دانشگاه پیام نور

دانشکده علوم

گروه ریاضی

پایان‌نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد

در رشته ریاضی کاربردی

عنوان پایان‌نامه

حل عددی معادلات دیفرانسیل تصادفی جزئی

استاد راهنما

دکتر علی ذاکری

استاد مشاور

دکتر خدیجه احمدی آملی

نگارش

مرتضی معینی

فروردین ۱۳۸۹

تقدیم به خانواده‌ام

همسر و فرزندم

قدردانی

سپاس و ستایش معبود یگانه را که پرتو الطاف بی‌شمارش بر لحظه لحظه‌ی زندگی‌ام ساطع و آشکار است. حمد و ثنا می‌گزارم او را که فکرت و اندیشه را در بستر روحم روان ساخت و بهره‌گیری از خوان گسترده‌ی دانش اساتیدم را روزی‌ام گردانید.
امتنان و سپاس می‌گزارم تلاش‌ها، زحمات و راهنمایی‌های ظریف، ارزشمند و بی‌شائبه‌ی اساتید فرزانه و گرانمایه‌ام، جناب آقای دکتر علی ذاکری و خانم دکتر خدیجه احمدی آملی را که با حمیت و جدیت، مرا به دقت، اندیشه، درک و تعمق وامی‌داشتند.
از جناب آقای دکتر محمدحسن بیژن‌زاده و سرکار خانم دکتر سلطانیان که با قبول زحمت داوری پروژه و حضور در جلسه دفاعیه اینجانب را راهنمایی نمودند، تشکر می‌نمایم.

مرتضی معینی

فروردین ۱۳۸۹

چکیده

حل عددی مسائل دیفرانسیل معمولی یا جزئی خطی که در آن قسمتی از شرایط اولیه یا کرانه‌ای یا خود معادله تصادفی باشد از دیرباز مورد توجه پژوهشگران بوده است. تصادفی بودن بدین مفهوم است که وجود برخی اختلالات سبب تبدیل معادله از حالت معین شده ریاضی به تصادفی با ابعاد مختلف شود.

مبنای حل این گونه معادلات، تکیه بر اصول خطی‌سازی و گسسته‌سازی مسأله است. در اکثر موارد قسمت تصادفی دارای ویژگی حرکت براونی است. با توجه به ویژگی‌های منحصر به فرد حرکت براونی (هیچ جا مشتق‌پذیر نبودن) شکل معادله از حالت دیفرانسیلی خارج شده و به صورت یک معادله انتگرالی بیان می‌شود. لذا گسسته‌سازی انتگرال و ساختن روش‌های عددی روی انتگرال‌ها به ویژه انتگرال‌های تصادفی از اهداف عمده پایان‌نامه است.

کلمات کلیدی: معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی، نوفه سفید، انتگرال ایتو، صفحه براونی

فهرست

فهرست اشکال

فهرست جداول

فهرست نمادها

خانواده	U
مجموع خانواده‌ها	Ω
تابع احتمال	P
فضای احتمال	(Ω, U, P)
متعلق بودن	$\in$
سیگما	σ
متمم **A**	A^c
اشتراک خانواده‌ها	$\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$
اجتماع خانواده‌ها	$\bigcup_{k=1} A_k$
مجموعه تهی	$\varnothing$
کوچکتر	$\leq$
تقریبا همه جا	$a.s.$
مجموعه بورل	B
حجم مرکزی دیراک	δ_z
فضای برداری **n** – بعدی	$\mathbb{R}^n$
تابع مشخصه	χ
ماکسیمم (مینیمم) صفر و **X**	$X^{\pm}$
امید ریاضی	E
تابع توزیع	F
توزیع نرمال	$N(m, \sigma^2)$
اغلب بی‌نهایت بار A_n تکرار شود	$A_n \; i.o$

