بسم الله الرحمن الرحیم

وزارت علوم، تحقیقات و فناوری

دانشگاه بین المللی امام خمینی

IMAM KHOMEINI
INTERNATIONAL UNIVERSITY

دانشکده علوم پایه

گروه ریاضی

روش هموتوپی طیفی برای حل مسایل مقدارمرزی درجه دوم غیرخطی

پایان نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد دررشته ریاضی کاربردی

گرایش آنالیز عددی

تحقیق و نگارش:

محسن مقتدائی

اساتید راهنما:

دکتر سعید عبا س بندی

دکتر داود رستمی

بهمن ۱۳۹۱

چکیده:

بسیاری از پدیده ها در جهان اطراف ما ذاتا غیر خطی بوده و قابل توصیف به وسیله معادلات غیر خطی می باشند.به دلیل ظهور کامپیوترهای پیشرفته ، تولید و حل مسایل خطی آسان است.اما در حالت کلی جواب دقیق برای مسایل غیرخطی قدری مشکل خواهد بود.دراین پایان نامه از روش هموتوپی طیفی ،برای پیدا کردن جواب های مساله مقدار مرزی غیر خطی مرتبه دوم استفاده می کنیم.این پایان نامه،درستی و کارایی بالای روش هموتوپی طیفی را نسبت به روش استاندارد هموتوپی برای حل مسایل غیر خطی نشان می دهد.این پایان نامه بر اساس مقاله زیرتهیه شده است:

A new spectral homotopy analysis method for solving a nonlinear second order BVP

S.S.Motsa,P.Sibanda,S.Shateyi

واژه های کلیدی:

روش تحلیلی هموتوپی – روش طیفی چبیشف – ماتریس مشتق چبیشف – مساله مقدار مرزی غیرخطی

مقدمه:

روش تحلیلی هموتوپی تکنیکی تحلیلی برای حل معادلات دیفرانسیل غیر خطی است که در سال 1992 توسط لیاوابداع شد[۱۰].بر مبنای این روش جواب مسایل غیر خطی بر اساس یک سری همگرا به جواب معادله دیفرانسیل غیر خطی بیان می شود که این جواب مستقل از پارامترهای کوچک وبزرگ فیزیکی مرتبط با مساله است[۱۵].ایده اساسی شکل گیری روش هموتوپی ،جایگزینی دستگاهی از معادلات دیفرانسیل معمولی به جای معادله غیر خطی است که قابل حل به وسیله بسته های محاسبات نمادین نظیرMAPLE,MATLABو...است.اما روش هموتوپی تحلیلی دارای محدودیت هایی است که ما سعی کردیم در این پایان نامه به بیان آنها بپردازیم وسپس با استفاده از روش های طیفی این محدودیت ها رااز بین ببریم.

فهرست مطالب

فصل اول تعاریف و مفاهیم پایه ای

فصل دوم روش تحلیلی هموتوپی

فصل سوم مشتق گیری به روش حاصلضرب ماتریس مشتق در بردارمقادیر

فصل چهارم روش هموتوپی طیفی

فهرست نماد ها

واژه نامه

فصل اول

تعاریف ومفاهیم پایه ای

۱-۱ مقدمه

دراین فصل به ارائه ویادآوری مفاهیم اصلی وبنیادین مورد نیازدرپایان نامه می پردازیم وقضایا وروش های مهم مقدماتی لازم راارائه می کنیم.ازمهمترین این مفاهیم، دنباله ها و سری های عددی،سری های توانی،دسته بندی معادلات دیفرانسیل معمولی باشرایط اولیه ومرزی وروش های عددی حل معادلات دیفرانسیل معمولی با روش های اویلر،رانگ کوتا،پرتابی وتفاضلات متناهی قابل ذکر هستند.

