بسم الله الرحمن الرحیم

باسمه تعالی

تعهد نامه اصالت اثر

اینجانب **مریم حق جویان** متعهد می شوم که مطالب مندرج در این پایان نامه حاصل کار پژوهشی اینجانب است و دستاوردهای پژوهشی دیگران که در این پژوهش از آن ها استفاده شده است، مطابق مقررات، ارجاع و در فهرست منابع و مآخذ ذکر گردیده است. این پایان نامه قبلا برای احراز هیچ مدرک هم سطح یا بالاتر ارایه نشده است. در صورت اثبات تخلف (در هر زمان) مدرک تحصیلی صادر شده توسط دانشگاه از اعتبار ساقط خواهد شد.

مریم حق جویان

امضاء

دانشگاه تربیت دبیر شهید رجائی

دانشکده علوم پایه

بررسی آنتروپی توپولوژیک برای نگاشتهای یک کوهانی

نگارش:

مریم حق جویان

استاد راهنما: **دکتر منیره اکبری**

پایان نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد

در رشته ریاضی محض

آبان ماه ۱۳۹۳

تقدیم به:

پدر و مادرم

که بودنشان تاج افتخاری ست بر سرم و نامشان دلیلی ست بر بودنم، چرا که این دو وجود پس از پروردگار، مایه هستی ام بوده اند، دستم را گرفتند و راه رفتن در این وادی زندگی پر از فراز و نشیب را آموختند.

تقدیر و تشکر

بر خود لازم می‌دانم که صمیمانه از زحمت‌های بی‌دریغ و راهنمایی‌های دلسوزانه استاد ارجمندم خانم دکتر منیره اکبری که در طول انجام این پژوهش خالصانه در پیشرفت علمی اینجانب سعی و تلاش نمودند، نهایت تشکر و قدردانی را نمایم.

پیشگفتار

مفهوم آنتروپی توپولوژیک در سال ۱۹۶۵ در مقاله ای تحت این عنوان توسط آدلر[۱] و کونهیم[۲] برای اولین بار معرفی شد.[۱] این مفهوم یک اندازه ی عددی‌ست برای نگاشت‌هایی که روی یک فضای توپولوژیک تعریف می‌شوند و میزان پیچیدگی سیستم را در مورد این نگاشت‌ها تعیین می‌کند. در این پایان نامه ابتدا مفاهیم مقدماتی مربوط به سیستم‌های دینامیکی که در فصل‌های دوم و سوم مورد نیاز است را با ذکر مثال شرح خواهیم داد. این مفاهیم از کتاب

Robert L. Devaney. 1989, An Introduction to Chaotic Dynamical Systems, (Second edition, 1998). Addison-Wesley Publishing Company, 17-47.

آورده شده است.

در فصل دوم ابتدا تعریف آنتروپی برای یک پوشش باز دلخواه را بیان می‌کنیم، سپس برای نگاشت پیوسته‌ای که از یک فضای فشرده به خودش تعریف شده است، آنتروپی آن نگاشت مربوط به پوشش باز را تعریف می‌کنیم، در مرحله‌ی بعد تعریفی برای آنتروپی نگاشت ارائه می‌دهیم که به پوشش باز وابسته نیست و آنرا آنتروپی توپولوژیک می‌نامیم. در ادامه ویژگی‌های اصلی آنتروپی توپولوژیک را بیان می‌کنیم و خواننده بطور ملموسی با این تعریف آشنا خواهد شد. سپس خواص آنتروپی برای یک بازه‌ی فشرده را بیان می‌کنیم. مرجع اصلی مطالب ارائه شده در فصل دوم کتاب

L. S. Block, W. A. Coppel. 1992, Dynamics in one dimension, Springer-verlag Berlin Heidelberg, 190-204.

می‌باشد.