نمادها

مجموع جزئی	S_n
فرآیند وینر	$W(t)$
می‌نیمم	$\wedge$
فیلتر	F_t
برای هر	$\forall$
طول گام	Δ
معادله دیفرانسیل تصادفی	SDE
نوفه سفید	$\xi(.)$
جرم واحد در صفر	δ_0
تابع خود همبسته	$r(t,s)$
دنباله توابع مختلط	$\{\psi_n\}_{n=0}^{\infty}$
ایتو	$It\hat{o}$
گذشته حرکت براونی	$\omega(.)$
آینده حرکت براونی	$\omega^{+}(.)$
تابع پله‌ای	G_k
جمله باقی‌مانده	R
عملگر	L
نماد انتگرال	$I(.,..,.)$
نمو گاوسی	ΔW
ارزش کالا	$S(t)$
توابع پیوسته با کرانه‌ی صفر	C^0
توابع پیوسته دو بار مشتق‌پذیر	C^2
سیگنال اختلال	Π
مقدار خطا	e

پیش گفتار

به طور معمول برای محاسبه جواب‌های واقعی و عینی مسائل مختلف فیزیکی که با معادلات دیفرانسیل معمولی، جزئی، تصادفی یا معادلات انتگرال مدل‌سازی می‌شوند، از روش‌های عددی و تقریبی استفاده می‌شود. بدیهی است که در حالت کلی ممکن است این دستگاه‌ها شامل جملات پیچیده، پارامترهای تصادفی، داده‌ها و یا شرایط مرزی خاصی باشند که حل مسأله را با مشکل مواجه کند. لذا توجه به یک نکته مهم و اساسی در علوم ریاضی لازم است و آن اصلاح فیزیکی جواب مربوط به دستگاه‌های دینامیکی است که توسط چنین معادلاتی مدل‌سازی شده‌اند. در این فرآیند جواب‌ها می‌بایست، تقریب خوبی از جواب واقعی مسأله باشند.

روش‌های عددی بر پایه جایگزینی متغیرهای پیوسته با متغیرهای گسسته است. روش‌های عددی از قبیل روش تفاضل متناهی صریح، روش تفاضل متناهی ضمنی و نظایر آن، یک معادله دیفرانسیل را به یک دستگاه معادلات تفاضلی تبدیل کرده به گونه‌ای که آن را بتوان با تکنیک‌های تکراری با استفاده از الگوریتم‌های رایانه‌ای، محاسبه کنند. در نتیجه جدولی از اعداد که جواب را به ازای مقادیر مختلفی از متغیرهای مستقل تعیین کرده‌اند، حاصل می‌شود. هر چند بسیاری از مسائلی که دارای جواب تحلیلی معین نمی‌باشند را می‌توان با روش‌های عددی حل کرد، اما روش‌های عددی نیز با مشکلاتی مانند میزان محاسبات زیاد مواجه‌اند و معمولا خطای گرد کردن باعث ناپایداری جواب خواهد شد.

حل عددی مسائل خطی به صورتی که قسمتی از شرایط یا خود معادله دیفرانسیل معمولی یا مشتقات جزئی آن تصادفی باشد از دیرباز مورد توجه ریاضیدانان بوده است. تصادفی بودن در کاربرد بدین مفهوم است که برخی اختلالات در نوسانات قیمت در امور مالی، وجود پارازیت در علوم فیزیکی، ناخالصی کنترل نشده در شیمی، ... باعث می‌شود معادله از حالت معین شده ریاضی به صورت یک معادله تصادفی با ابعاد مختلف بدل شود. از این رو تقریب عددی جواب چنین مسائلی بسیار کاربردی و از اهمیت خاصی برخوردار می‌باشد. مبنای حل این گونه از معادلات با تکیه بر اصول خطی‌سازی، گسسته‌سازی و یا ساختن محدودیت‌های اضافی روی مسأله است. نکته مهم در تقریب چنین معادلاتی آن است که جواب‌های به دست آمده به دلیل تصادفی بودن با تکرار تجربه نسبت به جواب دقیق ممکن است کاملا متفاوت باشد، لذا در تقریب عددی این معادلات از میانگین معمولی، میانگین مربعات، ... تعداد زیادی از تجربه‌ها برای مقایسه با جواب دقیق معادله استفاده می‌شود.