۱-۲ دنباله ها و سری های عددی و سری های توانی

درحل معادلات دیفرانسیل باروش های هموتوپی ،سری های توانی به طورخاص وسری های توانی به طورکلی مورداستفاده قرارمی گیرند.دراین بخش به یاد آوری مختصرپاره ای ازاین مفاهیم وذکرقضایای اصلی مربوط به آنها می پردازیم،ولی ازاثبات قضایاصرف نظر کرده وآن ها را به مراجع مقدماتی ازآنالیزریاضی و ریاضیات عمومی ارجاع می دهیم.درهمه پایان نامه حاضرتوابع مورد استفاده ازمتغیر حقیقی و بامقدارحقیقی اند.بنابراین بحث دنباله وسری را نیز به دنباله های عددی وتابعی حقیقی محدود می کنیم.

تعریف۱-۲-۱: تابعی که دامنه آن مجموعه اعدادطبیعی $\mathbb{N}$ وبردآن زیرمجموعه ای ازاعدادحقیقی $\mathbb{R}$ باشد یک دنباله ازاعدادحقیقی یا دنباله نامیده می شود. یک دنباله حقیقی با $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ نمایش داده می شود، که درآن $x_n \in \mathbb{R}$ وجمله x_n راجمله عمومی دنباله نامند.

تعریف ۱-۲-۲: دنباله $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ را همگرابه عددحقیقی ℓ می نامیم، درصورتی که به ازای هر $\varepsilon > 0$ یک عدد صحیح مثبت مانند m موجود باشد به طوری که به ازای هر $n \geq m$ ،

$$|x_n - \ell| < \varepsilon$$

دراین صورت می نویسیم $\lim_{n\to\infty} x_n = \ell$ یا $x_n \to \ell$ وقتی که $n \to \infty$.عدد ℓ را حد دنباله مینامند.درصورتی که دنباله حقیقی همگرا به عددحقیقی ای نباشد،آن راواگرامینامند.حدهردنباله همگرا، منحصربه فرداست وهر دنباله همگرا کران دار است.

قضیه ۱-۲-۳: اگر $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ دو دنباله باشند و $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ و $\lim_{n\to\infty} y_n = y$،آنگاه

۱) $\lim_{n\to\infty} |x_n| = |x|$،

۲) $\lim_{n\to\infty} (x_n \pm y_n) = x \pm y$،

۳) $\lim_{n\to\infty} (x_n y_n) = xy$،

۴) $\lim_{n\to\infty} (kx_n) = kx$ ($k \in \mathbb{R}$وثابت).

اثبات: به[۲۲] مراجعه کنید.

تعریف ۱-۲-۴: دنباله $\{x_n\}$ رایک دنباله کوشی [1] می نامند،اگربه ازای هر $\varepsilon > 0$مفروض،یک عددصحیح مثبت مانند p (وابسته به ε) موجود باشد به طوری که به ازای هر $m \ge p$ و $n \ge p$،

$$|x_n - x_m| < \varepsilon.$$

ثابت می شود هردنباله حقیقی کوشی، همگرا است ، وهر دنباله همگرای حقیقی یک دنباله کوشی است([۲۲]).

تعریف ۱-۲-۵: اگر $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ یک دنباله ازاعداد حقیقی باشد،حاصل جمع $a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$ رایک سری نامتناهی نامیده وبا $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ نمایش می دهند. a_nراجمله n ام سری فوق نامند.

---

[1] Cauchy Sequence

تعریف۱-۲-۶: مجموع n جمله اول یک سری $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ را مجموع جزئی nام می نامند وبا $\sum_{i=1}^{n} a_i$ نمایش می دهند. یعنی $\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ رامجموع جزئی n ام سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ می نامند.مجموع جزئی n ام را با S_nنمایش می دهند.

تعریف ۱-۲-۷: سری $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ راهمگرامی نامند ،اگر دنباله مجموع های جزئی $\left\{\sum_{i=1}^{n} a_i\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ همگرا باشد.سری غیرهمگرا را واگرا می نامند.

