دانشکده علوم پایه

« گروه ریاضی »

پایان‌نامه کارشناسی‌ارشد ریاضی

عنوان

پایداری مشتقها روی جبرهای باناخ و C^*- جبرهای یکدار

نگارنده

نجمه کریمی پور سامانی

استاد راهنما

دکتر مجید اسحقی گرجی

استاد مشاور

دکتر رضا معمارباشی

آبان ۱۳۸۹

به نام خداوند لوح و قلم

قدردانی

تقدیم به :

روح پدرم

و

دستان پر مهر مادرم

و

همسر عزیزم

چکیده

هدف اصلی در این پایان نامه پرداختن به پایداری[۱] مشتق ها[۲] روی C^* – جبرها و جبر های باناخ است که در این مورد از مقالات

[1.C. Park And J. M. Rassias,"Stability of the Jensen -Type Function Equation in C^* - Algebras:A Fixed Point Approaxh",vol.2009,Article ID360432,17page.]

[2.J. H. Bae And W. G. Park,"Approximate Bi-Homomorphism and Bi-Derivation in C^* - Ternary Algebras," Bull.Korean Math.Soc.47(2010),No.1,pp.195.]

[3. C. Park and TH. M. Rassias, "Isomorphism In Unital C^*- Algebras", Int. J. Nonlinear Anal. Appl. 1(2010) No.2, 1-10.]

استفاده شده است . به علاوه مقالات زیر از این پایان نامه استخراج شده اند که هر دو در حال داوری می باشند

[1.M. Eshaghi Gordji and N. Karimipour Samani,Approximation of Jordan homomorphisms between Jordan Banach algebras].

[2.M. Eshaghi Gordji and N. Karimipour Samani,Approximation of Jordan homomorphisms in C^* - Algebras:A Fixed Point Approach].

واژه‌های کلیدی: معادلات تابعی ینسن[۳]، C^* – مشتق های سه تایی، C^* – همریختی های سه تایی، دو همریختی [۴]،دو مشتق [۵]، ضرب ژردن [۶]، همریختی ژردن [۷]، جبر باناخ، C^* – جبر، جبر باناخ ژردن، روش نقطه ثابت ،یکریختی C^* – جبرها.

---

[۱] Stability
[۲] Derivation
[۳] Jensen
[۴] Bi-Homomorphism
[۵] Bi-Derivation
[۶] Jordan Product
[۷] Jordan homomorphism

پیشگفتار

در سال ۱۹۴۰، اولام[۸] [۴۸] اولین بار مسئله‌ی پایداری معادلات تابعی را به صورت زیر مطرح کرد:

« تحت چه شرایطی می توان یک تابع تقریباً جمعی را به یک تابع جمعی نزدیک کرد؟ »

یک سال بعد مسئله اولام توسط هایرز[۹] [۲۲] برای فضاهای باناخ بصورت زیر حل شد:

اگر X و Y فضاهای باناخ و $\varepsilon, \delta > ۰$ و تابع $f : X \to Y$ در نامعادله

$$\|f(x+y) - f(x) - f(y)\| \leq \delta$$

برای هر $x, y \in X$ صدق کند، آنگاه حد $A(x) = \lim_{n\to\infty} ۲^{-n} f(۲^n x)$ برای هر $x \in X$ وجود دارد و A یک تابع جمعی منحصر بفرد است بطوریکه

$$\|f(x) - A(x)\| \leq \varepsilon$$

برای هر $x \in X$.

در سال ۱۹۵۰، آوکی [۱۰] [۲] قضیه هایرز را برای توابع تقریباً جمعی تعمیم داد و در سال ۱۹۷۸، راسیاس[۱۱] [۴۶] قضیه هایرز را بصورت زیر تعمیم داد :

فرض کنیم $f : X \to Y$ یک تابع از فضای نرمدار X به فضای باناخ Y باشد بطوریکه در

$$\|f(x+y) - f(x) - f(y)\| \leq \varepsilon(\|x\|^p + \|y\|^p)$$

برای هر $x, y \in X$ صدق کند. همچنین ε و p ثابت هایی هستند که $\epsilon > ۰$ و $۰ \leq p < ۱$، آنگاه حد $A(x) = \lim_{n\to\infty} ۲^{-n} f(۲^n x)$ برای هر $x \in X$ وجود دارد و A یک تابع جمعی منحصر بفرد می باشد

---

[۸] Ulam
[۹] Hyers
[۱۰] Aoki
[۱۱] Rassias

که در

$$\|f(x) - A(x)\| \leq k\varepsilon\|x\|^p$$

برای هر $x \in X$ صدق می کند و در آن $k = \frac{۲}{۲-۲^p}$. این مفهوم جدید به پایداری هایرز– اولام– راسیاس معروف است.

