بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه آزاد اسلامی

واحد تهران مرکزی

دانشکده علوم پایه، گروه فیزیک

پایان‌نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد (M.Sc)

گرایش : ذرات بنیادی و نظریه میدان‌ها

عنوان:

حل معادله دیراک با روش ابرتقارن

استاد راهنما:

دکتر حسین مهربان

استاد مشاور:

دکتر محمدرضا تنهایی

پژوهشگر:

سحر اربابی مقدم

زمستان ۱۳۹۱

تقدیم به

پدر و مادر عزیزم

آنانکه در تمامی مراحل رشد و بالندگیم

همواره نگران، دلسوز و بهترین پشتیبان من بوده اند.

تشکر و قدردانی

خالصانه‌ترین احترام و سپاس خود را تقدیم می‌دارم به حضور جناب آقای دکتر حسین مهربان، استاد راهنمای پایان‌نامه که از محضرشان فراوان درس زندگی آموختم و راهنمائی‌های ارزنده ایشان که همواره راهگشا و مشوق من در مسیر تحقیق و پژوهش بوده و در آینده نیز خواهد بود.

بعلاوه مایلم مراتب تشکر و امتنان خود را از جناب آقای دکتر محمدرضا تنهایی، استاد مشاور پایان‌نامه و آقای مهدی عشقی که افتخار شاگردی ایشان نصیب من شده است، اعلام داشته و توفیق روزافزون یکایک ایشان را از درگاه خداوند متعال مسئلت نمایم.

تعهد نامه اصالت پایان نامه کارشناسی ارشد

اینجانب **سحر اربابی مقدم** دانشجوی مقطع کارشناسی ارشد نا پیوسته به شماره دانشجویی **۸۹۰۶۶۸۱۳۰۰۰** در رشته **فیزیک-ذرات بنیادی و نظریه میدانها** اعلام می‌نمایم که کلیه مطالب مندرج در این پایان‌نامه با عنوان **حل معادله دیراک با استفاده از روش ابرتقارن** حاصل کار پژوهشی خود بوده و چنانچه دستاوردهای پژوهشی دیگران را مورد استفاده قرار داده باشم، طبق ضوابط و رویه‌های جاری، آن را ارجاع داده و در فهرست منابع و مآخذ ذکر نموده‌ام. علاوه بر آن تاکید می‌نمایم که این پایان‌نامه قبلاً برای احراز هیچ مدرک هم‌سطح، پائین‌تر و یا بالاتر ارائه نشده و چنانچه در هر زمان خلاف آن ثابت شود، بدینوسیله متعهد می‌شوم، در صورت ابطال مدرک تحصیلی‌ام توسط دانشگاه، بدون کوچکترین اعتراض آن را بپذیرم.

تاریخ و امضاء

بسمه تعالی

در تاریخ : **۱۳۹۱/۱۱/۲۸**

دانشجوی کارشناسی ارشد آقای / خانم **سحر اربابی مقدم** از پایان‌نامه خود دفاع نموده و با نمره **۲۰** بحروف **بیست** و با درجه **عالی** مورد تصویب قرار گرفت.

امضاء استاد راهنما

بسمه تعالی

دانشکده علوم پایه

****

(این چکیده به منظور چاپ در پژوهش‌نامه دانشگاه تهیه شده است)

نام واحد دانشگاهی : تهران مرکزی **کد واحد** : ۱۰۱	**کد شناسایی پایان‌نامه:**۱۰۱۳۰۲۱۹۹۱۱۰۸
عنوان پایان‌نامه : حل معادله دیراک با استفاده از روش ابرتقارن	
نام و نام خانوادگی دانشجو : سحر اربابی مقدم **شماره دانشجویی** : ۸۹۰۶۶۸۱۳۰۰۰ **رشته تحصیلی** : فیزیک-ذرات بنیادی و نظریه میدانها	**تاریخ شروع پایان‌نامه** : ۱۳۹۰/۱۱/۱ **تاریخ اتمام پایان‌نامه** : ۱۳۹۱/۱۱/۲۸
استاد / استادان راهنما : دکتر حسین مهربان **استاد / استادان راهنما** : دکتر محمدرضا تنهایی	
آدرس و شماره تلفن : تهران، تهرانپارس، فلکه چهارم، شهرک فرهنگیان، بلوک سی ٦، ورودی ۲، واحد ۲۵ تلفن : ۷۷۳٦۲۳٦٤	