---

[۱] Adler

[۲] konheim

در فصل سوم این پایان نامه، هدف ارائه‌ی روشی برای محاسبه‌ی آنتروپی توپولوژیک دسته‌ای خاص از نگاشت‌ها روی یک بازه می‌باشد. بنابراین ابتدا نگاشت‌های یک کوهانی را معرفی می‌کنیم، سپس قراردادهایی را معرفی می‌کنیم و بر اساس آنها روشی برای شمارش تعداد بازه‌هایی که نگاشت روی آنها یکنواست ارائه می‌دهیم و در نهایت الگوریتمی برای محاسبه‌ی آنتروپی توپولوژیک نگاشت‌هایی که راهنامه‌ی نقاط بحرانی آنها مشخص باشد و ویژگی‌های بیان شده را داشته باشند به دست می‌آوریم. مرجع اصلی مطالب ارائه شده در فصل سوم مقاله‌ی

Rui Dilao and Jose Amigo, Computing the Topological Entropy of Unimodal Maps, International Journal of Bifurication and Chaos, 22 (2012), 1-14.

می‌باشد.

چکیده

در این پایان نامه پس از تعریف آنتروپی توپولوژیک و ارائه‌ی تعریف‌های معادل، روشی را برای محاسبه‌ی آنتروپی دسته‌ی خاصی از نگاشت‌ها ارائه می‌دهیم. این روش مبتنی بر شمارش تعداد بازه‌های یکنوایی تکرارهای نگاشت یک کوهانی است.
ابزار اصلی در این روش استفاده از دنباله‌ی نیدینگ (KS) و تحلیل تغییر علامت‌های نقاط ابتدا و انتهای بازه و نقاط بحرانی تکرارهای نگاشت یک کوهانی است.

کلمات کلیدی: آنتروپی توپولوژیک،نگاشتهای روی یک بازه،دینامیک نمادین.

فهرست مطالب

فصل ۱

تعاریف مقدماتی

۱.۱ مقدمه

در این فصل به طور خلاصه به بررسی تعاریف اولیه مورد نیاز در این پایان نامه می پردازیم، که شامل مفاهیم اولیه در مطالعه سیستم‌های دینامیکی می‌گردد.این تعاریف مطابق با مرجع [۲]نوشته شده اند.

۲.۱ تعاریف اولیه سیستم‌های دینامیکی

همانطور که در مقدمه بیان شد، هدف اصلی ما از مطالعه سیستم‌های دینامیکی، به دست آوردن درک درستی از رفتار احتمالی یک فرآیند تکرار شونده می‌باشد. اگر این فرآیند یک معادله‌ی دیفرانسیل باشد که در آن متغیر مورد نظر زمان باشد، آنگاه نظریه‌ی سیستم‌های دینامیکی تلاش می‌کند تا رفتار تقریبی دسته جوابهای معادله را تخمین بزند. اگر فرآیند مورد نظرمان فرآیندی گسسته باشد، مثل تکرارهای یک تابع، آنگاه نظریه‌ی سیستم‌های دینامیکی سعی در یافتن رفتار احتمالی نقاط $x, f(x), f^{2}(x), \dots, f^{n}(x)$ دارد.

تعریف ۱.۱. *مجموعه‌ی نقاط $x, f(x), f^{2}(x), \dots$ را مدار پیشرو x می‌نامیم و با نماد $O^{+}(x)$ نمایش می‌دهیم. همچنین مجموعه‌ی نقاط $x, f^{-1}(x), f^{-2}(x), \dots$ را مدار پسرو x می‌نامیم و با نماد O^{-} نمایش می‌دهیم. مدار کامل x را که با علامت $O(x)$ نشان می‌دهیم به صورت زیر*

تعریف می‌کنیم:

$$O(x) = \{f^n(x), n \in \mathbb{Z}\}$$

هدف اساسی ما شناخت همه‌ی مدارهای یک نگاشت است. مدارهای یک نگاشت غیرخطی ساده می‌توانند مجموعه‌هایی خیلی پیچیده باشند.

تعریف ۲.۱. *می‌گوییم x نقطه‌ی ثابت f است هرگاه، $f(x) = x$. همچنین نقطه‌ی x را از دوره تناوب n می‌نامیم، هرگاه $f^n(x) = x$. کوچکترین عدد مثبت مانند n را که به ازای آن $f^n(x) = x$ باشد، دوره تناوب اول x می‌نامیم.*

نمادگذاری ۳.۱. *مجموعه‌ی نقاط تناوبی از دوره‌ی تناوب n برای نگاشت f را با نماد $Per_n(f)$ و مجموعه‌ی نقاط ثابت نگاشت f را با $Fix(f)$ نمایش می‌دهیم.*

