x_{n+k} - x_n\| < \theta^n r_0 < \epsilon$$

۵) پس دنباله $\{x_n\}$ کوشی است و چون فضا باناخ است بنابراین به $\tilde{x} \in X$ همگرا است. با حدگیری از طرفین دنباله $x_n = Tx_{n-1}$ می‌توان نوشت

$$T\tilde{x} = \tilde{x}$$

٦) از مرحله ۳) داریم

$$\|x_n - x_0\| \leq (1 - \theta^n) r_0$$

با حدگیری از طرفین این رابطه داریم

$$\|\tilde{x} - x_0\| \leq r_0$$

بنابراین $\tilde{x} \in \bar{B}(x_0, r_0)$

۷)از مرحله ۴) داریم

$$\|x_{k+n} - x_n\| \leq \theta^n r_0$$

و چون $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n+k} = \tilde{x}$ بنابراین

$$\|\tilde{x} - x_n\| \leq \theta^n r_0.$$

اثبات یکتایی: فرض کنید دنباله $\{x_n\}$ دارای دو نقطه حدی $\tilde{x}$ و $\hat{x}$ در گوی $\bar{B}(x, r)$ باشد. ثابت می‌کنیم این دو نقطه با هم برابر هستند.

$$\|\tilde{x} - \hat{x}\| = \|T\tilde{x} - T\hat{x}\| \leq \theta\|\tilde{x} - \hat{x}\| < \|\tilde{x} - \hat{x}\|$$

این رابطه ممکن نیست مگر اینکه $\tilde{x} = \hat{x}$. ■

تعریف ۱.۱.۱ معادله‌ای که شامل یک متغیر وابسته و مشتقاتش نسبت به یک یا چند متغیر مستقل باشد، معادله دیفرانسیل نامیده می‌شود. هدف از حل معادله دیفرانسیل، یافتن تابعی است که در معادله صدق کند.

قضیه ۲.۱ معادله انتگرال

$$u(x) = f(x) + \int_a^x F(x,t,u(t))dt. \tag{۲.۱}$$

را در نظر بگیرید. فرض کنید

۱) F انتگرال‌پذیر و کراندار و در شرط لیپ‌شیتس نسبت به مؤلفه سوم صدق کند، یعنی

$$|F(x,t,z) - F(x,t,z')| \leq L|z-z'|,$$

که در آن $L \in (0,1)$ ثابت لیپ‌شیتس است.

۲) f روی $[a,b]$ انتگرال‌پذیر و کراندار است.

در اینصورت معادله (۲.۱) جواب منحصر بفرد دارد.

اثبات. رجوع کنید به [1]. ■

قضیه ۳.۱ فرض کنید D یک ناحیه باز، همبند و غیرتهی از فضای $\mathbb{R}^2$ باشد. مستطیل S در ناحیه D را بصورت زیر تعریف می‌کنیم

$$S = \{(t,x) : \quad |t-\tau| \leq a, \quad |x-\xi| \leq b\}.$$

تابع $f(t,x)$ در ناحیه D پیوسته است و در شرط لیپ‌شیتس صدق می‌کند.
بازه زیر را در نظر می‌گیریم:

$$|\,t-\tau| \leq c,$$

که در آن

$$c = min\{a, b/M\}, \qquad M = \max_{(t,x)\in S} |f(t,x)|.$$

در اینصورت تقریب‌های متوالی

$$y_{n+1}(t) = y_0(t) + \int_{\tau}^{x} f(s, y_n(s))ds, \qquad n = 0, 1, \cdots$$

در بازه فوق وجود داشته و پیوسته است و به تنها جواب مسئله $y' = f(x, y)$ همگرای یکنواخت می‌باشد.

اثبات. رجوع کنید به [2]. ■

۲.۱ تابع گاما

تابع گاما مفهوم مشتق معمولی را به مشتق از یک مرتبه دلخواه حتی با توانهای کسری تعمیم می‌دهد. پیدایش معادلات دیفرانسیل کسری ریشه در تابع گاما و خواص آن دارد. این تابع نخستین بار توسط اویلر به منظور تعریف فاکتوریل اعداد غیر صحیح معرفی شد.
فرض کنید $z \neq 0, -1, -2, \cdots$ در اینصورت تابع گاما به شکل زیر تعریف می‌شود

$$\Gamma(z) = \lim_{n \to \infty} \frac{1 \times 2 \times \cdots \times n}{z(z+1)(z+2)\cdots(z+n)} n^z \qquad (۳.۱)$$

طبق این تعریف از تابع گاما داریم

$$\begin{aligned} \Gamma(z+1) &= \lim_{n \to \infty} \frac{n!}{(z+1)(z+2)\cdots(z+n+1)} n^{z+1} \\ &= \lim_{n \to \infty} \frac{zn}{z+n+1} \cdot \frac{n!}{z(z+1)(z+2)\cdots(z+n)} n^z \\ &= z\Gamma(z) \end{aligned}$$

در نتیجه رابطه

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \qquad (۴.۱)$$

حاصل می‌شود. با محاسبه $\Gamma(1)$ می‌توان فاکتوریل های معمولی اعداد طبیعی را از (۴.۱) استخراج نمود.

$$\begin{aligned} &\Gamma(1) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{1\times 2\times\cdots\times n(n+1)} n^1 = 1 \\ &\Gamma(2) = 1\Gamma(1) = 1 \\ &\Gamma(3) = 2\Gamma(2) = 1\times 2 = 2! \\ &\quad\vdots \\ &\Gamma(n+1) = 1\times 2\times 3\times\cdots\times n\Gamma(1) = n! \end{aligned} \tag{۵.۱}$$

تعریف دیگری از تابع گاما به صورت انتگرال ناسره به شکل:

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt, \qquad Real(z) > 0 \tag{۶.۱}$$

است.