بعلاوه، جان راسیاس [۳۹ – ۳۷] به جای تابع کنترل در پایداری هایرز– اولام– راسیاس یعنی $\varepsilon(\|x\|^p + \|y\|^p)$، تابع کنترل $\varepsilon(\|x\|^p\|y\|^p)$ را جایگزین نمود که به پایداری اولام– گاورتا– راسیاس معروف شد.

گاورتا[۱۲] [۱۹] این نتایج را تعمیم داد او به جای تابع کنترل در قضیه کلی هایرز– اولام– راسیاس تابع کنترل $\phi(x,y)$ را جایگزین کرد(برای جزییات بیشتر[۴۵ ,۴۲ – ۴۰ ,۲۴ ,۲۱ ,۲۰ ,۱۸ ,۵] را ببینید).

سازماندهی این پایان نامه بصورت زیر است:

فصل اول، نخست تعاریف لازم بیان می شود و سپس مفاهیم و قضایای اولیه پایداری معادلات تابعی که در فصول بعدی نقش بسزایی دارند، بیان می شوند.

درفصل دوم ، پایداری هایرز–اولام را برای همریختی ها ومشتقها روی C^* – جبرها وC^* – جبرهای لی برای معادله تابعی

$$f((x+y)/۲) + f((x-y)/۲) = f(x)$$

که به معادله تابعی ینسن معروف است ثابت می کنیم.

در فصل سوم، نیز پایداری هایرز–اولام برای دو همریختی ها و دو مشتق ها بین C^* – جبر های سه تایی برای معادله تابعی زیر را ثابت می کنیم:

$$f(x+y, z-w) + f(x-y, z+w) = ۲f(x,z) - ۲f(y,w)$$

اسحاقی [۱۳]، خدایی[۱۴]، سعادتی[۱۵] و صادقی[۱۶] در مقاله خود [۱۳] پایداری هایرز–اولام–راسیاس را

---

[۱۲] Gavruta
[۱۳] Eshaghi
[۱۴] Khodaei
[۱۵] Saadati
[۱۶] Sadeghi

برای معادله تابعی زیر درفضای نرمدار تصادفی ثابت کردند:

$$D_f(x_1, ..., x_n) = \sum_{k=2}^{n} (\sum_{i_1=2}^{k} \sum_{i_2=i_1+1}^{k+1} \cdots \sum_{i_{n-k+1}=i_{n-k}+1}^{n}) f(\sum_{i=1, i\neq i_1,...,i_{n-k+1}}^{n} x_i - \sum_{r=1}^{n-k+1} x_{i_r})$$
$$+f(\sum_{i=1}^{n} x_i) - 2^{n-1} f(x_1) = 0 \qquad (0.1)$$

(n عدد صحیح بزرگتر یا مساوی ۲ است)

که مادر فصل چهارم پایداری هایرز—اولام—راسیاس را برای همریختی های ژردن بااین معادله تابعی روی جبرهای باناخ ژردن ثابت می کنیم.

در فصل پنجم پایداری هایرز—اولام—راسیاس را برای همریختی های ژردن سه تایی با معادله تابعی فوق بر روی C^* — جبر های سه تایی و به روش نقطه ثابت اثبات می کنیم.

و در نهایت در فصل آخر یکریختی ها روی C^* — جبر های یکدار را بررسی می کنیم.

