۶/

بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه فردوسی مشهد

دانشکده علوم ریاضی

رساله برای دریافت درجهٔ کارشناسی ارشد

ریاضی کاربردی

عنوان :

قضایایی در تبدیلات لاپلاس چند بعدی وکاربرد آنها

استاد راهنما :

دکتر جعفر صابری نجفی

استاد مشاور :

دکتر محمد هادی فراهی

پژوهش و نگارش :

سید محمود حسینی

اسفند ماه ۱۳۷۶

دانشکده علوم ریاضی

بسمه تعالی

دانشگاه فردوسی مشهد
دانشکده علوم ریاضی

صورتجلسهٔ دفاع پایان نامه کارشناسی ارشد

جلسهٔ دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد آقای/خانم محمود حسینی دانشجوی رشته ریاضی کاربردی
در تاریخ ۷۶/۱۲/۲۵ باحضور داوران برگزارگردید ونامبرده از پایان نامه کارشناسی ارشد خود تحت عنوان :

قضایایی در تبدیلات لاپلاس چند بعدی و کاربرد آنها

با بیان خلاصه ای از تحقیقات وپاسخ به سئوالات داوران دفاع نمودند و بانمرهٔ به عدد(۱۸٫۷۵) و بحروف (هیجده و هفتاد و پنج صدم) معادل عالی قبول/مردود شدند

هیأت داوران

	نام ونام خانوادگی	دانشگاه	مرتبهٔ علمی	امضا
۱-استاد راهنما:	آقای دکتر جعفرصابری نجفی	دانشگاه فردوسی مشهد	استادیار	
۲-استاد مشاور:	آقای دکترمحمد هادی فراهی	دانشگاه فردوسی مشهد	استادیار	
۳-داور ۱ :	آقای دکترعلی باباخانی	دانشکده فنی دانشگاه تهران	استادیار	
۴-داور ۲ :	آقای دکتراصغر کرایه چیان	دانشگاه فردوسی مشهد	استادیار	
۵-نماینده تحصیلات تکمیلی و مدیرگروه ریاضی :	آقای دکترعلی وحیدیان کامیاد		دانشیار	

تقدیم به سرمایه‌های گرانبهای زندگیم

پدر و مادر عزیزم

که وجود مقدسشان چون روح آب و چشمهای مهربانشان چون آئینهٔ آفتاب، روشنگر راهی است که می‌پیمایم.

آنان که از ژرفای نهاد دوستشان دارم. عزیزانی که سعادت و سرافرازی امروزم را مدیون سالهای رنج و زحمت بیدریغشان هستم.

و آنچه امروز به دست پر مهرشان می‌سپارم تنها تحفه‌ایست ناچیز به پاس عاطفهٔ سرشار و محبت بیدریغشان.

و تقدیم به

همسر مهربان و فداکارم که در طول تدوین این پایان‌نامه مشوق من بود.

تقدیر و تشکر

حمد و سپاس بی پایان خداوندی را که زبان از عنایت شکرش قاصر است، و خرد در ژرفای معرفتش عاجز، او که مهربان است، و حقیر را به اتمام دوره‌ای از تحصیلاتم توفیق کرامت فرمود.

به مصداق حدیث : من علمنی حرفاً فقد صیرنی عبداً. از استاد گرانقدرم **جناب آقای دکتر جعفر صابری نجفی** که در تمام مراحل پژوهش و تدوین و گردآوری پایان نامه راهنما و مشوق اینجانب بوده‌اند صمیمانه تشکر می‌نمایم.

از **آقای دکتر محمد هادی فراهی** که از مشاورهٔ ایشان بهره‌مند بوده‌ام تشکر می‌کنم.

به علاوه از جناب آقای دکتر علی باباخانی استادیار دانشکدهٔ مهندسی دانشگاه تهران و دکتر اصغر کرایه چیان که داوری این رساله را به عهده داشته‌اند و از دکتر وحیدیان مدیرگروه ریاضی و استاد گرانقدر محمد رضا طوسی و یکایک استادانی که در طول دوران تحصیلات دانشگاهی افتخار حضور در محضر آنان را داشته و از دانش ایشان بهره‌مند شده‌ام، قدردانی می‌کنم.

از سرکار خانم تهرانی کمال تشکر را دارم.