چکیده پایان‌نامه(شامل خلاصه، اهداف، روش‌های اجرا و نتایج بدست آمده) :

در این پژوهش، معادله دیراک برای پتانسیل ویلیامز-پائولیوس که شامل برهمکنش تانسوری شبه کولمبی با عدد کوانتومی اسپین-مدار دلخواه κ است، به صورت تقریبی با استفاده از روش ابرتقارن حل شده است و ویژه مقادیر انرژی و ویژه توابع انرژی را تحت شرایط تقارن شبه اسپین و اسپین بدست آورده شده است. نتایج عددی این پتانسیل با نتایج عددی روش نیکوفوروف-اواروف مقایسه شده است. همچنین پتانسیل نوسانگر شبه هارمونیک حلقه‌ای شکل را به صورت تحلیلی با بکارگیری روش لاپلاس و ابرتقارن حل نموده و ویژه مقادیر و ویژه توابع انرژی آن بدست آورده شده است.

نظر استاد راهنما برای چاپ در پژوهش‌نامه دانشگاه

مناسب است ☐

مناسب نیست ☐

تاریخ و امضاء

فهرست مطالب

عنوان | صفحه

فهرست جدول‌ها

عنوان　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　صفحه

فهرست نمودارها

عنوان | صفحه

حل معادله دیراک با استفاده از روش ابرتقارن

چکیده

در این پژوهش، معادله دیراک برای پتانسیل ویلیامز-پائولیوس، شامل برهمکنش تانسوری شبه کولمبی با عدد کوانتومی اسپین-مدار دلخواه κ، به صورت تقریبی با استفاده از روش ابرتقارن حل شده است و ویژه مقادیر انرژی و ویژه توابع انرژی را تحت شرایط تقارن شبه اسپین و اسپین بدست آورده شده است. نتایج عددی این پتانسیل با نتایج عددی روش نیکوفوروف-اواروف مقایسه شده است. همچنین پتانسیل نوسانگر شبه هارمونیک حلقه‌ای شکل را به صورت تحلیلی با بکارگیری روش لاپلاس و ابرتقارن حل نموده و ویژه مقادیر و ویژه توابع انرژی آن بدست آورده شده است.

فصل اول : مقدمه

۱-۱ مقدمه

در طبیعت ذرات به دو دسته هادرون‌ها و لپتون‌ها تقسیم‌بندی می‌شوند. هادرون‌ها به خودی خود شامل دو دسته به نام‌های بارون‌ها (اسپین غیر صحیح) مثل p، n، Σ، Λ ... و مزون‌ها (با اسپین صحیح) مثل D، B، Π، ρ، ω و ... هستند و دسته دیگر را ذرات بنیادی لپتون‌ها تشکیل می‌دهند. لپتون‌ها واپاشیده نمی‌شوند و شامل e، μ، τ،ν_e، ν_μ و ν_τ هستند. کوارک‌ها نیز که شامل شش ذره u، d، c، s، b، t و شش پاد ذره $\bar{u}$، $\bar{d}$، $\bar{c}$، $\bar{s}$، $\bar{b}$، $\bar{t}$ هستند، در دسته هادرون‌ها نهفته‌اند. به منظور درک بهتر رفتار این ذرات و پی بردن به خواص آنها، به معادلاتی نیاز داریم که رفتارشان را توصیف کنند. بنابراین به سه معادله برای توصیف حالت ذرات با اسپین صفر، نیمه صحیح و صحیح، نیاز داریم که این معادلات به ترتیب عبارتند از معادله کلاین-گوردون، معادله دیراک و معادلات ماکسول و پروکا. در این قسمت به بررسی معادله دیراک می‌پردازیم.