فهرست مندرجات

۱ مفاهیم اولیه ۱۲

۱.۱ تعاریف اولیه ۱۳

۲.۱ قضایای مقدماتی پایداری معادلات تابعی ۲۱

۲ پایداری همریختی ها ومشتق ها روی C^* − جبرها و C^* − جبرهای لی ۲۵

۱.۲ مقدمه ۲۵

۲.۲ پایداری همریختی ها روی C^* − جبرها ۲۶

۳.۲ پایداری مشتق ها روی C^* − جبرها ۳۸

۴.۲ پایداری همریختی ها روی C^*− جبرهای لی ۴۰

۵.۲ پایداری مشتق ها روی C^*− جبرهای لی ۴۲

۳ پایداری دو همریختی ها و دو مشتق ها بین C^* − جبر های سه تایی ۴۴

۱.۳ مقدمه ۴۴

۲.۳ پایداری دو همریختی ها بین C^* − جبر های سه تایی ۴۵

۳.۳ پایداری دو مشتق ها و دو یکریختی ها بین C^* − جبر های سه تایی ۵۴

۴ پایداری همریختی های ژردن روی جبرهای باناخ ژردن ۵۸

۱.۴ پایداری همریختی های ژردن روی جبرهای باناخ ژردن ۵۸

۵ پایداری همریختی های ژردن روی C^* − جبرهای سه تایی ۶۶

۱.۵ پایداری همریختی های ژردن روی C^* − جبرهای سه تایی ۶۶

۶ یکریختی ها روی C^* − جبرهای یکدار ۷۲

۱.٦ مقدمه ۷۲

۲.٦ C^* – یکریختی ها روی C^* – جبرهای یکدار ۷۳

۳.٦ قضیه ماژور – اولام در مدولهای روی C^* – جبرها ۸۱

کتاب نامه ۸۴

واژه نامه ۹۰

فصل ۱

مفاهیم اولیه

در این فصل بر آن شدیم تا خلاصه ای از تعاریف و قضایای اساسی در مورد جبرهای باناخ و همچنین پایداری معادلات تابعی که در فصول بعدی مورد نیاز است را بگنجانیم .

۱.۱ تعاریف اولیه

تعریف ۱.۱.۱ فضای برداری A روی میدان اسکالر $\mathbb{F}$ را نرمدار گوییم، هر گاه نگاشت $\|.\| : A \to \mathbb{R}$ موجود باشد به طوری که برای هر $x, y \in A$ و هر اسکالرλ، سه خاصیت زیر برقرار باشد:

۱) $\|x\| \geq 0$ و $\|x\| = 0$ اگر و فقط اگر $x = 0$؛

۲) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$؛

۳) $\|\lambda x\| =|\lambda|\, \|x\|$.

دراین صورت زوج $(A, \|.\|)$ را فضای نرمدار می‌نامیم. با قرار دادن $d(x, y) = \|x - y\|$ فضای نرمدار A به یک فضای متریک با متر d تبدیل می‌شود. این متر را متر تعریف شده توسط نرم می‌نامیم.

تعریف ۲.۱.۱ زوج $(A, \|.\|)$ کامل است ، اگر فضای متریک (A, d) با متر d کامل باشد.

تعریف ۳.۱.۱ فضای برداری نرمدار کامل را فضای باناخ[1] گوییم.

تعریف ۴.۱.۱ فرض کنیم A یک مجموعهٔ دلخواه باشد دراینصورت تابع $d : A \times A \to [0, \infty]$ را متریک توسعه یافته گوییم روی A هرگاه در شرایط زیر صدق کند:

۱) برای هر $x, y \in A$، $d(x, y) = 0$ اگر و فقط اگر $x = y$؛

۲) برای هر $x, y \in A$، $d(x, y) = d(y, x)$؛

۳) برای هر $x, y, z \in A$، $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

---
[1] Banach

تذکر ۵.۱.۱ متریک توسعه یافته با متریک معمولی متفاوت است زیرا، برد آن شامل بینهایت نیز می باشد.

تعریف ۶.۱.۱ فرض کنیم (A,d) یک فضای متریک توسعه یافته و $L \geq 0$ ثابت باشد. تابع $T: A \to A$ در شرط لیپشیتز[۲]، با ثابت لیپشیتز L صدق می کند هر گاه برای هر $x,y \in X$، داشته باشیم

$$d(Tx,Ty) \leq Ld(x,y).$$

تذکر ۷.۱.۱ تابع T را یک تابع انقباضی گوییم هرگاه در شرط لیپشیتز صدق کند. بعلاوه اگر ثابت لیپشیتز کمتر از ۱ باشد آنگاه تابع T، یک تابع انقباضی اکید نامیده می شود.

تذکر ۸.۱.۱ در این بخش منظور از $\mathbb{F}$ همان $\mathbb{R}$ یا $\mathbb{C}$ می باشد مگر آنکه یکی از آنها تاکید گردد.

تعریف ۹.۱.۱ فضای برداری A روی میدان اسکالر $\mathbb{F}$ را یک جبر گوییم ، هر گاه نگاشت $\pi : (x,y) \mapsto xy$ از $A \times A$ به توی A وجود داشته باشد به طوری که برای هر $x,y,z \in A$ و هر $\alpha \in F$ داشته باشیم:

۱) $x(yz) = (xy)z$ ،

۲) $(x+y)z = xz + yz, x(y+z) = xy + xz$ و

۳) $(\alpha x)y = \alpha(xy) = x(\alpha y)$.

---

[۲] Lipshitz

تعریف ۱۰.۱.۱ جبر A را تعویض پذیر گوییم ، هر گاه برای هر $x, y \in A$ داشته باشیم: $xy = yx$.