با تغییر متغیر $t = u^2$ رابطه (۶.۱) را می‌توان بصورت

$$\Gamma(z) = 2\int_0^\infty e^{-u^2} u^{2z-1} du, \qquad Real(z) > 0 \tag{۷.۱}$$

نوشت و با تغییر متغیر $t = \ln(\frac{1}{u})$ رابطه (۶.۱) را بصورت زیر می‌توان نوشت

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty \left[\ln(\frac{1}{u})\right]^{z-1} du, \qquad Real(z) > 0. \tag{۸.۱}$$

با جایگذاری $z = \frac{1}{2}$ در رابطه (۷.۱) خواهیم داشت.

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi} \tag{۹.۱}$$

۳.۱ معادلات دیفرانسیل کسری

تاریخچه حساب دیفرانسیل کسری از قرن ۱۷ شروع شده است و بحثهای اولیه این شاخه را کارهای لایب نیتز، اویلر، آبل، لاپلاس، لیوویل و دیگران تشکیل می‌دهند. اولین گزارش مربوط به تعمیم مشتقات معمولی به کسری منسوب به لایب نیتز و هوپیتال است که در آن هوپیتال از لایب نیتز می‌پرسد که اگر در عملگر $\frac{d^n}{dx^n}$، n را $\frac{1}{2}$ فرض کنیم چه رخ می‌دهد؟
لاپلاس (۱۸۱۲) مشتقات کسری را به صورت یک انتگرال تعریف کرد و در سال ۱۸۱۹ لاکرویکس، تعریف مشتق معمولی زیر را

$$\frac{d^n}{dx^n}x^m = \frac{m!}{(m-n)!}x^{m-n}, \qquad m \geq n, \qquad m,n \in N$$

به حالت کسری

$$\frac{d^\nu}{dx^\nu}x^\mu = \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu-\nu+1)}x^{\mu-\nu}$$

تعمیم داد که در آن μ و ν اعداد حقیقی دلخواه هستند. فوریه(۱۸۲۲) عملگرهای کسری را با نمایش انتگرالی $f(x)$ به صورت زیر معرفی کرد

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\nu)d\nu \int_{-\infty}^{+\infty} cos(t(x-\nu))dt \tag{۱۰.۱}$$
$$\frac{d^n}{dx^n}f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\nu)d\nu \int_{-\infty}^{+\infty} (t^n cos(t(x-\nu)) + \frac{1}{2}n\pi)dt$$

او به صورت نمادی n را با α عوض کرد. آبل اولین بار مشتقات کسری را برای حل یک معادله انتگرال در یک مسأله کاربردی، استفاده نمود. حساب دیفرانسیل کسری [1] عبارت است از انتگرال و دیفرانسیل‌گیری از مرتبه دلخواه که ممکن است گویا، گنگ و یا مختلط باشد. بسیاری از مسائل کاربردی نیازمند تعاریفی از مشتقات کسری هستند که دارای شرایط اولیه اساسی که شامل $f(a)$ و

[1] Fractional calculus

$f'(a)$ و غیره باشد. عملگر مشتق کپوتو به طور صریح این شرایط را برای ما مهیا می‌کند.
مشتق کسری در خیلی از مسائل فیزیک مانند نوسان وابسته به میرائی مواد و یا حرکت یک ورقه نازک بزرگ در سیال نیوتن یا خیلی از مسائل دیگر اتفاق می‌افتد. همچنین بعضی از پدیده ها در الکترومغناطیس، صوت، الکتروشیمی و علم مواد بوسیله معادلات دیفرانسیل از مرتبه کسری بیان می‌شوند[3-9].
جوابهای عددی معادلات دیفرانسیل کسری بوسیله دیسلم[2] و فورد[3] مورد بررسی قرار گرفته است [10].

۱.۳.۱ انتگرال و مشتق کسری

تعریف انتگرال از مرتبه کسری که با آن بیشتر برخورد می‌کنیم انتگرال ریمان — لیوویل است که به صورت زیر تعریف می‌شود[11,12,13].

$$I^q f(x) = \frac{d^{-q} f(x)}{dx^{-q}} = \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^x \frac{f(t)dt}{(x-t)^{1-q}}$$

و مشتق ریمان — لیوویل از مرتبه کسری به صورت:

$$d^q f(x) = \frac{d^q f(x)}{dx^q} = \frac{d^n}{dx^n} \left(\frac{d^{-(n-q)} f(x)}{dx^{-(n-q)}} \right) = \frac{1}{\Gamma(n-q)} \frac{d^n}{dx^n} \int_0^x \frac{f(t)dt}{(x-t)^{1-n+q}}$$

بیان می‌شود که در آن q $(q > 0, q \in \mathbb{R})$ مرتبه عملگر و n یک عدد صحیح بوده و در شرط $n-1 \leq q < n$ صدق می‌کند.