در میان پدیده‌های تصادفی در مسائل معادلات دیفرانسیل وابسته به زمان، مکان و یا هردو، حرکت براونی دارای ویژگی‌هایی است که با خصوصیات منحصر به فرد خود ریاضیدانان را مجاز می‌سازد که روش‌های

عددی شبیه به آنچه که در معادلات دیفرانسیل معمولی و جزئی وجود دارد طراحی نمایند. از جمله ویژگی‌های حرکت براونی، مارتینگل بودن، پیوستگی یکنواخت و هیچ جا مشتق‌پذیر نبودن آن است. بنابراین خاطر نشان می‌شود که شبیه‌سازی و حل هر معادله دیفرانسیلی میسر نیست زیرا ممکن است قسمت تصادفی دارای خصوصیات حرکت براونی نباشد. از این رو رویکرد مورد مطالعه در فصل اول و دوم این پایان‌نامه، آشنایی با فضای احتمال، متغیرهای تصادفی و بررسی ویژگی‌های آن به‌طور اجمالی است.

فصل دوم به معرفی حرکت براونی و خصوصیات آن می‌پردازد. در هنگام مطالعه معادلات دیفرانسیل تصادفی که در آنها نسبت به حرکت براونی مشتق گرفته شده است. به دلیل خصوصیت حرکت براونی (مشتق‌پذیر نبودن) سعی بر این است که شکل معادله از حالت دیفرانسیلی خارج و آنها را به صورت معادله انتگرالی بیان کرد. که این عمل به یکی از دو صورت زیر امکان‌پذیر است.

روش اول: تبدیل به کمک انتگرال ایتو که با مفهوم مارتینگل بودن حرکت براونی کاملا منطبق می‌باشد. بنابراین جواب‌های معادلات انتگرال حاصل از این تعریف با جواب معادله دیفرانسیل اصلی هم‌ارز است. این روش در فصل دوم پایان‌نامه به تفصیل شرح داده خواهد شد.

روش دوم: معادله انتگرالی که برای حل این معادلات مورد نظر مناسب می‌باشد به انتگرال اشتراتونویچ معروف است که همانند روش انتگرال ریمان در معادله دیفرانسیل معمولی است.

برای انتگرال‌های ایتو روش‌های پیشنهادی وجود دارد که بدون نیاز به استفاده از تعریف مستقیم انتگرال ایتو جواب معادله دیفرانسیل‌های تصادفی را به طور مستقیم می‌توان یافت. لازم به ذکر است که این روش‌ها از مفهوم انتگرال ایتو استخراج شده و جواب‌های حاصل از این روش‌ها تحلیلی و شامل جملات تصادفی می‌باشند.

در فصل سوم مدل‌های ریاضی در مسائل امور مالی مورد بحث قرار می‌گیرند. موسسه‌های مالی از این مدل‌ها برای تصمیم‌گیرهای اساسی و رسیدن به سود بیشتر استفاده می‌کنند. البته مطالعه این ساختارها مشکل و اکثر مدل‌های به دست آمده به صورت یک معادله دیفرانسیل جزئی هستند، با این تفاوت که بعضی ضرایب آنها از نوع متغیرهای تصادفی هستند.

اگر چه مطالعه این معادلات سخت و طولانی است اما نتایج بسیار مفیدی در پی دارند. از ساده‌ترین نوع مدل‌های ریاضی که در ریاضیات مالی وجود دارد، معادله دیفرانسیل جزئی تصادفی بلک – شولز – مرتون است. چگونگی مدل‌سازی این معادله دیفرانسیل جزئی تصادفی به تفصیل در این فصل تشریح می‌گردد.