تعریف ۱۱.۱.۱ جبر A روی میدان $\mathbb{F}$ را یک جبر نرمدار گوییم ، هر گاه A بعنوان یک فضای برداری نرمدار با نرم $\|.\|$ باشد و این نرم در شرط زیر صدق کند:

$$\|xy\| \leq \|x\|\|y\| \qquad (x, y \in A).$$

تعریف ۱۲.۱.۱ جبر نرمدار A روی میدان $\mathbb{F}$ را یک جبر باناخ گوییم ، هر گاه A فضای باناخ باشد.

تعریف ۱۳.۱.۱ اگر جبر A شامل عنصری مانند e باشد که به ازای هر $x \in A$ داشته باشیم $xe = ex = x$ ، آنگاه A را یک جبر یکدار و e را عضو یکه A می نامیم.

تعریف ۱۴.۱.۱ فرض کنیم A,B دو جبر با میدان اسکالر یکسان $\mathbb{F}$ باشند. در این صورت یک همریختی جبری از A به توی B ، نگاشت خطی و پیوسته ی ϕ است به طوری که:

$$\phi(xy) = \phi(x)\phi(y), \qquad (x, y \in A)$$

تذکر ۱۵.۱.۱ اگر $B = \mathbb{F} = \mathbb{C}$ و $\phi \neq 0$، آنگاه ϕ را همریختی مختلط روی A می نامیم.

تعریف ۱۶.۱.۱ یک برگشت روی A عبارت است از نگاشت $* : A \to A$ ، به طوری که به ازای هر $a, b \in A$ و $\lambda \in \mathbb{F}$ خواص زیر را داشته باشد:

۱) $(a+b)^* = a^* b^*$ ،

۲) $(\lambda a)^* = \bar{\lambda} a^*$ ،

۳) $(ab)^* = b^* a^*$ و

۴) $a^{**} = a$.

تعریف ۱۷.۱.۱ جبر A به انضمام برگشت $*$ را یک $*$ − جبر می نامیم.

تعریف ۱۸.۱.۱ یک $*$ − جبر نرمدار، یک جبر نرمدار با عمل برگشت $x \mapsto x^*$ است ، به گونه ای که برای هر$x \in A$ ،

$$\|x\| = \|x^*\|,$$

به علاوه اگر A کامل باشد، آنگاه A را یک $*$ − جبر باناخ یا B^* − جبر گوییم.

تعریف ۱۹.۱.۱ B^* − جبر A را C^* − جبر گوییم، هر گاه به ازای هر $a \in A$ ،

$$\|aa^*\| = \|a\|^2.$$

تعریف ۲۰.۱.۱ فرض کنیم A و B دو C^* − جبر باشند در این صورت نگاشت $\mathbb{C}$ − خطی $H : A \to B$ را C^* − همریختی گوییم هر گاه:

$$H(xy) = H(x)H(y), \qquad (x, y \in A)$$

و

$$H(x^*) = H(x)^* \qquad (x \in A).$$

تعریف ۲۱.۱.۱ فرض کنیم A یک C^*- جبر باشد، عملگر خطی و کراندار $\sigma: A \to A$ را یک مشتق گوییم هر گاه به ازای هر $a, b \in A$ داشته باشیم:

$$\sigma(ab) = a\sigma(b) + \sigma(a)b.$$

تعریف ۲۲.۱.۱ اگر A یک C^*- جبر باشد به ازای هر $x, y \in A$ ، ضرب تعریف شده در زیر را ضرب لی گوییم:

$$[x, y] = \frac{۱}{۲}(xy - yx)$$

و در این صورت A با ضرب فوق را یک C^*- جبر لی می نامیم.

تعریف ۲۳.۱.۱ فرض کنیم A و B دو C^*- جبر لی باشند در این صورت نگاشت $\mathbb{C}-$ خطی $H: A \to B$ را C^*- همریختی لی گوییم هر گاه:

$$H([x, y]) = [H(x), H(y)] \qquad (x, y \in A).$$

تعریف ۲۴.۱.۱ فرض کنیم A ، C^*- جبر لی باشد در این صورت نگاشت $\mathbb{C}-$ خطی $\sigma: A \to A$ را مشتق لی گوییم هر گاه:

$$\sigma([x, y]) = [\sigma(x), y] + [x, \sigma(y)] \qquad (x, y \in A).$$

تعریف ۲۵.۱.۱ فضای باناخ مختلط A را C^*- جبر سه تایی می نامیم اگر نگاشت ضربی $A^۳ \to A$ موجود باشد که $(x, y, z) \mapsto [x, y, z]$ و در شرایط زیر صدق کند:

