به نام پروردگار یکتا

دانشگاه شهید بهشتی
دانشکده علوم ریاضی
گروه ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد

عنوان:

طبقه بندی رخدادهای مدلی که اصل ارتباط کامل را حفظ می‌کنند

استاد راهنما:

دکتر مرتضی منیری

نگارنده:

رحیم رمضانیان

اردیبهشت ماه ۱۳۸۹

تاریخ ....
شماره ....
پیوست..........................

دانشگاه شهید بهشتی

«بسمه تعالی»

ان ۱۹۸۳۹۶۳۱۱۳ اوین
ن: ۲۹۹۰۱

«صورتجلسه دفاع از پایان نامه دانشجویان دوره کارشناسی ارشد»

بازگشت به مجوز دفاع شماره ۵/۲۰۰/۱۱۰۵د مورخ ۸۹/۳/۲۱ جلسه هیأت داوران ارزیابی پایان نامه کارشناسی ارشد **آقای رحیم رمضانیان** به شماره شناسنامه: **۴۹۸۵** صادره از : **مشهد** متولد **۱۳۶۴/۶/۳۰** دانشجوی دوره کارشناسی ارشد: **ریاضی محض**

با عنوان:

طبقه بندی رخدادهای مدلی که اصل ارتباط کامل را حفظ می‌کنند

به راهنمایی: آقای دکتر مرتضی منیری

طبق دعوت قبلی در تاریخ **۸۹/۳/۳۱** تشکیل گردید و بر اساس رأی هیأت داوری و با عنایت به ماده ۲۰ آئین نامه کارشناسی ارشد مورخ ۷۵/۱۰/۲۵ پایان نامه مزبور با نمرهٔ ۱۹/۴ (نوزده و چهار دهم) و درجه عالی مورد تصویب قرار گرفت.

	مرتبه علمی	نام دانشگاه	امضاء
۱. **استاد راهنما:** آقای دکتر مرتضی منیری	استادیار	شهید بهشتی	
۲. **استاد داور:** آقای دکتر محمد باقری	استادیار	تربیت مدرس	
۳. **استاد داور:** آقای دکتر حسین حاجی ابوالحسن	دانشیار	شهید بهشتی	حاجی ابوالحسن
۴. **مدیر گروه:** آقای دکتر سهرابعلی یوسفی	دانشیار	شهید بهشتی	

تقدیم به پدر فداکار و مادرم مهربانم

تشکر و قدردانی

اینک به پایان دوره‌ای رسیده‌ام و فرصتی پدید آمده است بر خود لازم می‌دانم از استاد بزرگوارم آقای دکتر مرتضی منیری که دانش من را در مورد منطق ریاضی چند برابر نمودند و سپس با حسن توجه در تدوین این پایان نامه راهنمایی‌ام کرده‌اند، تشکر نمایم.

از اساتید بزرگوار آقایان دکتر محمد باقری و دکتر حسین حاجی ابوالحسن که زحمت داوری این پایان نامه را بر عهده گرفتند بسیار سپاسگزارم.

از برادر عزیزم که در شناخت بهتر سیستم‌های چند عاملی من را راهنمایی کرد سپاسگزارم. همچنین از دوست عزیزم آقای حمید کرامتی که در تایپ این پایان نامه من را یاری نمود تشکر می‌کنم.

چکیده

در منطق شناختی دانش توزیع شده یک مفهوم کلیدی است. فرمول φ دانش توزیع شده بین اعضای یک گروه از عامل‌ها است هر گاه در همه جهان‌هایی که همه اعضای گروه ممکن می‌دانند φ درست باشد. اصل ارتباط کامل بیان می‌کند که اگر φ دانش توزیع شده بین اعضای گروه B باشد آنگاه اعضای گروه B قادر خواهند بود φ را از مجموعه‌ای که از اجتماع دانش‌های آنها پدید می‌آید استنتاج کنند. اما اصل ارتباط کامل در همه مدل‌های کریپکی منطق شناختی برقرار نیست. در این پایان نامه نشان می‌دهیم که در چه مدل‌هایی این اصل برقرار است و بعلاوه در چه مدل‌هایی این اصل تحت اعلان عمومی حفظ می‌شود.