تعریف ۱-۲-۸: سری $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ راهمگرای مطلق می نامند،اگر سری $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ همگرا باشد.

تعریف ۱-۲-۹:سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ راهمگرای مشروط نامنداگر $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگراباشد،ولی $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ همگرانباشد.یعنی سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگراباشد،اماهمگرای مطلق نباشد.

قضیه ۱-۲-۱۰: اگر $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ همگراباشد،آن گاه $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

اثبات:به[۲۲] مراجعه کنید.

قضیه ۱-۲-۱۱: اگر $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ و $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ به ترتیب ،همگرا به SوT باشند و λ و μ دوعدد حقیقی باشند ، آنگاه $\sum_{n=1}^{+\infty} (\lambda a_n + \mu b_n)$ به $\lambda S + \mu T$ همگرا است.

اثبات:به[۲۲] مراجعه کنید.

قضیه ۱-۲-۱۲: سری $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ با $a_n > 0$ همگراست،اگر وفقط اگردنباله های مجموع های جزیی آن یعنی $\left\{\sum_{i=1}^{n} a_i\right\}$ ازبالا کراندارباشد.

اثبات:به [۲۲]مراجعه کنید.

قضیه(دالامبر) ۱-۲-۱۳: سری با جملات مثبت $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ همگراست درصورتی که $\lim_{x\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}} < 1$ ، وواگراست، درصورتی که $\lim_{x\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}} > 1$.

اثبات:به [۲۲]مراجعه کنید.

تعریف ۱-۲-۱۴: اگر x_0یک عدد حقیقی ثابت باشد،سری $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-x_0)^n$ را یک سری به مرکز x_0نامند.اگر $x_0 = 0$ ،سری توانی به صورت $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ درمی آید(a_n ها راضرایب سری نامند).

تعریف ۱-۲-۱۵: فرض کنیم $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-x_0)^n$ یک سری توانی و α عددی حقیقی باشد.

الف) اگرسری $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (\alpha-x_0)^n$ به مجموع S همگراباشد،سری توانی مفروض در $x=\alpha$ به به مجموع S همگرانامیده می شود.

ب) اگرسری $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (\alpha-x_0)^n$ واگراباشد،سری توانی مفروض در $x=\alpha$ واگرا نامیده می شود.

ج) سری توانی را د ر $x=\alpha$ همگرای مطلق می نامند،در صورتی که $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (\alpha-x_0)^n$

همگرای مطلق باشد.

قضیه ۱-۲-۱۶: سری توانی $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\left(x-x_0\right)^n$ رادرنظر بگیرید وفرض کنید $\mu=\lim_{n\to\infty}\left|a_n\right|^{\frac{1}{n}}$، آنگاه:

الف) اگر $\mu=0$ سری توانی به ازای هر مقدار x همگرای مطلق است.

ب) اگر $\mu=\infty$ سری توانی فقط در $x=x_0$ همگراست.

اثبات:به [۲۲]مراجعه کنید.

تعریف ۱-۲-۱۷: اگر $\mu=\lim_{n\to\infty}\left|a_n\right|^{\frac{1}{n}}$، عدد $\frac{1}{\mu}$ را شعاع همگرایی سری توانی $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\left(x-x_0\right)^n$ نامیم وآن را با r نشان می دهیم.به طور دقیق ترقرارداد می کنیم:

الف) اگر $\mu=\infty$ آنگاه $r=0$.

ب) اگر $\mu=0$ آنگاه $r=\infty$.

ج) اگر $\mu\neq 0,\infty$، آنگاه $r=\frac{1}{\mu}$.