معادله دیراک در ذرات بنیادی، معادله موج نسبیتی است که در سال ۱۹۲۸ توسط فیزیکدان انگلیسی به نام پائول دیراک[1] کشف شد. این معادله رفتار ذرات با اسپین نیمه صحیح مثل الکترون و فرمیون‌ها را توجیه می‌کند و با هر دو اصل مکانیک کوانتومی و نسبیت خاص سازگار می‌باشد. همچنین دیراک به کمک این معادله توانست به تمام جزئیات ریز طیف اتم هیدروژن به طور همه جانبه دست یابد. این معادله، نوع جدیدی از مواد که به آن پاد ذره می‌گویند را آشکار کرد به طوری که در آن زمان هیچ آثاری از وجود آنها در آزمایشگاه‌ها دیده نشده بود [۱]. سه سال بعد از کشف دیراک، اولین پازیترون (پاد ذره) در آزمایشگاه کارل اندرسون[2] مشاهده شد. این امر کافی بود تا فیزیکدانان آن را به پاد ذره و پیشگویی دیراک ربط دهند. بر طبق پیش‌بینی دیراک، پاد ذره جرم سکون و یا در نتیجه انرژی سکون منفی دارد.

برای بدست آوردن معادله دیراک از معادله شرودینگر شروع کرده و آن را بررسی می‌کنیم. سپس به سراغ شکل نسبیتی معادله شرودینگر، یعنی معادله کلاین-گوردن رفته و با بررسی این معادله و با اعمال تغییراتی اندک، معادله دیراک را بدست می‌آوریم. در آخر هم به مقایسه نقاط ضعف و نقاط قوت این سه معادله می‌پردازیم.

[1] Paul Dirac
[2] Carl Anderson

۱-۲ معادلات شرودینگر و کلاین-گوردون

در مکانیک کلاسیک مجموع انرژی جنبشی $\frac{1}{2}mv^2 = \frac{p^2}{2m}$ و انرژی پتانسیل $V(x,y,z)$ برابر با انرژی کل E که مقدار ثابتی است و با رابطه ذیل بیان می‌شود،

$$\frac{\boldsymbol{p}^2}{2m} + V(x,y,z) = E \tag{۱-۱}$$

در مکانیک کوانتومی به جای تکانه، عملگر تکانه و به جای انرژی، عملگر انرژی را قرار می‌دهیم،

$$\boldsymbol{p} \to \frac{\hbar}{i}\boldsymbol{\nabla} \Rightarrow \left(p_x \to \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}\ ,\ p_y \to \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial y}\ , p_z \to \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial z}\right)$$
$$E \to i\hbar\frac{\partial}{\partial t} \tag{۲-۱}$$

معادله (۱-۱) مجموعه‌ای از مشتق‌های زمانی و مکانی است که روی تابع مرجع $\Phi(x,y,z,t)$ اعمال می‌شود،

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\boldsymbol{\nabla}^2 + V\right)\Phi(x,y,z,t) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Phi(x,y,z,t) \tag{۳-۱}$$

این معادله، معادله شرودینگر[۱] در فرم غیر نسبتی است و تابع $\Phi(x,y,z,t)$ ذره‌ای به جرم m را در حضور تابع انرژی پتانسیل معین V، توصیف می‌کند. این معادله را می‌توان به روش جداسازی متغیرها حل کرد، اما نقص‌هایی متوجه این معادله است. اولین نقص این که معامله شرودینگر اسپین را در نظر نمی‌گیرد. در دنیای واقعی ذرات دارای اسپین‌های متفاوتی هستند، به همین علت به معادله جامعی نیاز داریم که ذرات با اسپین غیر صفر را نیز شامل شود. نقص دوم معادله شرودینگر غیرنسبیتی بودن آن است.

در آن زمان شخصی بنام کلاین-گوردون[۲]، شکل نسبیتی معادله شرودینگر را با در نظر گرفتن شکل چاربرداری اندازه حرکت $\boldsymbol{p}^\mu \to i\hbar\frac{\partial}{\partial x^\mu} = i\hbar\partial_\mu$ به صورت

[1] Schrödinger Equation
[2] Klein Gordon

$$p^2 = p^\mu p_\mu = \frac{E^2}{c^2} - \boldsymbol{p}.\boldsymbol{p} = m^2c^2$$

$$E^2 = p^2c^2 + m^2c^4 \;\rightarrow\; p^\mu p_\mu - m^2c^2 = 0 \qquad (۴-۱)$$

در نظر گرفت، با اعمال روابط چاربرداری به شکل ذیل خواهیم داشت،

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \;\rightarrow\; \begin{cases} \partial_0 = \dfrac{\partial}{\partial x^0} = \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial}{\partial t} \\ \boldsymbol{\partial} = \boldsymbol{\nabla} \;\rightarrow (\partial_1 = \dfrac{\partial}{\partial x}, \partial_2 = \dfrac{\partial}{\partial y}, \partial_3 = \dfrac{\partial}{\partial z}) \end{cases} \qquad (۵-۱)$$

$$p^\mu p_\mu - m^2c^2 = 0 \;\rightarrow\; i\hbar\partial_\mu \times i\hbar\partial^\mu - m^2c^2 = 0 \;\rightarrow\; -\hbar^2\partial_\mu\partial^\mu - m^2c^2 = 0$$