پیشگفتار

متن حاضر رساله کارشناسی ارشد ریاضی با عنوان "طبقه بندی رخدادهای مدلی که اصل ارتباط کامل را حفظ می‌کنند" است. این پایان نامه شامل ۴ فصل می‌باشد. در مقدمه فصل ۱ توضیحات عمومی راجع به موضوع مورد مطالعه ارائه می‌شود. در فصل ۱ نشان می‌دهیم که چگونه می‌توان دانش افراد را مدل‌سازی کرد. در این فصل به معرفی زبان منطق شناختی، مدل‌های کریپکی S_5 و اصول منطق شناختی می‌پردازیم و عملگرهایی مانند عملگر دانش K، عملگر دانش توزیع شده D و عملگر دانش مشترک C معرفی می‌شوند. فصل ۲ که مفهوم پویایی را به منطق شناختی پیوند می‌دهد با معرفی اعلان عمومی آغاز می‌شود و در ادامه نشان می‌دهد که اعلان عمومی یک عمل شناختی است. عمل‌های شناختی به مدل کردن رخدادهایی می‌پردازند که سبب تغییر جهان‌های ممکن از دید افراد می‌شوند. منبع اصلی مورد استفاده در فصل‌های ۱ و ۲، مرجع [۱] می‌باشد.
فصل ۳ به توضیح بخش‌هایی از منبع [۴] اختصاص دارد. این مقاله مدل‌هایی را معرفی می‌کند که در آنها اصل ارتباط کامل برقرار است. در این فصل سعی کرده‌ایم تا تمامی نکات اثبات نشده درون مقاله را روشن سازیم. فصل ۴ کار جدیدی است که توسط نگارنده انجام شده است و به موضوع پایداری اصل ارتباط کامل تحت اعلان عمومی می‌پردازد.

فهرست مندرجات

فصل ۱

منطق شناختی

مقدمه

در سال ۱۹۵۱ فان رایت[۱] مقاله‌ای با عنوان "مقاله‌ای در منطق موجهات[۲]" منتشر کرد و هینتیکا[۳] با ایده‌هایی که از این مقاله گرفته بود در سال ۱۹۶۲ کتابی با عنوان "دانش و باور مقدمه‌ای بر منطق از دو مفهوم[۴]" به چاپ رساند. وی در این کتاب به کمک مفهوم جهان‌های ممکن مدلی برای دانش و باور ارائه کرد. بسیاری او را پدر منطق شناختی می‌دانند. در اواخر سال‌های ۱۹۷۰ منطق شناختی مورد توجه دانشمندان فعال در شاخه‌هایی مانند هوش مصنوعی، فلسفه و نظریه بازی‌ها قرار گرفت. در دهه ۸۰ محققین علوم کامپیوتر به منطق شناختی روی آوردند، فاگین[۵]، هالپرن[۶]، موزز[۷] و وَردی[۸] از این دسته بودند. آنها مقالاتی را که در طی حدود ۱۰ سال در مورد منطق شناختی به چاپ رسانده بودند در کتابی با نام "استدلال درباره دانش[۹]" جمع آوری کردند و در سال ۱۹۹۵ منتشر کردند.

در سال ۱۹۹۹ فان دِر هوک[۱۰]، فان لیندر[۱۱] و مِیِر[۱۲] نشان دادند که اصل ارتباط کامل همواره برقرار نیست . آنها خانواده‌ای از مدل‌های کریپکی ارائه کردند که این اصل در آنها برقرار است. این خانواده‌ها را در فصل ۳ این پایان نامه خواهیم دید.

---

[۱] von Wright
[۲] An Essay in Modal Logic
[۳] Hintikka
[۴] Knowledge and Belief, An introduction to the logic of two notions
[۵] Fagin
[۶] Halpern
[۷] Moses
[۸] Vardi
[۹] Reasoning about knowledge
[۱۰] van der Hoek
[۱۱] van Linder
[۱۲] Meyer

به مثال زیر توجه کنید.