۱) در متغیرهای بیرونی $\mathbb{C}$ $-$ خطی باشد ،

۲) در متغیرهای میانی $\mathbb{C}$ $-$ خطی مزدوج باشد ،

۳) شرکت پذیر باشد ، یعنی برای هر $x, y, z, v, w \in A$ داشته باشیم:

$$[x, y, [z, w, v]] = [x, [y, z, w], v] = [[x, y, z], w, v],$$

۴) برای هر $x, y, z \in A$ ،

$$\|[x, y, z]\| \leq \|x\|\|y\|\|z\|,$$

۵) برای هر $x \in A$ ،

$$\|[x, x, x]\| = \|x\|^{۳}.$$

تعریف ۲٦.۱.۱ اگر C^* $-$ جبر سه تایی A شامل عنصری مانند e باشد که به ازای هر $x \in A$ داشته باشیم $x = [x, e, e] = [e, e, x]$ ، آنگاه A را یک C^* $-$ جبر سه تایی یکدار و e را عضو یکه A می نامیم.

تعریف ۲۷.۱.۱ فرض کنیم A و B ، C^* $-$ جبرهای سه تایی باشند .در این صورت نگاشت $H : A \to B$ را C^* $-$ همریختی سه تایی می نامیم ، اگر برای هر $x, y, z \in A$ داشته باشیم:

$$H([x, y, z]) = [H(x), H(y), H(z)].$$

تعریف ۲۸.۱.۱ فرض کنیم A، C^* − جبر سه تایی باشد .در این صورت نگاشت $\mathbb{C}$ − خطی $\sigma : A \to A$ را C^* − مشتق سه تایی می نامیم ، اگر برای هر $x, y, z \in A$ داشته باشیم:

$$\sigma([x, y, z]) = [\sigma(x), y, z] + [x, \sigma(y), z] + [x, y, \sigma(z)].$$

تعریف ۲۹.۱.۱ فرض کنیم A و B، C^* − جبرهای سه تایی باشند .در این صورت نگاشت $\mathbb{C}$ −دو خطی $H : A \times A \to B$ را C^* − دو همریختی سه تایی می نامیم ، اگر برای هر $x, y, z, w \in A$ داشته باشیم:

$$H([x, y, z], w) = [H(x, w), H(y, w), H(z, w)]$$

و

$$H(x, [y, z, w]) = [H(x, y), H(x, z), H(x, w)].$$

[برای کسب اطلاعات بیشتر [۴] را ببینید]

تعریف ۳۰.۱.۱ اگر نگاشت H در تعریف ۲۹.۱.۱ دو سویی باشد ، آنگاه $H : A \times A \to B$ را C^* − دو یکریختی سه تایی می نامیم.

تعریف ۳۱.۱.۱ فرض کنیم A، C^* − جبر سه تایی باشد .در این صورت نگاشت $\mathbb{C}$ − دوخطی $\sigma : A \times A \to A$ را C^* − دو مشتق سه تایی می نامیم ، اگر برای هر $x, y, z, w \in A$ داشته باشیم:

$$\sigma([x, y, z], w) = [\sigma(x, w), y, z] + [x, \sigma(y, w), z] + [x, y, \sigma(z, w)]$$

و

$$\sigma(x, [y, z, w]) = [\sigma(x, y), z, w] + [y, \sigma(x, z), w] + [y, z, \sigma(x, w)].$$

[برای کسب اطلاعات بیشتر [۴] را ببینید]

تعریف ۳۲.۱.۱ اگر A یک جبر باناخ باشد به ازای هر $x, y \in A$ ، ضرب تعریف شده در زیر را ضرب ژردن گوییم:

$$x \circ y = \frac{۱}{۲}(xy + yx)$$

و در این صورت A را با این ضرب جبر باناخ ژردن می نامیم.

تعریف ۳۳.۱.۱ فرض کنیم A و B دو جبرباناخ ژردن با میدان اسکالر یکسان $\mathbb{F}$ باشند. در این صورت نگاشت خطی و پیوسته ی $H : A \to B$ را همریختی ژردن گوییم هر گاه:

$$H(x \circ y) = H(x) \circ H(y), \qquad (x, y \in A).$$

تعریف ۳۴.۱.۱ فرض کنیم A و B، C^* − جبرهای سه تایی باشند .در این صورت نگاشت $H : A \to B$ را C^* − همریختی ژردن سه تایی می نامیم ، اگر برای هر $x \in A$ داشته باشیم:

$$H([x, x, x]) = [H(x), H(x), H(x)].$$

[برای کسب اطلاعات بیشتر [۴] را ببینید]