تابع موج $\Phi(x,y,z,t)$ را روی آن اثر می‌دهیم،

$$-\hbar^2\partial_\mu\partial^\mu\Phi(x,y,z,t) - m^2c^2\Phi(x,y,z,t) = 0 \qquad (۶-۱)$$

با در نظر گرفتن $\partial_\mu\partial^\mu = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$ معادله کلاین-گوردون به شکل ذیل در می‌آید،

$$-\hbar^2\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \boldsymbol{\nabla}^2\right)\Phi = m^2c^2\Phi \;\rightarrow\; \left(-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} + \boldsymbol{\nabla}^2\right)\Phi = \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\Phi \qquad (۷-۱)$$

همانطور که ملاحظه می‌کنیم، معادله کلاین-گوردون شکل نسبیتی معادله شرودینگر است. پس واضح است معادله-کلاین گوردون شرط نسبیتی بودن را اغنا می‌کند. اگر معادله کلاین-گوردون را با معادله شرودینگر مقایسه کنیم، خواهیم دید این معادله مشتق دوم زمانی و مکانی دارد.

حال به بررسی چگالی احتمال در معادله شرودینگر و کلاین-گوردون می‌پردازیم. برای معادله شرودینگر چگالی احتمال را به صورت

$$\rho = \Phi^*\Phi \qquad (۸-۱)$$

بطوریکه Φ و Φ^* معادله حقیقی و مختلط شرودینگر هستند، نشان می‌دهیم. چگالی جریان کوانتومی j را به شکل

$$j = -\frac{i\hbar}{2m}(\Phi^*\boldsymbol{\nabla}\Phi - \Phi\boldsymbol{\nabla}\Phi^*) \tag{۹-۱}$$

در نظر می‌گیریم. معادله پیوستگی جریان را روی معادله شرودینگر اعمال می‌کنیم،

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}\,.\,\mathbf{j} = \mathbf{0} \tag{۱۰-۱}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}(\Phi^*\Phi) - \frac{i\hbar}{2m}(\Phi^*\boldsymbol{\nabla}^2\Phi - \Phi\boldsymbol{\nabla}^2\Phi^*) = \\
&\Phi^*\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t} - \frac{i\hbar}{2m}\boldsymbol{\nabla}^2\Phi\right) + \Phi\left(\frac{\partial\Phi^*}{\partial t} - \frac{i\hbar}{2m}\boldsymbol{\nabla}^2\Phi^*\right) = \\
&\Phi^*\left(\frac{i\hbar}{2m}\boldsymbol{\nabla}^2\Phi - \frac{i\hbar}{2m}\boldsymbol{\nabla}^2\Phi\right) + \Phi\left(\frac{i\hbar}{2m}\boldsymbol{\nabla}^2\Phi^* - \frac{i\hbar}{2m}\boldsymbol{\nabla}^2\Phi^*\right) = 0
\end{aligned} \tag{۱۱-۱}$$

همان طور که می‌بینیم پیوستگی جریان برقرار است. اکنون به بررسی پایستگی جریان برای معادله کلاین-گوردون می‌پردازیم. برای این معادله چگالی احتمال ρ، باید قسمت صفر یک چار بردار باشد و به همین منظور برای ρ از رابطه

$$\rho = \frac{i\hbar}{2m}(\Phi^*\frac{\partial\Phi}{\partial t} - \Phi\frac{\partial\Phi^*}{\partial t}) \tag{۱۲-۱}$$

و برای چگالی جریان از رابطه چاربرداری

$$j^\mu = (\rho, \boldsymbol{j}) = \frac{i\hbar}{2m}\Phi^*\left(\overleftrightarrow{\partial_0}, \overleftrightarrow{\boldsymbol{\nabla}}\right)\Phi = \frac{i\hbar}{2m}\Phi^*\overleftrightarrow{\partial^\mu}\Phi \tag{۱۳-۱}$$