مثال ۱.۰.۱ کاراگاه علوی به دنبال پیدا کردن قاتل مینا در حالی که در دفتر خصوصی قاضی نشسته است حقایق زیر را برای او آشکار می‌کند.

۱. در هنگام قتل چاقوی آشپزخانه در کمد اتاق خواب قرار داشته است.

۲. اگر لیلا بداند که در هنگام قتل چاقوی آشپزخانه در کمد اتاق خواب قرار داشته است آنگاه همسر لیلا بی‌گناه است.

لیلا می‌داند که در هنگام قتل چاقوی آشپزخانه در کمد اتاق خواب قرار داشته است. کاراگاه علوی از دفتر قاضی بیرون آمده و به سمت لیلا می‌رود تا در مورد مکان چاقو از او سوال کند اما قبل از آنکه به او برسد یک خبرنگار که صحبت‌های کاراگاه و قاضی را مخفیانه گوش می‌کرده است در بلندگوی دادگاه اعلان عمومی می‌کند که در هنگام قتل چاقوی آشپزخانه در کمد اتاق خواب قرار داشته است.

بعد از این اعلان عمومی کاراگاه علوی دیگر نمی‌تواند بی‌گناهی همسر لیلا را ثابت کند. چرا؟

سوال مطرح شده را که مثالی در نحوه تاثیر اعلان عمومی در دانش توزیع شده در یک گروه است در فصل ۴ پاسخ می‌دهیم. در فصل‌های قبل از آن مقدماتی را فراهم می‌سازیم تا بتوان مدلی برای این مثال بدست آورد و سپس آن را درستیابی کرد. همچنان که در مثال بالا دیدید بعد از اعلان عمومی که خبرنگار انجام داد دیگر کاراگاه قادر به نتیجه گرفتن بی‌گناهی همسر لیلا نبود در واقع در مدل جدید دانش که در اثر اعلان عمومی بدست آمده حالتی که می‌توانست بی‌گناهی را ثابت کند از بین رفته است.

۱.۱ زبان و گرامر منطق شناختی

اسد، بهمن و کامران سه پسر بچه باهوش با قدرت استدلال فوق‌العاده هستند. آنها برای بازی به باغچه می‌روند و گل بازی می‌کنند. وقتی به درون خانه می‌آیند، پیشانی اسد و بهمن گلی است. چون هیچ کس نمی‌تواند پیشانی خود را ببیند، پس نمی‌داند پیشانی اش گلی هست یا نه؟ پدرآنها را می‌بیند و می‌گوید: حداقل پیشانی یکی از شما گلی است. بعد از آن می‌گوید: هر کس که میداند پیشانی‌اش گلی است یک قدم به جلو آید. هیچ یک از پسرها جلو نمی‌آیند. پدر دوباره می‌گوید: هر کس که می‌داند پیشانی‌اش گلی است یک قدم به جلو آید. در این لحظه اسد و بهمن هر دو یک قدم به جلو می‌آیند.

دلیل گام برداشتن اسد و بهمن به جلو تغییر دانش و شناخت آنها نسبت به دانش افراد اطرافشان بوده است. برای بررسی مسائلی از این قبیل منطقی با نام منطق شناختی پویا[۱۳] وجود دارد که به استدلال درباره دانش افراد در یک گروه یا تعدادی عامل در یک سیستم چند عاملی و تغییرات این دانش‌ها می‌پردازد. در این فصل به معرفی منطق شناختی می‌پردازیم. در فصل ۲ منطق شناختی پویا را معرفی خواهیم کرد.