در فصل چهارم مفاهیم اصلی وتکنیک‌های اساسی، برای مطالعه عددی معادلات دیفرانسیل تصادفی بررسی می‌شوند. با توجه به این که، روش‌های عددی برای حل معادلات دیفرانسیل معمولی از دیرباز وجود داشته‌اند، نشان خواهیم داد که از قضایای مربوط به روش‌های قدیمی عددی اولیه می‌توان برای یافتن روش‌های عددی در حل معادلات دیفرانسیل تصادفی استفاده نمود.

اساس روش‌های عددی در این نوع معادلات بر پایه گسسته‌سازی زمان در انتگرال‌های تصادفی ایتو می‌باشد. اثبات اغلب قضایای مربوط به این فصل عمدتا به منابع پایان فصل ارجاع داده شده است. در اوایل فصل به بیان روش‌های عددی پرداخته و در ادامه همگرایی این روش‌ها مورد بحث قرار می‌گیرد. با توجه به شبیه‌سازی معادلات دیفرانسیل در دو جهت مختلف، روش‌های عددی معرفی شده به دو دسته تقسیم شده‌اند. در دسته اول کل مسیر حرکت جواب معادله دیفرانسیل شبیه‌سازی می‌شود، که به این روش‌ها روش‌های تقریب قوی گویند. در بعضی مواقع نیازی به شبیه‌سازی کل مسیر حرکت نیست. لذا از روش‌های تقریبی معروف به تقریب ضعیف برای تقریب یک یا چند لحظه‌ی خاص جواب معادله دیفرانسیل معمولی استفاده می‌شود. برای این دسته از روش‌ها همگرایی ضعیف معرفی می‌گردد.

در فصل آخر در مورد سیستم‌های فیزیکی به وجود آمده از معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی که دچار اختلالات تصادفی نوفه سفید باشد معرفی می‌گردند. به چنین معادله‌ای معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی تصادفی گویند. نوفه سفید بحث شده در این فصل، حاصل از مشتقات متوالی نسبت به فضا- زمان، حرکت براونی (صفحه براونی) است. این معادله بر خلاف معادله دیفرانسیل معمولی تصادفی دارای حل تحلیلی نمی‌باشد ولی می‌توان آن را به صورت یک معادله انتگرالی بیان کرد به طوری که انتگرال‌ها به مفهوم انتگرال‌گیری ایتو هستند.

برای حل معادلات دیفرانسیل تصادفی، با استفاده از روش‌های عددی یک معادله اصلاح شده برای قسمت انتگرال تصادفی پیشنهاد می‌شود. سپس برای معادله اصلاح شده انتگرال تصادفی، قضایای پایداری بیان و اثبات می‌شود. این گسسته‌سازی معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی به یک دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی تبدیل می‌کند. سرانجام یک روش عددی برای تقریب جواب پیشنهاد می‌شود.

در حالتی که معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی با مقادیر کرانه‌ای باشد، معادله اصلاح شده‌ی دیفرانسیل معمولی وابسته آن نیز با مقادیر کرانه‌ای خواهد بود. این امر از امتیازات مهم این روش خطی است. دو دسته از معادلات دیفرانسیل تصادفی با مشتقات جزئی در فصل آخر معرفی شده و در مورد چگونگی حل آنها بحث خواهد شد.

۱

مقدمه‌ای بر تئوری احتمال و فضای احتمال

در این فصل به طور خلاصه مفاهیم فضای احتمال و اندازه‌پذیری ارائه می‌گردد.

۱-۱ فضای احتمال

۱-۱-۱ تعریف *خانواده U از زیر مجموعه Ω، یک σ-**جبر** در Ω است، اگر*

۱) $\varnothing, \Omega \in U$

۲) اگر $A \in U$ آنگاه $A^c \in U$

۳) اگر $A_1, A_2, A_3, \ldots \in U$ آنگاه $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k , \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \in U$

که در آن $A^c = \Omega - A$ متمم مجموعه A است.