ضمناً از دوستان گرامی آقایان غلامرضا عباسپور و امید سلیمانی‌فرد و اکبر هاشمی و کارکنان کتابخانه آقایان **اتحاد** و داودی‌نژاد و آقای خالق وردی و مسئولین آزمایشگاه کامپیوتر و مسئولین بخش زیراکس دانشکدهٔ علوم ریاضی تشکر و قدردانی می‌شود.

همچنین از آقای سید محسن خجسته حسینی که زحمت تایپ این رساله را عهده‌دار بودند تشکر و قدردانی می‌کنم.

سید محمود حسینی

چکیده

موضوع این رساله اثبات قضایایی در تبدیلات لاپلاس و تبدیلات معکوس لاپلاس چند بعدی است.

تبدیل لاپلاس تابع حقیقی $f(x)$ بصورت $F(s)=\int_0^\infty exp(-sx)\,f(x)\,dx$ تعریف می‌شود همچنین بطور مشابه تبدیل لاپلاس تابع چند متغیره حقیقی $f(\bar{x})$ را با $F(\bar{s})$ نشان داده و داریم

$$F(\bar{s})=\int_0^\infty\ldots\int_0^\infty exp(-\bar{s}.\bar{x})\,f(\bar{x})\,dx_1\ldots dx_n$$

می‌خواهیم تبدیلات لاپلاس چندبعدی با تابع اولیه های مختلف که ذیلاً به برخی از آنها اشاره می‌شود را بدست آوریم

$$\frac{F[(1/x_1+1/x_2+\ldots+1/x_n)^{1/2}]}{(x_1x_2\ldots x_n)^{1/2}},\quad \frac{F[2^{-6}(1/x_1+\ldots+1/x_n)^2]}{(x_1x_2\ldots x_n)^{1/2}}$$

$$\frac{F(1/x_1+\ldots+1/x_n)}{(x_1x_2\ldots x_n)^{1/2}} \text{ و} \ldots$$

روش تحقیق بر این اساس است که فرض می‌کنیم تبدیل لاپلاس یک تابع اولیه معلوم باشد سپس با بکارگیری تابع نتیجه حاصل از آن تحت شرایطی مرتبط با آن به تابع اولیه هایی با آرگومانهای مختلف خواهیم رسید نتایج حاصل نه تنها به توضیح و تکمیل جدول تبدیل لاپلاس دوبعدی منجر خواهد شد، بلکه تبدیلات لاپلاس توابعی را در سه بعدی و چند بعدی که به باور ما فرمولهای جدیدی هستند را ارائه خواهد داد.

فهرست مطالب

عنوان **صفحه**

فصل اول :مقدمات و پیش نیاز ها

عنوان	صفحه

عنوان صفحه

فصل چهارم :قضایایی در تبدیلات لاپلاس و تبدیلات معکوس لاپلاس n بعدی و کاربرد آنها

صفحه **عنوان**

فصل پنجم: تعمیم برخی از قضایای فصول ۳ و ۴

فصل اوّل

مقدمات و پیشنیازها

۱.۱ پیشگفتار

نظریهٔ تبدیلات لاپلاس بطور روز افزون در خدمت ریاضی، مکانیک و علوم مهندسی بوده است. تبدیلات لاپلاس کاربرد وسیعی در حل معادلات انتگرالی و معادلات دیفرانسیل دارد. روشهای تبدیلات لاپلاس به عنوان روش محاسباتی مشهور است که زمینهٔ آسان و مؤثری را در حل مسائلی که در مهندسی و علوم ظاهر می‌شوند، فراهم می‌سازد.

آنچه در حال حاضر دراین نظریه مهم است به دست آوردن تبدیلات لاپلاس دو بعدی و سه بعدی و چند بعدی و یافتن کاربردهای آنها است. در سالهای اخیر تعمیم تبدیلات لاپلاس به چند بعدی مورد نظر بوده است، در این رساله، سعی اصلی ما بر آن است که با استفاده از تبدیلات لاپلاس یک یا دو بعدی معلوم، تبدیلات لاپلاس جدیدی را در فضای nبعدی به دست آوریم.