فرض می‌کنیم P یک مجموعه شمارا از گزاره‌های اتمی و A یک مجموعه متناهی از عامل‌ها باشد. معمولا گزاره‌های اتمی را با $p,\ q,\cdots$ و عامل‌ها را با $a,\ b,\ c,\cdots$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۲.۱.۱ زبان L_K، زبانی برای منطق شناختی چند عاملی است که به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\varphi ::= \ p \mid \neg\varphi \mid (\varphi\wedge\varphi) \mid K_a\varphi$$

فرمول $K_a\varphi$ را این گونه می‌خوانیم : "عامل a، φ را می‌داند."

برای نمونه عبارت‌های زیر فرمول هستند.(خلاصه نویسی‌های معمول حذف شده است.)

$$p\wedge K_ap\wedge(\neg K_aK_ap\wedge\neg q)$$

$$\neg K_a(p\wedge q)$$

[۱۳] Dynamic Epistemic Logic

$$\neg(\neg p \wedge \neg K_a(p \wedge \neg q))$$

توجه کنید که عملگرهای $\rightarrow$ و $\vee$ توسط $\neg$ و $\wedge$ قابل تعریف هستند.

عبارت "عامل a فرمول $\neg\varphi$ را نمی‌داند" $(\neg K_a \neg\varphi)$ به شکلهای مختلفی تعبیر می‌شود مثلا می‌توان گفت "φ با دانش a سازگار است" یا این که "عامل a فکر می‌کند که ممکن است φ درست باشد".

قرارداد می‌کنیم

$$\hat{K}_a\varphi = \neg K_a \neg\varphi$$

فرض کنید B گروهی از عامل‌ها باشد $(B \subseteq A)$ عبارت "هر عامل در B درستی φ را می‌داند" را با $E_B\varphi$ نشان می‌دهیم که به صورت عطف دانایی عامل‌های B در مورد φ است، یعنی

$$E_B\varphi = \bigwedge_{b\in B} K_a\varphi$$

همانطور که $\hat{K}$ را تعریف کردیم، قرار می‌دهیم $\hat{E}_B\varphi = \neg E \neg\varphi$ اما

$$\hat{E}_B\varphi = \neg E \neg\varphi = \bigvee_{b\in B} \neg K_b \neg\varphi = \bigvee_{b\in B} \hat{K}_b\varphi$$

بنابراین $\hat{E}_B\varphi$ این گونه تعبیر می‌شود که حداقل یک نفر در گروه B، φ را ممکن می‌داند.

فرض کنید X یک عملگر مدلی مانند K و E باشد در این صورت $X^{0}\varphi$ همان φ و $X^{n+1}\varphi$ همان $X^n X\varphi$ است. برای نمونه $E_A^{2}\varphi$ به این معنی است که هر کس می‌داند که هر کس φ را می‌داند.

به مثال زیر توجه کنید.

مثال ۳.۱.۱ اسد و بهمن روبه‌روی هم نشسته‌اند. هر یک از آنها عددی را بالای سر دیگری می‌بیند. دو عدد طبیعی و پشت سر هم هستند، آنها هر دو این را می‌دانند و هر دو می‌دانند که هر دو این را می‌دانند وبه همین ترتیب. فرض کنید برای هر $n \in N$، a_n و b_n به ترتیب نمادهایی برای گزاره‌های اتمی "عدد بالای سر اسد برابر n است" و "عدد بالای سر بهمن برابر n است" باشند.

فرض کنید حالت واقعی $a_3 \wedge b_2$ است. گزاره‌های زیر صادق هستند.

$K_a b_2$

اسد می‌تواند عدد بالای سر بهمن را ببیند.

$K_a(a_1 \vee a_3)$

اسد می‌داند که عدد بهمن ۲ است، پس عدد او ۱ یا ۳ است.

$K_a K_b(b_0 \vee b_2 \vee b_4)$

اسد می‌داند که عددش ۱ است یا ۳، پس بهمن یکی از این دو عدد را می‌بیند و لذا می‌داند که عددش ۰ یا ۲ یا ۴ است.