استفاده می‌کنیم و باتوجه به رابطه ریاضی

$$A\overleftrightarrow{\partial^\mu}B \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}[A\partial^\mu B - (\partial^\mu A)B] \tag{۱۴-۱}$$

پایستگی جریان، برای معادله دیراک به صورت ذیل در می‌آید،

$$\partial_\mu j^\mu = \frac{i\hbar}{2m}\left(\Phi^*\partial^\mu\partial_\mu\Phi - \Phi\partial^\mu\partial_\mu\Phi^*\right) = 0 \tag{۱۵-۱}$$

بنابراین، پایستگی جریان چاربرداری برای معادله کلاین-گوردون اثبات شد. اما این پایستگی صرفا به معنی مثبت بودن چگالی احتمال نیست، از آنجایی که معادله کلاین-گوردون مشتق مرتبه دوم زمانی و مکانی دارد، ممکن است چگالی احتمال مقدار منفی به خود بگیرد و این بر خلاف تعاریف آماری برای احتمال است. پس نقص دیگر معادله کلاین-گوردون، داشتن مشتق زمانی و مکانی مرتبه دوم می‌باشد.

تا اینجا به بررسی دو تا از نقایص معادله کلاین-گوردون پرداختیم و نقص بعدی این معادله از رابطه زیر آشکار می‌شود. با توجه به رابطهٔ (۱-۱) داریم،

$$E = \pm(m^2c^4 + \boldsymbol{p}^2c^2)^{1/2} \quad (۱-۱۶)$$

برای یک ذره آزاد، انرژی مثبت را در نظر می‌گیریم و از انرژی منفی صرف نظر می‌کنیم، حال آنکه در طبیعت ممکن است انرژی‌های منفی نیز وجود داشته باشند. نقص سوم معادله کلاین-گوردون به دلیل نادیده گرفتن انرژی‌های منفی برای ذرات پدیدار می‌شود [۲].

پس در مطالعات بالا سه نقص معادله کلاین-گوردون که عبارتند از : ۱- عدم در نظر گرفتن اسپین برای ذرات، ۲- داشتن مشتق مرتبه دوم زمانی و مکانی، ۳- نادیده گرفتن انرژی‌های منفی برای ذرات را مورد بررسی قرار دادیم و دیدیم که این معادله شرایط بالا را پوشش نمی دهد. به منظور یافتن معادله‌ای که سه شرط بالا را داشته باشد به سراغ معادله دیراک می‌رویم.

۱-۳ معادله دیراک

دیراک برای بدست آوردن معادله مورد نیاز خود از روی معادله (۱-۱)، فرض آسان ساز $|\boldsymbol{p}| = 0$ را اعمال کرد. بر طبق این فرض

$$p^\mu = (p^0, \boldsymbol{p}) = (p^0, 0) \quad (۱-۱۷)$$

در نتیجه، رابطه (۱-۱) اینگونه تغییر می‌کند،

$$(p^0 - mc) = 0 \rightarrow (p^0 + mc) \rightarrow \begin{cases} p^0 - mc = 0 \\ p^0 + mc = 0 \end{cases} \qquad (۱۸-۱)$$

هر یک از این دوجواب برای معادله دیراک قابل قبول است، اما این جواب‌ها تنها در شرایط $|\boldsymbol{p}| = 0$ درست هستند، پس نمی‌توانند جواب عمومی معادله دیراک باشند. برای یافتن جواب عمومی، معادله اصلی ذیل را حل می‌کنیم،

$$p^\mu p_\mu - m^2c^2 = (\beta^\kappa p_\kappa + mc)\big(\gamma^\lambda p_\lambda - mc\big) = 0 \ \rightarrow$$

$$\big(\beta^\kappa \gamma^\lambda p_\kappa p_\lambda - mc\big(\beta^\kappa p_\kappa - \gamma^\lambda p_\lambda\big) - m^2c^2\big) = 0 \qquad (۱۹-۱)$$