این رساله شامل پنج فصل است. در فصل اوّل پیش نیازها آورده شده است و در فصل دوم به بیان و اثبات چند قضیه در تبدیلات لاپلاس سه بعدی وکاربرد آنها پرداخته شده است. متن اصلی این

قضایا از مقالات پرفسور دهیا گرفته شده است،[۴] و [۵] و [۶] و [۷] سپس در فصل سوّم و چهارم، به بیان و اثبات قضایایی در تبدیلات لاپلاس nبعدی می‌پردازیم. بعضی از کاربردهای این قضایا را با انتخاب، $n = 2$ و با ذکر مثالهائی نشان داده‌ایم، و هر جاکه نتیجه مثال جدید نبوده است صحت آنرا با مقایسه با فرمولهای موجود در جداول تبدیلات لاپلاس دوبعدی [۳] تحقیق کرده‌ایم. در فصل پنجم سعی ما بر این بوده است که این روش را در حالت کلی تعمیم دهیم، بدین معنی که، فرض می‌کنیم تبدیلات لاپلاس nبعدی مفروض باشند، سپس قضایا را به حالت خاص‌تر بر می‌گردانیم، یعنی با مفروض بودن تبدیلات لاپلاس دوبعدی، تبدیلات لاپلاس nبعدی را به دست می‌آوریم.

۲.۱ سیر تاریخی

پیر سیمسون دولاپلاس (۱۷۴۹-۱۸۲۷) ریاضیدان و منجّم نظری فرانسوی است. او در ۱۸۱۲ میلادی تبدیل لاپلاس را به صورت زیر تعریف نمود

$$\varphi(s) = \int_0^\infty exp(-sx)\, f(x)\, dx$$

در اوایل قرن بیستم افرادی نظیر **بروموویچ ـکارسون** [۳]، شروع به حل معادلات دیفرانسیل و معادلات انتگرالی با استفاده از تبدیلات لاپلاس و نظریه توابع مختلط نمودند، کارسون و بروموویچ کار با تبدیلات لاپلاس تابعی نظیر $f(x)$ را شروع کردند، هرگاه فرض کنیم تبدیل کارسون ـ لاپلاس تابعی مانند $f(x)$ تابع $F(s)$ باشد، آنگاه آنرا به صورت زیر تعریف می‌کنند

$$F(s) = s\int_0^\infty exp(-sx)\, f(x)\, dx \qquad (1.1)$$

کارسون در حالت خاص بحث رابطهٔ (۱.۱) را بعنوان یک معادله انتگرالی برای وقتی که تابع $f(x)$ معلوم نباشد ولی $F(s)$ در دست باشد انجام داد و بروموویچ نظریه‌ای متفاوتی را بشرح زیر شروع

کرد، بدین معنی که از انتگرال مختلط مفروض زیر

$$f(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}exp\,(sx)\,\frac{F(s)}{s}\,ds \qquad (۲.۱)$$

به این نتیجه که رابطهٔ (۲.۱) جواب معادلهٔ انتگرال (۱.۱) است و بالعکس رسید.

کاربرد های وسیع تبدیلات لاپلاس در دههٔ ۱۹۲۰ باعث بوجود آمدن حساب عملیاتی تبدیلات دو بعدی شد، این کار توسط **هامبرت** [۸] صورت گرفت **جاگر** [۹] توانست مسائل انتقال حرارت را با شرایط مرزی حل کنند.

ولکر [۱۰] روشهایی را در حساب عملیاتی چند متغیره یافت که باعث حل معادلات دیفرانسیل با توابع خاص شد و بالاخره در سال ۱۹۶۲ **دتکین** [۳] و سال ۱۹۹۲ **برایچکف** [۲] کتابهایی را در زمینهٔ تبدیلات لاپلاس دوبعدی منتشر نمودند که در آن خاصیت های جدیدی از این تبدیلات بحث شده است.

برایچکف و هالیدک و دهیا مقالاتی در زمینه تبدیلات لاپلاس nبعدی منتشر کردند، بیشترین مقالات در این زمینه توسط **پرفسور دهیا** [۴] و [۵] و [۶] و [۷] منتشر شده است.

۳.۱ توضیحاتی در چهارچوب پایان نامه

تبدیل لاپلاس تابع چند متغیره $f(\bar{x})$ با

$$F(\bar{s})=\int_0^\infty\ldots\int_0^\infty exp(-\bar{s}.\bar{x})\,f(\bar{x})\,dx_1\ldots dx_n$$

تعریف می‌شود.

تابع $f(\bar{x})$ و $F(\bar{s})$ را به ترتیب تابع اولیه (تابع ***Original***) و تابع نتیجه گویند.