$K_a K_b K_a(b_0 \vee b_2 \vee b_4)$

اسد می‌داند که بهمن می‌داند که عددش ۰ یا ۲ یا ۴ است. بهمن می‌داند که اسد عدد او را می‌داند و اسد می‌داند که بهمن می‌داند، اسد عدد او را می‌داند. سعی کنید توجیه مشابهی برای صادق بودن $K_b K_a K_b(a_1 \vee a_3 \vee a_5)$ پیدا کنید.

$\hat{K}_a a_1 \wedge \hat{K}_a a_3$

اسد عدد ۲ را می‌بیند، پس فکر می‌کند که ممکن است عدد بالای سر او برابر یک باشد. همچنین a_3 نیز با دانش او سازگار است.

$E_{a,b} \neg a_5 \wedge \neg E_{a,b} E_{a,b} \neg a_5$

اسد و بهمن هر دو می‌دانند که ۵ بالای سر اسد نیست، اما چنین نیست که هر کس بداند که هر کس می‌داند که بالای سر اسد ۵ نیست، زیرا فرمول $\hat{K}_b \hat{K}_a a_5$ صادق است و بهمن فکر می‌کند که ممکن است عدد اسد ۳ وعدد خودش ۴ باشد. در این حالت اسد فکر می‌کند که ممکن است عدد بالای سرش ۵ باشد.

۲.۱ معناشناسی منطق شناختی

در این بخش مدل‌های کریپکی منطق شناختی را معرفی می‌کنیم.

تعریف ۴.۲.۱ فرض کنید P مجموعه‌ای شمارا از گزاره‌های اتمی و A مجموعه‌ای متناهی از عامل‌ها باشد. یک مدل کریپکی[۱۴] ساختاری مانند $M = (S, R^A, V^P)$ است که

S مجموعه‌ای از حالت‌ها (جهان‌های ممکن) است. معمولاً S را دامنه M می‌نامند.

R^A تابعی است که به هر عامل $a \in A$، یک رابطه مانند $R^A(a) \subseteq S \times S$ نسبت می‌دهد. برای سادگی به جای $R^A(a)$ می‌نویسیم R_a.

$V^P : P \longrightarrow 2^S$ تابعی است که به هر $p \in P$، مجموعه $V^P(p) \subseteq S$ را نسبت می‌دهد.

اگر A و P ثابت باشند آنگاه می‌نویسیم $M = (S, R, V)$.

اگر رابطه‌های R_a در M هم ارزی باشد، M را یک مدل شناختی می‌نامیم، در این حالت به جای R_a از علامت $\sim_a$ استفاده می‌کنند و M را به صورت $M = (S, \sim, V)$ نشان می‌دهند، اما چون در فصل ۲، علامت $\sim$ برای عمل های شناختی استفاده می‌شود، ترجیح می‌دهیم از همان نشانه R_a استفاده کنیم.

در معرفی مفهوم صدق دو نکته قابل توجه است. اول آنکه مفهوم صدق از دید یک جهان ممکن تعریف می‌شود و دیگر آنکه تمیز ناپذیری دو حالت برای یک عامل در صدق یک فرمول مؤثر است. در مثال زیر به توضیح مفاهیم جهان‌های ممکن و تمیز ناپذیری می‌پردازیم.

مثال ۵.۲.۱ اسد به لاهیجان رفته او از وضعیت آب و هوایی این شهر با خبر است اما از گرگان خبری ندارد. فرض کنید g گزاره اتمی "هوا در گرگان آفتابی است" و l گزاره اتمی "هوا در لاهیجان آفتابی است" باشد. ۴ حالت در مورد وضعیت هوایی این دو شهر ممکن است، که توسط فرمول‌های زیر مشخص می‌شوند:

$$\neg g \wedge \neg l \ , \ g \wedge \neg l \ , \ \neg g \wedge l \ , \ g \wedge l$$

---

[۱۴] Kripke

اسد از وضعیت آب و هوای گرگان اطلاعی ندارد و به این دلیل نمی‌تواند دو حالت $\neg g \wedge l$ و $g \wedge l$ را از هم تمیز دهد. او همچنین جهان‌های ممکن $\neg g \wedge \neg l$ و $g \wedge \neg l$ را یکی تصور می‌کند.