مجموع نقاطی که درآن سری توانی همگراست ، **مجموعه همگرایی** سری نامند. بنابراین مجموعه همگرایی سری درسه حالت تعریف اخیربه ترتیب عبارت است از $\{x_0\}$، اگر $r=0$ و $(-\infty,+\infty)$ ،اگر $r=\infty$.اگر $r\neq 0,\infty$ باشد ، مجموعه همگرایی یکی ازچهاربازه ی $\left(x_0-r,x_0+r\right)$، $\left[x_0-r,x_0+r\right)$، $\left(x_0-r,x_0+r\right]$و $\left[x_0-r,x_0+r\right]$است.(برحسب اینکه سری توانی مفروض دریک انتهایاهردوانتهای بازه همگرا یا واگرا باشد).

هرسری توانی دردرون بازه همگرایی مربوط،،همگرای مطلق است ودر خارج آن بازه واگراست.ممکن است یک سری توانی در نقاط انتهایی یابازه همگرایی خود همگرا یا واگرا باشد.حاصلضرب دوسری $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ و $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ بنا به تعریف سری $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$ است،که درآن $c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ ممکن است سری های $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ و $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ همگرا باشند،ولی حاصل ضرب آنهاهمگرا نباشند. ثابت می شود که حاصل ضرب هردو سری همگرای مطلق، همگرای مطلق است ([۲۲]).

قضیه (تیلور) ۱-۲-۱۸: اگر $f(x)$ ومشتق های آن تامرتبه $n+1$ بر $[a,b]$ وجودداشته باشند و $x_0 \in [a,b]$، آنگاه برای هر $x \in [a,b]$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x - x_0)^k + R_n(x)$$

که در آن $R_n(x)$ را باقیمانده تیلورنامند وبه صورت زیرداده می شود:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

اگر $x < x_0$ آنگاه $\xi \in (x, x_0)$ و اگر $x > x_0$ آنگاه $\xi \in (x_0, x)$.

اثبات: به [۲۲] مراجعه کنید.

۱-۳ مفاهیم اولیه معادلات دیفرانسیل

تعریف ۱-۳-۱: یک معادله دیفرانسیل عبارت است از معادله $F\left(x,y,y',y'',...,y^{(n)}\right)=0$ که در آن F تابعی از $n+2$ متغیر می باشد. x یک متغیر مستقل و $y^{(n)},...,y',y$ به ترتیب تابع مجهول و مشتقات آن می باشند. بالاترین مرتبه مشتق موجود در معادله دیفرانسیل فوق را **مرتبه** آن معادله دیفرانسیل می نامیم. به عنوان مثال معادله $y'''+2xy''+yy'=x^4$ یک معادله دیفرانسیل مرتبه سوم و معادله $y'+(\cos x)y+x=0$ یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول میباشد

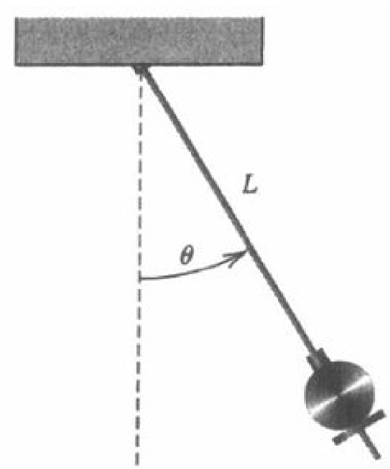
تعریف ۱-۳-۲: معادله دیفرانسیل مرتبه n، $F\left(x,y,y',y'',...,y^{(n)}\right)=0$ را درنظرمی گیریم. اگر در معادله فوق متغیرهای $y^{(n)},...,y',y$ به صورت توابع چندجمله ای با ضرایب تابعی برحسب x ظاهر شوندآنگاه بیشترین توان موجود در $y^{(n)}$ را **درجه** آن معادله دیفرانسیل می - نامند.بدیهی است برای همه معادلات دیفرانسیل درجه تعریف نمی شود.