می‌خواهیم تبدیلات لاپلاس با تابع های اولیه مختلف که ذیلاً به برخی از آنها اشاره می‌شود را به دست آوریم.

$$\frac{F[(1/x_1 + 1/x_2 + \dots + 1/x_n)^{1/2}]}{(x_1 x_2 \dots x_n)^{1/2}}, \quad \frac{F[2^{-6}(1/x_1 + \dots + 1/x_n)^2]}{(x_1 x_2 \dots x_n)^{1/2}}$$

$$\frac{F(1/x_1 + \dots + 1/x_n)}{(x_1 x_2 \dots x_n)^{1/2}} \text{ و} \dots$$

برای این منظور در فصل یک به معرفی چند نماد و بیان چندین قضیه می‌پردازیم همچنین تبدیلات لاپلاس یک بعدی و چند بعدی مورد نیاز را معرفی می‌کنیم.

در فصل دوم به اثبات قضایایی در تبدیلات لاپلاس سه بعدی می‌پردازیم و سپس مثالی را بعنوان کاربرد برای این قضایا خواهیم آورد.

فصل سوم را به اثبات قضایایی در تبدیلات کارسون ـ لاپلاس nبعدی اختصاص داده‌ایم و سپس با فرض $n = 2$ به نتایج فرعی خواهیم رسید که برخی از آنها در کتاب دتکین [۳]آمده است و برای هر قضیه مثالی در حالت nبعدی آورده شده است.

در فصل چهارم مانند فصل سوم قضایایی را در تبدیلات لاپلاس و تبدیلات معکوس لاپلاس چند بعدی بیان و ثابت می‌کنیم.

روش تحقیق در فصل های ۲ و ۳ و ۴ بر این اساس است که فرض می کنیم تبدیل لاپلاس یک تابع هدف اولیه معلوم باشد، سپس با بکارگیری تابع نتیجه حاصل از آن تحت شرایطی مرتبط با آن به تابع هدف نهایی با آرگومانهای مختلف خواهیم رسید. نتایج حاصل نه تنها به توضیح و تکمیل جدول تبدیل لاپلاس دوبعدی منجر خواهد شد، بلکه تبدیلات لاپلاس توابعی را در سه بعدی و چند بعدی که به باور ما فرمولهای جدیدی هستند را ارائه خواهد داد.

و بالاخره در فصل پنجم به تعمیم این تکنیک خواهیم پرداخت، یعنی فرض می‌کنیم تبدیل لاپلاس $f(\bar{x})$ معلوم باشد سپس با بکارگیری تابع $F(\bar{s})$ تابع اولیه نهایی را با آرگومانهای مختلف به دست می‌آوریم. که به نظر می‌رسد مطالب این فصل جدید می‌باشد.

۴.۱انگیزه و اهداف پایان نامه

در بین تبدیلات انتگرالی تبدیلات لاپلاس از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. مسائل زیادی وجود دارند که حل آنها بوسیله تبدیلات انتگرالی بجزء تبدیل لاپلاس بسهولت انجام نمی‌گیرد ولی از طریق کاربرد این تبدیل به آسانی قابل حل می‌باشند. مسائلی که با معادلات دیفرانسیل و همچنین معادلات انتگرالی مرتبط می‌شوند با بکار بردن تبدیل لاپلاس یک بعدی و دوبعدی و یا سه‌بعدی براحتی قابل حل میباشند. علیرغم مطالعات وسیعی که در سالهای ۱۹۲۰ و به بعد در زمینهٔ تبدیلات لاپلاس چند بعدی صورت گرفته است، هنوز جدولی ولو ناقص حتی برای محاسبه تبدلات لاپلاس سه بعدی در دسترس نیست.

هدف ما از انجام این پایان‌نامه، اثبات قضایائی چند در رابطه با تبدیلات لاپلاس سه بعدی و چند بعدی است که کاربرد نتیجهٔ آنها به فرمولهایی برای محاسبهٔ تبدیلات لاپلاس دو یا سه و یا چند بعدی منتج خواهد شد. در انجام این مهمّ فرض ما بر این است که تبدیل لاپلاس یک بعدی تابع اولیه موجود باشد و سپس با بکارگیری تابع نتیجهٔ حاصل از آن و با افزودن شرطهای جدید، به تابع اولیه نهایی با آرگومانهای مختلف خواهیم رسید.