مدل M که در ادامه آمده مُعرف این سیستم چند عاملی است.

$$M = (S, R, V)$$

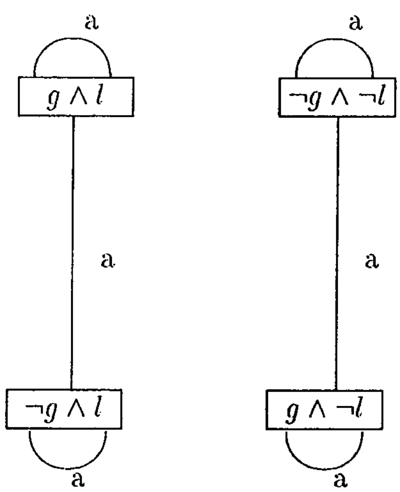
$$S = \{(g \wedge l), (g \wedge \neg l), (\neg g \wedge l), (\neg g \wedge \neg l)\}$$

$$R_a = \{((g \wedge l), (\neg g \wedge l)), ((g \wedge \neg l), (\neg g \wedge \neg l)), ((g \wedge l), (g \wedge l))$$
$$, ((\neg g \wedge l), (\neg g \wedge l)), ((\neg g \wedge \neg l), (\neg g \wedge \neg l)), ((g \wedge \neg l), (g \wedge \neg l))\}$$

$$V(g) = \{(g \wedge l), (g \wedge \neg l)\}$$

$$V(l) = \{(g \wedge l), (\neg g \wedge l)\}$$

اسد نمی‌تواند هر جهان را از خودش تمیز دهد. اهمیت این موضوع را بعد از تعریف صدق خواهیم دید. با اندکی تامل می‌توانید رابطه گراف زیر را با مدل M بیابید.



شکل ۱–۱: گراف مدل دانش اسد

در واقع هر مدل را می‌توان به وسیله یک گراف نشان داد که در آن راسها نشان دهنده جهان‌های ممکن است و یال‌های برچسب دار روابط را تعیین می‌کنند.

مفهوم صدق را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

تعریف ۱.۲.۶ فرض کنید $M = (S, R, V)$ یک مدل کریپکی باشد. زوج (M, s) را یک جهان نقطه‌ای (جهان ممکن) می‌نامیم ($s \in S$). گوییم فرمول φ در جهان ممکن (M, s) صادق (راست)

است و آن را به صورت $M,s \models \varphi$ نشان می‌دهیم اگر

$$M,s \models p \quad \text{iff} \quad s \in V(p)$$

$$M,s \models (\varphi \wedge \psi) \quad \text{iff} \quad M,s \models \varphi \text{ and } M,s \models \psi$$

$$M,s \models \neg\varphi \quad \text{iff} \quad \text{not } M,s \models \varphi$$

$$M,s \models K_a\varphi \quad \text{iff} \quad \text{for all } t \text{ such that } R_a st,\ M,t \models \varphi$$

اگر به ازای هر $s \in S = D(M)$، $M,s \models \varphi$ گوییم φ در M معتبر است و آن را با $M \models \varphi$ نشان می‌دهیم. اگر برای هر مدل کریپکی M، $M \models \varphi$ آنگاه φ معتبر است. مجموعه تمام مدل‌های کریپکی را با $\mathcal{K}$ نشان می‌دهیم. اگر φ معتبر باشد می‌نویسیم $\mathcal{K} \models \varphi$.

$M \not\models \varphi$ به این معناست که جهانی مانند $s \in D(m)$ وجود دارد که $M,s \not\models \varphi$. اگر برای فرمول φ جهانی مانند (M,s) وجود داشته باشد که $M,s \models \varphi$ گوییم φ در M ارضا می‌شود.

نکته قابل توجه در تعریف دانایی آن است که عامل a زمانی فرمولی مانند φ را در جهان (M,s) می‌داند که در هر جهانی که a نمی‌تواند آن را از (M,s) تمیز دهد φ برقرار باشد.