مثال ۴.۱. *نگاشت همانی یا $id(x) = x$ همه‌ی نقاط $\mathbb{R}$ را ثابت نگه می‌دارد و نگاشت $f(x) = -x$ فقط نقطه‌ی صفر را ثابت نگه می‌دارد و بقیه نقاط $\mathbb{R}$ برای این نگاشت دارای دوره‌ی تناوب ۲ هستند. همچنین برای نگاشت $f(x) = x^۳$ نقاط $x = ۰, ۱, -۱$ ثابت هستند و این نگاشت هیچ نقطه‌ی تناوبی ندارد.*

تعریف ۵.۱. *نقطه‌ی x را نهایتاً تناوبی از دوره‌ی تناوب n می‌نامیم هرگاه تناوبی نباشد اما عددی مثل $m > ۰$ وجود داشته باشد، بطوریکه*

$$\forall i \geq m \qquad , \qquad f^{n+i}(x) = f^i(x)$$

به عبارت دیگر به ازای هر $i \geq m$، نگاشت $f^i(x)$ تناوبی باشد.

تعریف ۶.۱. *فرض کنید $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ نگاشتی مشتق پذیر باشد، در این صورت نقطه‌ی x را نقطه بحرانی نگاشت f می‌نامیم، هرگاه $f'(x) = ۰$.*

در این قسمت خانواده‌ای از نگاشت‌ها را معرفی می‌کنیم که در مطالعه‌ی سیستم‌های دینامیکی یک بعدی گسسته نقش اساسی دارند و در این پایان نامه به آنها اشاره شده است. این خانواده عبارتند از

$$F_\mu(x) = \mu x(۱ - x)$$

که آن را خانواده‌ی لجستیک می‌نامیم. اگر $۱ < \mu < ۴$، آنگاه F_μ بازه‌ی $[۰, ۱]$ را به توی $[۰, ۱]$ می‌نگارد. این خانواده از نگاشت‌ها به ازای μ های مختلف، رفتار متفاوتی دارند که در اینجا مورد بررسی قرار می‌گیرد.[۲]

مثال ۷.۱. نگاشت $F_\mu(x) = \mu x(۱ - x)$ *را به ازای* $\mu > ۱$ *در نظر بگیرید. ابتدا نقاط ثابت* F_μ *را محاسبه می‌کنیم که عبارتند از:*

$$\begin{aligned} \mu x(۱ - x) &= x \\ \mu(۱ - x) &= ۱ \\ \mu - \mu x &= ۱ \\ \mu - ۱/\mu &= x \end{aligned}$$

بنابراین F_μ *دارای نقاط ثابت ۰ و* $p_\mu = (\mu - ۱)/\mu$ *می‌باشد.*

وقتی $۱ < \mu < ۲$*باشد،* $۰ < p_\mu < ۱/۲$ *است. وقتی* $۲ < \mu < ۳$ *باشد،* $۱/۲ < p_\mu < ۱$ *است.*

برای حالت $۱ < \mu < ۳$*، هرگاه* $x \in [۰, ۱]$ *آنگاه* $\lim_{n\to\infty} F_\mu^n(x) = p_\mu$.

برای حالت $\mu > ۳$*، دینامیک* F_μ *پیچیده می‌شود و یک نقطه‌ی تناوبی با دوره‌ی تناوب ۲ ایجاد می‌شود.*

از این به بعد حالت $\mu > ۴$ را مورد بررسی قرار می‌دهیم. و به جای F_μ از نماد F استفاده می‌کنیم. توجه کنید که وقتی $\mu > ۴$، مقدار ماکزیمم نگاشت F که برابر است با $\mu/۴$ بزرگتر از ۱ است. تصویر بازه‌ی $I = [۰, ۱]$ تحت F_μ زیر مجموعه‌ی I است. بنابراین بازه‌ی بازی به مرکز ۱/۲ وجود دارد که تصویر آن تحت F_μ خارج از بازه‌ی I واقع می‌شود، این بازه را $A.$ می‌نامیم. واضح است که اگر $x \in A.$ آنگاه $F(x) > ۱$ بنابراین $F^۲(x) < ۰$ و $F^n(x) \to -\infty$.