تعریف ۱.۳.۱ مشتق کپوتو تابع $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ به شکل زیر تعریف می‌شود

$$d^q f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-q)} \int_0^x \frac{f^{(n)}(t)dt}{(x-t)^{q+1-n}}, \qquad n = [q] + 1. \qquad (۱۱.۱)$$

Diethelm[2]

Ford[3]

که در آن $[q]$ جزء صحیح عدد حقیقی q است.

۲.۳.۱ وجود جواب برای معادله دیفرانسیل کسری

اخیراً بررسی وجود و چندگانگی جواب های مثبت معادلات دیفرانسیل کسری بسیار مورد توجه قرار گرفته است. در این بخش از پایاننامه می‌خواهیم به وجود جواب برای مساله دیفرانسیل کسری خطی و غیرخطی بپردازیم.

قضیه ۴.۱ اگر $\alpha > 0$ آنگاه معادله دیفرانسیل

$$d^{\alpha}u(t) = 0$$

دارای جواب منحصر بفرد به شکل زیر است

$$u(t) = c_0 + c_1 t + \cdots + c_n t^{n-1}, \quad c_i \in \mathbb{R}, \quad i = 1, 2, \cdots, n, \quad n = [\alpha] + 1.$$

اثبات. با توجه به تعریف مشتق کپوتو (۱۱.۱) رابطه بالا به آسانی اثبات می‌شود. ■

قضیه ۵.۱ فرض کنید $h(t) \in C[0,1]$ و $1 < \alpha \leq 2$ در اینصورت مساله مقدار مرزی

$$d^{\alpha}u(t) = h(t), \quad 0 < t < 1 \tag{۱۲.۱}$$

$$u(0) + u'(0) = 0, \quad u(1) + u'(1) = 0 \tag{۱۳.۱}$$

دارای جواب یگانه به صورت زیر است

$$u(t) = \int_0^1 G(t,s)h(s)ds \tag{۱۴.۱}$$

که در آن $G(t,s)$ از فرمول زیر محاسبه می شود

$$G(t,s) = \begin{cases} \frac{(1-s)^{\alpha-1}(1-t)+(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + \frac{(1-s)^{\alpha-2}(1-t)}{\Gamma(\alpha-1)}, & s \leq t \\ \frac{(1-s)^{\alpha-1}(1-t)}{\Gamma(\alpha)} + \frac{(1-s)^{\alpha-2}(1-t)}{\Gamma(\alpha-1)}, & t \leq s. \end{cases} \tag{۱۵.۱}$$

اثبات. با استفاده از قضیه ۳.۱ معادله (۱۲.۱) برای $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ هم ارز معادله انتگرالی زیر است

$$u(t) = I^\alpha h(t) - c_1 - c_2 t = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h(s) ds - c_1 - c_2 t \tag{۱۶.۱}$$

با توجه به روابط $d^\alpha I^\alpha u(t) = u(t)$ و $I^\alpha I^\beta u(t) = I^{\alpha+\beta} u(t)$، برای $\alpha, \beta > 0$ و $u \in L(0,1)$، با مشتق گیری از طرفین (۱۶.۱) خواهیم داشت

$$u'(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{\partial}{\partial t}(t-s)^{\alpha-1} h(s) ds + 1 \times (t-t)^{\alpha-1} h(s) - 0 \times (0-s)^{\alpha-1} h(s) - c_2$$
$$u'(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (\alpha-1)(t-s)^{\alpha-2} h(s) ds - c_2 = \frac{1}{\Gamma(\alpha-1)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-2} h(s) ds - c_2$$

و با استفاده از شرایط مرزی (۱۳.۱) داریم

$$-c_1 - c_2 = 0$$

$$-c_1 - 2c_2 = -I^\alpha h(1) = I^{\alpha-1} h(1)$$

در نتیجه

$$c_1 = -I^\alpha h(1) - I^{\alpha-1} h(1)$$

$$c_2 = I^\alpha h(1) + I^{\alpha-1} h(1)$$

بنابراین جواب یگانه (۱۲.۱) بصورت زیر حاصل می شود:

$$\begin{aligned} u(t) \quad &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h(s) ds + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (1-s)^{\alpha-1} h(s) ds \\ &+ \frac{1}{\Gamma(\alpha-1)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} h(s) ds - \frac{t}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (1-s)^{\alpha-1} h(s) ds \\ &- \frac{t}{\Gamma(\alpha-1)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-2} h(s) ds \\ &= \int_0^t \Big(\frac{(1-s)^{\alpha-1}(1-t) + (t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + \frac{(1-s)^{\alpha-2}(1-t)}{\Gamma(\alpha-1)}\Big) h(s) ds \end{aligned}$$