در مثال قبل گفتیم که اسد نمی‌تواند یک جهان را از خودش تمییز دهد. اگر عاملی بتواند جهانی را از خود آن جهان تمیز دهد، چه می‌شود؟

برای پاسخ به این سوال فرض کنید، مدلی داریم که یک راس تنها و بی‌طوقه دارد. فرض کنید s این راس و a یک عامل دلخواه باشد. بنابه تعریف دانایی در تعریف صدق

$$\forall p \in P \quad M,s \models K_a p$$

زیرا

$$\nexists t \quad R_a st,\ M,t \not\models p$$

همچنین

$$\forall p \in P \quad M,s \models K_a \neg p$$

زیرا

$$\nexists t \quad R_a st,\ M,t \models p$$

یعنی دانایی عامل a در جهان (M,s) تناقض دارد که غیر ممکن است.

مثال ۷.۲.۱ فرض کنید در مثال اعداد پشت سر هم، عدد بالای سر اسد ۳ و عدد بالای سر بهمن ۲ باشد. فرض کنید M مدلی باشد که این سیستم را توصیف می‌کند، M به صورت زیر است:

$M = (S, R, V)$

$S = \{(i,j) | ۰ \leq i \; ۱ \leq j \; , \; i = j - ۱\} \cup \{(i,j) | ۱ \leq i \; ۰ \leq j \; , \; j = i - ۱\},$

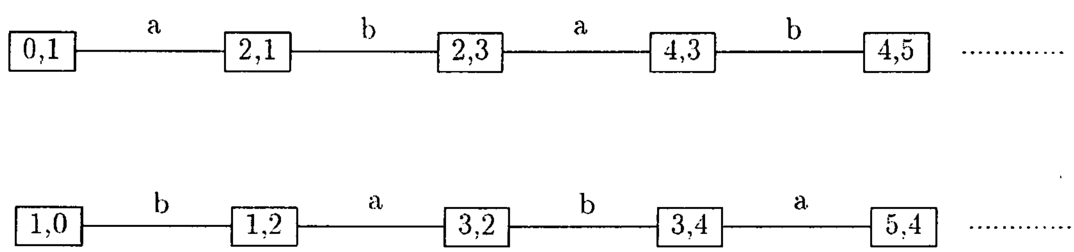
$R_a(i_۱, j_۱)(i_۲, j_۲) \;\text{ iff }\; j_۱ = j_۲ \text{ and } (|i_۱ - i_۲| = ۲ \; or \; ۰),$

$R_b(i_۱, j_۱)(i_۲, j_۲) \;\text{ iff }\; i_۱ = i_۲ \text{ and } (|j_۱ - j_۲| = ۲ \; or \; ۰),$

$V(a_i) = \{(i, i + ۱), (i, i - ۱)\},$

$V(b_i) = \{(i + ۱, i), (i - ۱, i)\}$

شکل گرافی مدل M به صورت زیر است



شکل ۱—۲: گراف مدل دانش اعداد پشت سرهم

طوقه‌ها را برای راحتی رسم نکرده‌ایم.

گزاره ۸.۲.۱ فرض کنید φ و ψ فرمول‌هایی در L_K باشند و $a \in A$. فرض کنید $\mathcal{K}$ مجموعه تمام مدل‌های کریپکی و S_5 مجموعه تمام مدل‌های شناختی باشد. روابط زیر برقرار است.

$\mathcal{K} \models K_a\varphi \wedge K_a(\varphi \to \psi) \longrightarrow K_a\psi \; (i)$

$\mathcal{K} \models \varphi \Longrightarrow \models K_a\varphi \; (ii)$

$\mathcal{K} \models \varphi \to \psi \Longrightarrow \models K_a\varphi \to K_a\psi \; (iii)$

$\mathcal{K} \models \varphi \leftrightarrow \psi \Longrightarrow \models K_a\varphi \leftrightarrow K_a\psi \; (iv)$