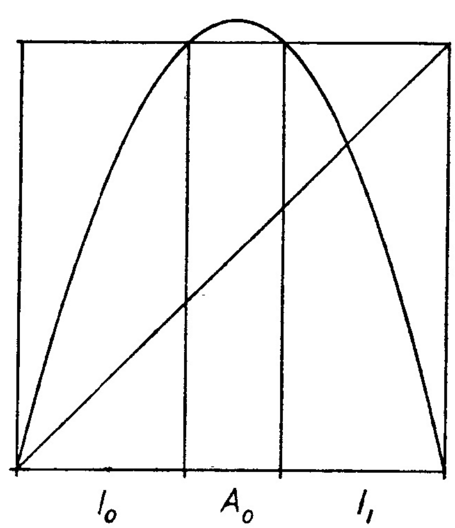
قرار دهید، $A_{۱} = \{x \in I \mid F(x) \in A_{۰}\}$ اگر $x \in A_{۱}$، آنگاه $F^{۲}(x) > ۱$ و $F^{۳}(x) < ۰$ بنابراین $F^{n}(x) \to -\infty$. با استفاده از استقرا، قرار دهید $A_n = \{x \in I \mid F^n(x) \in A_{۰}\}$ به عبارت دیگر

$$A_n = \{x \in I \mid F^i(x) \in I, i \leq n, F^{n+۱}(x) \notin I\}$$

بنابراین A_n شامل همه‌ی نقاطی است که در مرحله‌ی $n + ۱$ ام از بازه‌ی I خارج می‌شوند.
همچنین نتیجه می‌گیریم اگر x در A_n باشد، مدار نقطه‌ی x به سمت $-\infty$ می‌رود. بنابراین سرنوشت نقاطی که در A_n هستند برای ما مشخص شده است. کافیست رفتار آن مجموعه از نقاطی که هرگز از I خارج نمی‌شوند را بررسی کنیم. یعنی مجموعه نقاطی که در $I - (\cup_{n=۰}^{\infty} A_n)$ قرار دارند. این مجموعه را با Λ نشان می‌دهیم یعنی

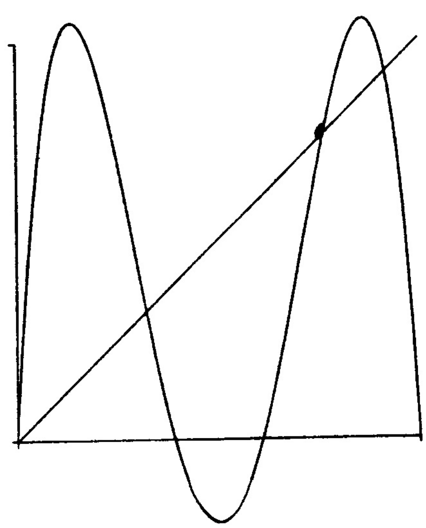
$$\Lambda = I - (\cup_{n=۰}^{\infty} A_n)$$

برای داشتن درک بهتری از Λ خواص آن را توصیف می‌کنیم.
از آنجایی که $A_{۰}$ بازه‌ی بازی به مرکز ۱/۲ است، $I - A_{۰}$ از دو بازه‌ی بسته تشکیل شده است. بازه‌ی سمت چپ را $I_{۰}$ و بازه‌ی سمت راست را $I_{۱}$ می‌نامیم. به نمودار ۱ توجه کنید.



نمودار۱ـ نمودار نگاشت F به ازای $\mu > ۴$

توجه می‌کنیم که نگاشت F روی I_0 و I_1 یکنواست. همچنین روی I_0 صعودی و روی I_1 نزولی است. از آنجایی که $F(I_0) = F(I_1) = I$ یک جفت بازه‌ی باز یکی روی I_0 و دیگری روی I_1 وجود دارد که با نگاشت F به A_0 نگاشته می‌شوند. بنابراین این جفت از بازه‌ها همان مجموعه‌ی A_1 هستند. حال مجموعه‌ی $I - (A_0 \cup A_1)$ را در نظر بگیرید. این مجموعه شامل ۴ بازه‌ی بسته است و F هر کدام از آنها را به صورت یکنوا به I_0 یا I_1 می‌نگارد. همچنین F^2 هر کدام از آنها را به I می‌نگارد. بنابراین می‌بینیم که هر ۴ بازه‌ی مجموعه‌ی $I - (A_0 \cup A_1)$ شامل یک زیر بازه‌ی باز است که توسط F^2 به A_0 نگاشته می‌شود. بنابراین نقاط این بازه‌ها در تکرار سوم نگاشت F یعنی به وسیله‌ی F^3 از بازه‌ی I خارج می‌شوند و مجموعه‌ی A_2 را پدید می‌آورند. به نمودار ۲ توجه کنید.