که در آن β^κو γ^λ هشت ضریب تصحیح هستند که باید تعیین شوند. اولین فرض دیراک برابر گرفتن $\beta^\kappa = \gamma^\lambda$ بود. با انتخاب این حالت معادله بالا اینگونه می‌شود،

$$\gamma^\kappa \gamma^\lambda p_\kappa p_\lambda - m^2c^2 = 0 \qquad (۲۰-۱)$$

با توجه به رابطه (۱-۱) و رابطه بالا خواهیم داشت،

$$p^\mu p_\mu = \sum_{\kappa,\lambda} \gamma^\kappa \gamma^\lambda p_\kappa p_\lambda = \sum_{\kappa,\lambda} \gamma^\kappa p_\kappa \gamma^\lambda p_\lambda \ \rightarrow$$

$$(p^0)^2 - (p^1)^2 - (p^2)^2 - (p^3)^2 = (\gamma^0 p^0 - \boldsymbol{\gamma}.\boldsymbol{p})(\gamma^0 p^0 - \boldsymbol{\gamma}.\boldsymbol{p}) \qquad (۲۱-۱)$$

با توجه به $\boldsymbol{\gamma}.\boldsymbol{p} = \gamma^1 p^1 + \gamma^2 p^2 + \gamma^3 p^3$، با ضرب دو پرانتز بالا، شانزده جمله زیر حاصل می-شوند،

$$(p^0)^2 - (p^1)^2 - (p^2)^2 - (p^3)^2 = (\gamma^0)^2(p^0)^2 + (\gamma^1)^2(p^1)^2 + (\gamma^2)^2(p^2)^2$$
$$+(\gamma^3)^2(p^3)^2 + (\gamma^0\gamma^1 + \gamma^1\gamma^0)p_0p_1 + (\gamma^0\gamma^2 + \gamma^2\gamma^0)p_0p_2 + (\gamma^0\gamma^3 + \gamma^3\gamma^0)p_0p_3$$
$$+(\gamma^1\gamma^2 + \gamma^2\gamma^1)p_1p_2 + (\gamma^1\gamma^3 + \gamma^3\gamma^1)p_1p_3 + (\gamma^2\gamma^3 + \gamma^3\gamma^2)p_2p_3$$

(۲۲-۱)

به طوری که در آنها $\gamma^0 = 1$ و $\gamma^1 = \gamma^2 = \gamma^3 = i$ است. با دانستن $(\gamma^0)^2 = 1$ و $(\gamma^1)^2 = (\gamma^2)^2 = (\gamma^3)^2 - 1$، یا به طور خلاصه‌تر،

$$\{\gamma^\mu,\gamma^\nu\} = 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 2g^{\mu\nu} \qquad (۱-۲۲)$$

با کمی دقت در می‌یابیم ماتریس‌های گاما به ماتریس‌های پائولی شباهت دارند. با استفاده از قرارداد استاندارد بیورکن و درل[۱] داریم،

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} \qquad (۱-۲۳)$$

که در آن σ^iها ماتریس‌های پائولی هستند، $i =$ ۱,۲,۳، یک در ماتریس γ^0 نشانگر ماتریس یکه ۲ × ۲ و صفر نشانگر ماتریس ۲ × ۲ با درایه‌های صفر است. پس معادله (۱-۲۰) به صورت ماتریس ٤ × ٤ به صورت ذیل قابل بازنویسی است،

$$p^\mu p_\mu - m^2c^2 = (\gamma^\kappa p_\kappa + mc)\big(\gamma^\lambda p_\lambda - mc\big) = 0 \qquad (۱-۲٤)$$

هر دو پرانتز بالا می‌توانند جواب مورد نظر ما باشند پس در این قسمت می‌توانیم معادله

$$\gamma^\mu p_\mu - mc = 0 \qquad (۱-۲۵)$$

را حل کنیم. به جای p_μ شکل چاربرداری آن یعنی $p_\mu \rightarrow i\hbar\partial_\mu$ را به کار می‌بریم و با اثر دادن تابع موج Ψ خواهیم داشت.

$$i\hbar\partial^\mu\partial_\mu\Psi(x,y,z,t) - mc\Psi(x,y,z,t) = 0 \qquad (۱-۲٦)$$

این معادله به معادله دیراک معروف است. تابع موج اسپینوری Ψ به صورت

$$\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \Psi_3 \\ \Psi_4 \end{pmatrix} \qquad (۱-۲۷)$$

[1] Standard Bjorken and Drell Convention