تعریف ۱-۳-۳: معادله دیفرانسیل مرتبه n به صورت $F\left(x,y,y',y'',...,y^{(n)}\right)=0$ مفروض است تابع $y=\varphi(x)$ در فاصله $\alpha<x<\beta$ را جواب معادله دیفرانسیل فوق گویم اگر توابع $\varphi(x)$، $\varphi'(x)$، $\varphi''(x)$ ، ... ، $\varphi^{(n+1)}(x)$ درفاصله فوق موجود باشند وبه ازای هر x درفاصله $\alpha<x<\beta$، رابطه زیر برقرار باشد.

$$F\left(x,\varphi(x),\varphi'(x),\varphi''(x),...,\varphi^{(n)}(x)\right)=0$$

۱-۴ مسایل مقداراولیه

حرکت یک آونگ درحال نوسان تحت مفروضات ساده معینی را می توان با معادله دیفرانسیل مرتبه دوم $\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{g}{L}\sin\theta=0$ توصیف کرد، که درآن L طول آونگ ، g ثابت ثقل زمین و θ زاویه آونگ با وضعیت عمود یا تعادل است.اگرعلاوه بر این، وضعیت آونگ در شروع حرکت را با $\theta(t_0)=\theta_0$ وسرعت در آن نقطه را با $\theta'(t_0)=\theta'_0$ مشخص کنیم ،با یک مساله مقداراولیه مواجه هستیم.



شکل۱-۱ : آونگ در حال نوسان

تعریف ۱-۴-۱: گوییم تابع $f(t,y)$ با متغیر y بر مجموعه $D\subset\mathbb{R}^2$ درشرط **لیپ شیتس** صدق می کند درصورتی که یک ثابت مانند $L>0$ با این خاصیت وجود داشته باشد که هروقت $(t,y_1),(t,y_2)\in D$ آنگاه داشته باشیم:

$$\left|f(t,y_1)-f(t,y_2)\right|\le L\left|y_1-y_2\right|$$

ثابت L را یک ثابت لیپ شیتس برای f می گوییم.

تعریف ۱-۴-۲: گوییم مجموعه $D \subset \mathbb{R}^2$ **محدب** است اگر، هر وقت $(t_1,y_1),(t_2,y_2)$ متعلق به D باشند، نقطه $\left((1-\lambda)t_1+\lambda t_2,(1-\lambda)y_1+\lambda y_2\right)$ نیز به ازای هر λ، که $0 \le \lambda \le 1$، متعلق به D باشد.

قضیه ۱-۴-۳: فرض کنیم $D=\{(t,y)|a \le t \le b,-\infty < y < \infty\}$ و تابع $f\left(t,y\right)$ بر D پیوسته باشد هرگاه f نسبت به متغیر y بر D در شرط لیپ شیتس صدق کند، آنگاه مساله مقدار اولیه:

$$y'=f\left(t,y\right), \quad a \le t \le b, \quad y\left(a\right)=\alpha,$$

دارای جواب منحصر به فرد $y\left(t\right)$ به ازای $a \le t \le b$ ، است

اثبات: به [۴] مراجعه کنید.

تعریف ۱-۴-۴([۴]): گوییم مسئله مقداراولیه $\begin{cases} \dfrac{dy}{dt}=f\,(t,y),a \le t \le b \\ y\,(a)=\alpha \end{cases}$ یک مسئله خوش وضع است اگر:

الف) یک جواب منحصربه فرد مثلا $y\,(t)$ ، برای این مسئله وجود داشته باشد.

ب) عددی مانند $\varepsilon > 0$ با این خاصیت باشد که جواب منحصربه فرد $z\,(t)$ برای مسئله

$$\begin{cases} \dfrac{dz}{dt}=f\,(t,z)+\delta(t),a \le t \le b \\ z\,(a)=\alpha+\varepsilon_0 \end{cases}$$

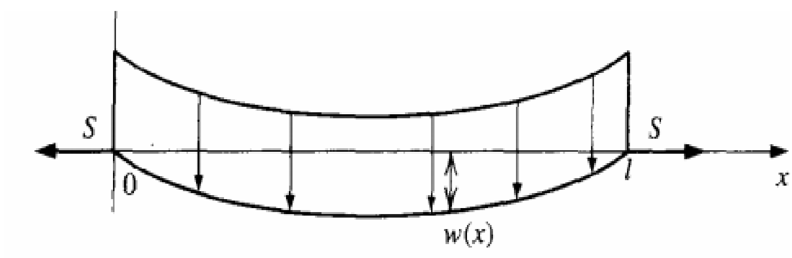
هرگاه $|\varepsilon_0| < \varepsilon$ وبه ازای هر $a \le t \le b$ ، $|\delta(t)| < \varepsilon$ ،وجود داشته باشد.

ج) ثابتی مانند $k > 0$ با این خاصیت باشد که به ازای هر $a \le t \le b$ ،

$$\left| z(t) - k(t) \right| < k\varepsilon$$

۱-۵ مسایل مقدار مرزی

یک مسئله عادی در مهندسی راه و ساختمان به خمیدگی یک میله آهنی با مقطع عرضی مستطیلی مربوط میشود که مقیدبه تحمل باری یکنواخت است،درحالی که دوانتهای میله آهنی چنان نگهداری می شوند که متحمل هیچ خمیدگی نمیشوند.



شکل ۱-۲: خمیدگی میله آهنی

معادله دیفرانسیلی که این وضعیت فیزیکی را تقریب می کند به شکل

$$\frac{d^2w}{dx^2} - \frac{S}{EI}w = \frac{qx}{2EI}(x - l)$$

است که در آن $w = w(x)$ ، خمیدگی به فاصله x ازانتهای چپ میله آهنی است و l ، q ، E ، S ، I به ترتیب ، معرف طول میله، فشار باریکنواخت، مدول الاستیسیته، قدرت در نقاط انتهایی وممان اینرسی مرکزی است. به این معادله دیفرانسیل دو شرط مربوط می شود که با این فرض که هیچ خمیدگی در دو انتهای میله رخ نمی دهد، یعنی، $w(0) = w(l) = 0$ داده می شود.

قضیه ۱-۵-۱: فرض کنیم تابع f در مسئله مقدار مرزی $\begin{cases} y'' = f(x, y, y'), a \le x \le b \\ y(a) = \alpha, y(b) = \beta \end{cases}$ بر

مجموعه

$$D = \{(x, y, y') | a \le x \le b, -\infty < y < \infty, -\infty < y' < \infty\}$$

پیوسته بوده $\frac{\partial f}{\partial y}$، $\frac{\partial f}{\partial y'}$ بر D پیوسته باشند.هرگاه:

الف) به ازای هر $(x, y, y') \in D$ ، آنگاه $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, y') > 0$.

ب) یک ثابت M وجود داشته باشد که به ازای هر $(x, y, y') \in D$, $\left|\frac{\partial f}{\partial y'}(x, y, y')\right| \le M$

آنگاه مسئله مقدار مرزی فوق دارای جواب منحصر به فرد است.

اثبات: به [۴] مراجعه کنید.

۱-۶ روش های عددی کلاسیک حل معادلات دیفرانسیل

۱-۶-۱روش اویلر: گرچه روش اویلردرعمل به ندرت بکار می رود، سادگی بدست آوردن آن را می توان برای تشریح تکنیک های ساختن بعضی ازروش های پیشرفته تر، بدون انجام محاسبات خسته کننده به کار گرفت. هدف این روش تعیین تقریبی برای مسئله مقدار اولیه خوش وضع

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = f(t, y), \qquad a \le t \le b \\ y(a) = \alpha \end{cases} \qquad (۱-۱)$$

است.درعمل، یک تقریب پیوسته به جواب $y(t)$ بدست نمی آید؛ درعوض، تقریب هایی به y درنقاط متعدد بازه $[a,b]$ ، به نام نقاط شبکه ای، پدید می آیند.وقتی جواب تقریبی در این