نمودار۲ـنمودار نگاشت F^2 به ازای $\mu > 4$

توجه کنید که نگاشت F^2 روی این چهار بازه به صورت یکی در میان صعودی و نزولی است. بنابراین نگاشت F^2 دارای سه کوهان [1] یا سه نقطه‌ی اکسترمم می‌باشد.

[1] hump

با توجه به توضیحاتی که بیان شده، به دو نکته‌ی مهم توجه می‌کنیم.
نکته‌ی اول اینکه مجموعه‌ی A_n شامل ۲^n بازه‌ی باز جدا از هم است. زیرا $I-(A_۰\cup\cdots\cup A_n)$ شامل $۲^{n+۱}$ بازه‌ی بسته است. چون

$$۱+۲+۲^۲+\cdots+۲^n=۲^{n+۱}-۱$$

نکته‌ی دوم اینکه نگاشت $F^{n+۱}$ هر یک از این $۲^{n+۱}$ بازه‌ی بسته را به I می‌نگارد و روی این بازه‌ها به ترتیب صعودی و نزولی است. بنابراین نمودار نگاشت $F^{n+۱}$ دقیقاً دارای ۲^n نقطه‌ی کوهانی است. پس نمودار F^n خط $y=x$ را حداقل ۲^n بار قطع می‌کند. در نتیجه F^n دارای ۲^n نقطه‌ی ثابت است. یعنی مجموعه‌ی $Per_n(F)$ دارای ۲^n نقطه در I است.
مجموعه‌ی Λ به وسیله‌ی برداشتن بازه‌های باز از وسط بازه‌ها به دست می‌آید و ساختار Λ همان ساختار مجموعه‌ی یک سوم میانی کانتور [۱] است. در این قسمت هدف ما اینست که مدلی را برای ساختار دینامیکی نگاشتی که در قسمت قبل معرفی شد ارائه دهیم بطوریکه کاملاً هم ارز نگاشت F باشد.
[۲] برای شروع از فضایی که شامل دنباله‌هایی با درایه‌های ۰ و ۱ است، استفاده می‌کنیم. هر دنباله‌ی نامتناهی نشان دهنده‌ی یک نقطه در فضا می‌باشد.

[۱] Cantor Middle Thirds Set

تعریف ۸.۱. *فضای دنباله‌ای روی دو نماد صفر و یک را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:*

$$\Sigma_۲ = \{s = (s_۰ s_۱ s_۲ ...) \mid s_j = ۰ \text{ یا } ۱\}$$

اعضای $\Sigma_۲$ *دنباله‌های نامتناهی از ۰ و ۱ هستند مثلاً* (...۰۰۰) *یا* (...۰۱۰۱۰۱). *می‌توانیم* $\Sigma_۲$ *را به یک فضای متریک تبدیل کنیم.*

برای دو دنباله‌ی دلخواه $s = (s_۰ s_۱ s_۲ ...)$ *و* $t = (t_۰ t_۱ t_۲ ...)$ *فاصله را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:*

$$d[s,t] = \Sigma_{i=۰}^{\infty} \frac{\mid s_i - t_i \mid}{۲^i}$$

از آنجایی که $\mid s_i - t_i \mid$ *یا برابر صفر است یا یک، این سری نامتناهی قابل مقایسه با سری هندسی* $\Sigma_{i=۰}^{\infty} ۱/۲^i = ۲$ *است. بنابراین همگراست. به عنوان مثال اگر* $s = (۰۰۰...)$ *و* $t = (۱۱۱...)$ *آنگاه* $d[s,t] = ۲$. *واضح است که* d *یک متر روی* $\Sigma_۲$ *می‌باشد.*

تعریف ۹.۱. *نگاشت انتقال* $\sigma : \Sigma_۲ \longrightarrow \Sigma_۲$ *به صورت* $\sigma(s_۰ s_۱ s_۲ ...) = (s_۱ s_۲ ...)$ *تعریف می‌شود.*

تعریف ۱۰.۱. *راهنامه* x *عبارت است از دنباله‌ای مانند* $S(x) = s_۰ s_۱ s_۲ ...$ *که در آن* $s_j = ۰$ *اگر* $F_{\mu}^{j}(x) \in I_۰$ *و* $s_j = ۱$ *اگر* $F_{\mu}^{j}(x) \in I_۱$ *باشد.*

بنابراین راهنامه x دنباله‌ای نامتناهی از صفر و یک است و $S(x)$ نقطه‌ای در فضای دنباله‌ای $\Sigma_۲$ می‌باشد.

می‌توانیم S را نگاشتی از مجموعه‌ی Λ به $\Sigma_۲$ در نظر بگیریم. این نگاشت ویژگی‌های جالبی دارد که برخی از آنها را بیان می‌کنیم.

تعریف ۱۱.۱. *فرض کنید* $f : A \longrightarrow A$ *و* $g : B \longrightarrow B$ *دو نگاشت باشند. می‌گوییم* f *و* g *مزدوج توپولوژیک هستند هرگاه یک همسانریختی مانند* $h : A \longrightarrow B$ *موجود باشد به طوریکه* $h \circ f = g \circ h$. *همسانریختی* h *را تزویج توپولوژیک می‌نامیم.*

می‌توان ثابت کرد که نگاشت $S : \Lambda \longrightarrow \Sigma_۲$ به ازای $\mu > ۲ + \sqrt{۵}$ همسانریختی است.[۲]
بنابراین قضیه‌ی زیر را داریم:

قضیه ۱.۱۲. $S \circ F_\mu = \sigma \circ S$

برهان. به مرجع [۲] مراجعه شود. ■

حال به معرفی ابزاری کارآمد در مطالعه‌ی سیستم‌های دینامیکی یک بعدی می‌پردازیم. این مفهوم برای اولین بار در سال ۱۹۷۸ توسط فردی به نام سینگر [۱] معرفی شد. مشتق شوارتزی [۲] به ما کمک می‌کند تا تعداد مدارهای تناوبی جاذب را برای برخی از نگاشت‌های خاص به دست آوریم. همچنین با استفاده از این مفهوم می‌توانیم بازه‌هایی را که نگاشت روی آنها آشوبناک است تعیین کنیم. توجه کنید که برای ما، نگاشتهایی با مشتق شوارتزی منفی از اهمیت خاصی برخوردارند.

تعریف ۱.۱۳. *مشتق شوارتزی برای نگاشت f در نقطه‌ای مانند x به صورت زیر تعریف می‌شود:*

$$Sf(x) = \frac{f'''(x)}{f'(x)} - \frac{۳}{۲}\left(\frac{f''(x)}{f'(x)}\right)^{۲}$$

[۱] Singer

[۲] Schwarzian Derivative

فصل ۲

آنتروپی توپولوژیک

۱.۲ تعریف آنتروپی توپولوژیک و ویژگی‌های عمومی آن

فرض کنید X یک فضای توپولوژیک فشرده باشد. یک پوشش باز برای X خانواده‌ای‌ست از مجموعه‌های باز که اجتماع آنها برابر است با X. می‌گوییم پوشش بازβ تظریفی از پوشش باز α است و مینویسیم$\alpha < \beta$ ، هرگاه هر مجموعه باز β، زیر مجموعه‌ای از یک مجموعه‌ی باز در α باشد.اگر α وβ دو پوشش باز باشند. اتصال α و β را که با $\alpha \vee \beta$ نشان می‌دهیم، پوشش بازی شامل همه‌ی مجموعه‌های $A \cap B$ است، بطوریکه$A \in \alpha$ و $B \in \beta$. بنابراین $\alpha \vee \beta$ تظریفی از هر دو پوشش α و β است. یعنی $\alpha < \alpha \vee \beta$ و $\beta < \alpha \vee \beta$ چون $\alpha \vee \beta = \{A \cap B | A \in \alpha, B \in \beta\}$ و $A \cap B \subset A$ و $A \cap B \subset A$. از آنجایی که X فشرده است، هر پوشش باز برای X، زیر پوششی متناهی دارد. آنتروپی یک پوشش باز مثل α بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$H(\alpha) = \log N(\alpha)،$$

که در آن$N(\alpha)$کمترین تعداد مجموعه‌های باز در بین تمام زیر پوشش‌های متناهی است. واضح است که $H(\alpha) \geq ۰$ می‌باشد و تساوی تنها زمانی برقرار است که $X \in \alpha$ زیرا در این‌صورت $N(\alpha) = ۱$ و $\log ۱ = ۰$ درنتیجه $H(\alpha) = ۰$ بعلاوه، به سادگی می‌توان دید که

(۱.۲) اگر $\alpha < \beta$ آنگاه $H(\alpha) \leq H(\beta)$ و $H(\alpha \vee \beta) = H(\beta)$

$$H(\alpha \vee \beta) \leq H(\alpha) + H(\beta) \tag{۲.۲}$$

فرض کنید $f : X \longrightarrow X$ نگاشتی پیوسته باشد، به ازای هر پوشش باز مانند α پوشش باز $f^{-1}\alpha$ را که شامل تمام مجموعه‌های به شکل $f^{-1}(A)$ بطوریکه $A \in \alpha$ باشد را می‌توانیم در نظر بگیریم. واضح است که

(۳.۲) اگر $\alpha < \beta$ آنگاه $f^{-1}\alpha < F^{-1}\beta$

$$f^{-1}(\alpha \vee \beta) = f^{-1}\alpha \vee f^{-1}\beta \tag{۴.۲}$$

همچنین به سادگی دیده می‌شود که

$$H(f^{-1}\alpha) \leq H(\alpha) \tag{۵.۲}$$

وتساوی زمانی برقرار است که f پوشا باشد.

از روابط (۱.۲) و (۴.۲) و (۵.۲) نتیجه می‌گیریم که به ازای اعداد مثبت دلخواه m و n داریم:

$$\begin{aligned}
&H(\alpha \vee \cdots \vee f^{-m+1}\alpha \vee f^{-m}(\alpha \vee \cdots \vee f^{-n+1}\alpha)) \\
&\leq H(\alpha \vee \cdots \vee f^{-m+1}\alpha) + H(f^{-m}(\alpha \vee \cdots \vee f^{-n+1}\alpha)) \\
&\leq H(\alpha \vee \cdots \vee f^{-m+1}\alpha) + H(\alpha \vee \cdots \vee f^{-n+1}\alpha).
\end{aligned}$$

در نتیجه:

$$h(f,\alpha) = \lim_{n\to\infty} H(\alpha \vee f^{-۱}\alpha \vee \cdots \vee f^{-n+۱}\alpha)/n$$

لم ای که در زیر بیان می‌شود، نگرانی در مورد وجود حد فوق را برطرف می‌کند.

لم ۱.۲. *فرض کنید a_n دنباله ای با خاصیت زیر جمعی از اعداد حقیقی باشد. یعنی* $a_{m+n} \leq a_m + a_n$ *برای همه‌ی m و nهای حقیقی، آنگاه* $\lim_{n\to\infty} a_n/n$ *وجود دارد و مقدار آن برابر است با* $c = \inf a_n/n$.

برهان. برای هر m دلخواه و ثابت قرار دهید $n = qm + r$، که در آن q و r اعداد مثبتی هستند و $r < m$. از زیرجمعی بودن دنباله نتیجه می‌شود که $a_n \leq qa_m + a_r$ اگر برای m ثابت $n \to \infty$ آنگاه چون a_r تعداد متناهی مقدار را اختیار می‌کند، $\lim_{n\to\infty} \frac{a_r}{n} = ۰$ بنابراین خواهیم داشت $q/n \to ۱/m$ در نتیجه

$$\limsup_{n\to\infty} a_n/n \leq a_m/m$$

.

و چون این رابطه برای هر m دلخواه برقرار است، داریم: $\limsup_{n\to\infty} a_n/n \leq c$.
از آنجایی که برای هر n رابطه‌ی $a_n/n \geq c$ درست است، داریم:

$$c \leq \liminf_{n\to\infty} a_n/n$$

در نتیجه حکم برقرار است.[۳]
حد عبارت $h(f,\alpha)$ را آنتروپی نگاشت f مربوط به پوشش α می نامیم. واضح است که

$$۰ \leq h(f,\alpha) \leq H(\alpha)$$

از روابط (۱.۲)و (۳.۲) رابطه‌ی زیر نتیجه می‌شود: