چکیده

سه مسئله کلی درباره‌ی کوهمولوژی از یک جبر لی پوچتوان (حقیقی یا مختلط) را مطرح می‌کنیم، ابتدا تعیین دقیق اعداد بتی، سپس تعیین توزیع اعداد بتی و سرانجام تعیین کران‌های پایین خوب برای این اعداد. برای توسیع‌های یک بعدی از جبر لی هایزنبرگ اعداد بتی را دقیقاً تعیین می‌کنیم، سپس نشان می‌دهیم که برخی خانواده‌ها در این رده یک توزیع عدد بتی $M-$شکلی دارند و اولین مثال‌ها را با یک توزیع عدد بتی نامتعارف‌تر می‌سازیم. سرانجام ساختمان همولوژی (کوهمولوژی) برای جبرهای لی دوآبلی شکافته شدنی را بررسی می‌کنیم، به این ترتیب TRC[۱] (حدس رتبه تورال) برای این دسته از جبرها را ثابت می‌کنیم.

واژه‌های کلیدی: جبر لی، کوهمولوژی، اعداد بتی.

---

[۱] Toral Rank Conjecture

فهرست مندرجات

۰ **مقدمه** ۱

۱ **مقدمات و پیشنیازها** ۳

۱.۱ معرفی جبر لی و مثال‌هایی از آن ۳

۱.۲ ایدآل‌ها و همریختی‌ها ۱۱

۱.۳ مدول برای جبرهای لی ۲۰

۱.۴ جبر لی پوچتوان ۲۴

۱.۵ جبر پوششی جهانی ۲۸

۲ **همولوژی و کوهمولوژی جبرهای لی** ۳۲

۲.۱ تعاریف مقدماتی ۳۲

۲.۲ تابعگون‌های مشتق‌شده ۳۸
۳.۲ همولوژی و کوهمولوژی ۴۵
۴.۲ توسیع‌های شکافنده ۴۷
۵.۲ تحلیل آزاد میدان زمینه ۵۰
۶.۲ جبر لی مدرج ۵۵
۳ رفتار عدد بتی برای جبرهای لی پوچتوان ۵۹
۱.۳ سه مسئله مربوط به اعداد بتی ۶۱
۲.۳ کوهمولوژی از توسیع‌های یک‌بعدی از جبر لی هایزنبرگ ۷۶
۳.۳ ارائه شیوه‌ای جدید برای TRC ۸۵
۴ واژه‌نامه‌ی فارسی به انگلیسی ۹۱
۵ واژه‌نامه‌ی انگلیسی به فارسی ۹۶

فصل ۰

مقدمه

در سال ۱۹۴۵ آیلینبرگ و مک‌لین[۱] هنگام مطالعه‌ی گروه‌های کوهمولوژی فضاهای توپولوژیک، به ارتباط بین گروه بنیادی فضا و گروه‌های کوهمولوژی آن پی بردند و این یافته نقطه‌ی آغاز کوهمولوژی گروه‌ها شد. در همان زمان هاف [۲] با استفاده از تعاریف مستقل، همولوژی و کوهمولوژی گروه‌ها را مشابه با تعاریف جبری امروزی معرفی نمود.

کوهمولوژی جبرهای لی اولین‌بار در سال ۱۹۴۸ توسط شوالیه [۳] و آیلینبرگ معرفی گردید. هدف آن‌ها محاسبه گروه‌های کوهمولوژی یک گروه لی فشرده (از دیدگاه توپولوژیکی) با استفاده از جبر لی وابسته به آن بود. آن‌ها ایده خود برای این کار را از مقاله کارتان [۴] و درام [۵] در سال ۱۹۲۸، که در مورد ارتباط گروه‌های کوهمولوژی یک گروه لی و جبر لی وابسته به آن بود، اتخاذ کرده بودند.

در فصل اول، تعاریف مورد نیاز از جبرهای لی برای مطالعه‌ی این پایان‌نامه گردآوری

---

[۱] Eilenberg-Mac Lane

[۲] Hopf

[۳] Chevalley

[۴] Cartan

[۵] De Rham

شده است. این فصل مشتمل بر پنج بخش می‌باشد. پس از ارائه بعضی تعاریف و نتایج مقدماتی درباره‌ی جبرهای لی، مطالبی درباره‌ی جبر پوششی جهانی یک جبر لی ارائه می‌شود.

در فصل دوم، مقدمات همولوژیکی این پایان‌نامه که در فصل بعد مورد استفاده قرار می‌گیرد آورده شده است. در بخش‌های پایانی این فصل گذری کوتاه بر کوهمولوژی از یک جبر لی خواهیم داشت.

در فصل سوم، سه مسئله مربوط به اعداد بتی را مطرح می‌کنیم. سپس کوهمولوژی از توسیع‌های یک بعدی از جبر لی هایزنبرگ را محاسبه می‌کنیم و در نهایت همولوژی (کوهمولوژی) را برای جبرهای لی دوآبلی شکافته‌شدنی بررسی می‌کنیم.

فصل ۱

مقدمات و پیشنیازها

در این فصل، تعاریف و مفاهیم ابتدایی مورد نیاز برای مطالعه این پایان‌نامه گردآوری شده است. این فصل مشتمل بر پنج بخش می‌باشد. در بخش اول، بعضی از تعاریف و مفاهیم ابتدایی درباره‌ی جبرهای لی آورده شده است. در بخش دوم، همریختی از یک جبر لی را تعریف می‌کنیم و قضایای یکریختی را بیان می‌کنیم. در بخش سوم مدول روی یک جبر لی را معرفی می‌کنیم . در بخش چهارم جبرهای لی پوچتوان را معرفی می‌کنیم. در بخش پنجم نیز جبر پوششی جهانی یک جبر لی را با یک روش ساختاری بیان می‌کنیم. مطالب این فصل از مراجع [۱۱]، [۲۴]، [۱۴] و [۲۱] جمع‌آوری شده است.

۱.۱ معرفی جبر لی و مثال‌هایی از آن

در این بخش، گذری کوتاه بر برخی تعاریف و نتایج اولیه‌ی جبرهای لی خواهیم داشت که در بخش‌های آتی مورد استفاده قرار می‌گیرند.
در ابتدا به تعریف جبر لی و ارائه‌ی مثال‌هایی از آن می‌پردازیم.

تعریف ۱.۱.۱ فرض کنید V یک فضای برداری روی میدان K باشد. در این صورت نگاشت $f : V \times V \longrightarrow V$ یک **نگاشت دو خطی** نامیده می‌شود هرگاه به ازای هر $x, y, z \in V$ و هر $a, b \in K$،

الف) $f(ax + by, z) = af(x, z) + bf(y, z)$،

ب) $f(x, ay + bz) = af(x, y) + bf(x, z)$.

تعریف ۲.۱.۱ فرض کنید A یک فضای برداری روی میدان K باشد. در این صورت هرگاه نگاشتی دوخطی مانند f روی A تعریف شده باشد، A یک **جبر** روی K یا به اختصار یک جبر نامیده می‌شود. هرگاه تردیدی در مورد وجود f وجود نداشته باشد، $f(a, b)$ به اختصار با ab نشان داده می‌شود و به آن ضرب دو عضو a و b می‌گوییم. A یک **جبر شرکت‌پذیر** نامیده می‌شود هرگاه به ازای هر $a, b, c \in A$ داشته باشیم $(ab)c = a(bc)$.

تعریف ۳.۱.۱ فرض کنیم F یک میدان باشد. یک **جبر خطی** بر روی میدان F فضای برداری مانند V بر روی F همراه با عملی اضافی به نام ضرب برداری است که هر جفت از بردارهای α و β از V را به بردار $\alpha\beta$ از V به نام حاصل‌ضرب α و β چنان وابسته می‌سازد که

الف) ضرب شرکت‌پذیر است:

$$\alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma,$$

ب) ضرب نسبت به جمع پخش‌پذیر است:

$$\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma \ , \ (\alpha + \beta)\gamma = \alpha\gamma + \beta\gamma,$$

پ) به ازای هر اسکالر c از F

$$c(\alpha\beta) = (c\alpha)\beta = \alpha(c\beta).$$

تعریف ۴.۱.۱ فضای برداری L روی میدان K همراه با نگاشت دوخطی $L \times L \longrightarrow L$: $[-,-]$ که $[x,y] \longmapsto (x,y)$، **یک جبر لی**[۱] روی میدان K نامیده می‌شود هرگاه به ازای هر $x,y,z \in L$ در شرایط زیر صدق کند:

الف) $[x,y] = -[y,x]$ (پادتقارنی)

ب) $J(x,y,z) := [[x,y],z] + [[y,z],x] + [[z,x],y] = \circ$ (اتحاد ژاکوبی[۲]).

$[x,y]$ **حاصلضرب لی (یا جابجاگر یا براکت لی[۳])** x و y نامیده می‌شود.
جبر لی L **از بعد متناهی** نامیده می‌شود هرگاه L به عنوان فضای برداری از بعد متناهی باشد.

نکته ۵.۱.۱ در تعریف بالا شرط (الف) با شرط $[x,x] = \circ$ به ازای هر x معادل است زیرا هرگاه (الف) برقرار باشد، قرار می‌دهیم $x = y$ و می‌بینیم که هرگاه مشخصه‌ی میدان K مساوی ۲ نباشد آنگاه داریم $[x,x] = \circ$. بر عکس هرگاه به ازای هر $x \in L$، $[x,x] = \circ$ باشد، آنگاه داریم:

$$\circ = [x+y,x+y] = [x,x] + [x,y] + [y,x] + [y,y] = [x,y] + [y,x]$$

پس $[x,y] = -[y,x]$.

مثال ۶.۱.۱ فرض کنید A یک جبر شرکت‌پذیر باشد. اگر به ازای هر $a,b \in A$، قرار دهیم:

$$[a,b] = ab - ba,$$

به سادگی بررسی می‌شود که A همراه با این ضرب دارای ساختار جبر لی می‌باشد. جبر

---
[۱] Lie algebra
[۲] Jacobi identity
[۳] Lie beracket or commutator

لی با این ساختار را با $\mathcal{L}A$ نمایش می‌دهیم. آدو[۴] نشان داد که هر جبر لی روی میدانی از مشخصه‌ی صفر را می‌توان به عنوان زیرجبری از چنین جبر لی‌ای در نظر گرفت.

مثال ۷.۱.۱

الف) فرض کنید $\mathbf{gl}(n, K)$ فضای ماتریس‌های $n \times n$ روی میدان K باشد. به ازای هر $A, B \in \mathbf{gl}(n, K)$، حاصل‌ضرب لی این دو عضو را به شکل زیر در نظر بگیرید:

$$[A, B] = AB - BA,$$

بنابر مثال قبل $\mathbf{gl}(n, K)$ همراه با ضرب فوق دارای ساختار جبر لی روی میدان K می‌باشد. در ضمن AB همان حاصل‌ضرب معمولی ماتریس‌های A و B است.

ب) فرض کنید V یک فضای برداری روی میدان K باشد. $\mathbf{gl}(V)$، مجموعه‌ی همه‌ی تبدیلات خطی از V به V، با ضرب زیر دارای ساختار جبر لی است:

به ازای هر $f, g \in \mathbf{gl}(V)$،

$$[f, g] = f \ o \ g - g \ o \ f.$$

تعریف ۸.۱.۱ فرض کنید L یک جبر لی باشد. در این صورت نگاشت خطی $f : L \longrightarrow L$ یک **مشتق‌گیری**[۵] از L نامیده می‌شود هرگاه به ازای هر $x, y \in L$ داشته باشیم:

$$f([x, y]) = [x, f(y)] - [f(y), x].$$

به ازای هر $x \in L$ مشتق‌گیری adx، به ازای عضو دلخواه $y \in L$ با ضابطه‌ی

---

[۴] Ado

[۵] Derivation

$$adx(y) = [x, y],$$

یک **مشتق‌گیری داخلی**[۶] L نامیده می‌شود. فضای همه‌ی مشتق‌گیری‌ها و مشتق‌گیری‌های داخلی L را به ترتیب با $Der(L)$ و $Ad(L)$ نشان می‌دهیم. این دو فضا با ضربی مشابه قسمت (ب) مثال بالا دارای ساختار جبر لی هستند.

مثال ۹.۱.۱ فضای برداری $\mathbb{R}^3$ را در نظربگیرید. به سادگی بررسی می‌شود که $\mathbb{R}^3$ همراه با ضرب تعریف شده‌ی زیر دارای ساختار جبر لی می‌باشد:

به ازای هر $X = (x_1, x_2, x_3)$ و هر $Y = (y_1, y_2, y_3)$ در $\mathbb{R}^3$،

$$[X, Y] = X \times Y = (x_2y_3 - x_3y_2, x_3y_1 - x_1y_3, x_1y_2 - x_2y_1),$$

که در آن $X \times Y$ همان ضرب خارجی دو بردار X و Y می‌باشد.

نکته ۱۰.۱.۱ دقت کنید که $[[x, y], z]$ الزاماً، برابر $[x, [y, z]]$ نیست. به عنوان مثال فرض کنید $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$، $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ و $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. در این صورت با استفاده از مثال ۷.۱.۱ قسمت (الف) داریم: $[[A, B], C] = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$، در حالی که $[A, [B, C]] = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$. بنابراین ضرب لی در حالت کلی شرکت پذیر نیست.

تعریف ۱۱.۱.۱ فضای برداری حقیقی $H(n)$ از بعد $2n + 1$ با پایه‌ی $\{x_i, y_i, w \mid 1 \leq i \leq n \text{ به ازای هر}\}$ که تنها حاصل‌ضرب‌های لی ناصفر روی عناصر پایه‌اش به صورت $[x_i, y_j] = -[y_i, x_i] = w$ تعریف می‌شود (سایر ضرب‌های لی صفر می‌باشد)، **جبر لی هایزنبرگ**[۷] نامیده می‌شود. به سادگی می‌توان دید که $H(n)$ زیرفضای $gl(n + 1, \mathbb{R})$ است که توسط عناصری به صورت زیر پدید می‌آید:

---

[۶] Inner derivation

[۷] Heisenberg Lie algeba

$$H(n) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n & w \\ 0 & \dots & 0 & y_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & \dots & 0 & y_n \end{pmatrix} \quad | \quad x_i, y_i.w \in \mathbb{R} \right\}.$$

تعریف ۱۲.۱.۱ فرض کنید L یک جبر لی از بعد متناهی روی میدان K با پایه‌ی $\beta = \{x_1, \dots, x_n\}$ باشد. به ازای هر $1 \leq i, j \leq n$ اسکالرهایی مانند $a_{ij}^k \in K$ وجود دارند به طوری که

$$[x_i, x_j] = \sum_{k=1}^{n} a_{ij}^k x_k,$$

مجموعه اسکالرهای a_{ij}^k، **ثابت‌های ساختاری**[8] برای L نسبت به پایه‌ی β نامیده می‌شوند. این اسکالرها وابسته به انتخاب پایه‌ی β می‌باشند و به طور کلی پایه‌های متفاوت ثابت‌های ساختاری متفاوت را به دست می‌دهند.

نکته ۱۳.۱.۱ بنابر خطی بودن ضرب لی، برای مشخص نمودن ساختار ضرب در L، تنها کافی است مقادیر a_{ij}^k ها معلوم شوند. با توجه به شرایط $[x_i, x_i] = 0$ و $[x_i, x_j] = -[x_j, x_i]$ در جبرهای لی، کافی است این ثابت‌ها را به ازای $1 \leq i < j \leq n$ مشخص نمود.

تعریف ۱۴.۱.۱ فرض کنید L یک جبر لی روی میدان K باشد. در این صورت

الف) زیرفضای برداری $H \subseteq L$ **زیر جبرلی** [9] از L نامیده می‌شود و با نماد $H \leq L$ نشان داده می‌شود هرگاه به ازای هر $x, y \in H$، $[x, y] \in H$.

به عبارت دیگر H زیرجبر لی است هرگاه با ضرب القا شده از L دارای ساختار جبر لی باشد.

---

[8] Structure constants

[9] Subalgebra

ب) زیرجبر I **ایدآل**[۱۰] L نامیده می‌شود و با $I \trianglelefteq L$ نشان داده می‌شود هرگاه به ازای هر $y \in L$ و هر $x \in I$، $[x,y] \in I$.

لازم نیست بین ایدآل‌های چپ و راست تمایز قائل شویم زیرا $[x,y] = -[y,x]$، بنابراین در نظریه جبرهای لی تفاوتی بین ایدآل‌های چپ و ایدآل‌های راست وجود ندارد، یعنی هر ایدآل دوطرفه است.

جبر لی L خودش یک ایدآل L است، $\{0\}$ نیز یک ایدآل L است. $\{0\}$ و L **ایدآل‌های بدیهی**[۱۱] L نامیده می‌شوند.

جبر لی L **ساده**[۱۲] نامیده می‌شود، هرگاه تنها ایدآل‌های آن، ایدآل‌های بدیهی باشند.

ج) اگر I ایدآلی از جبر لی L باشد، آنگاه I یک زیر فضای L است. همچنین به ازای هر $z \in L$ همدسته‌ی $z + I = \{z + x \mid x \in I\}$ است و فضای برداری خارج‌قسمتی

$$\frac{L}{I} = \{z + I \mid z \in L\}.$$

ادعا می‌کنیم که براکت لی روی L/I به ازای هر $w, z \in L$ به صورت

$$[w + I, z + I] := [w, z] + I,$$

تعریف می‌شود.

در اینجا براکت سمت راست براکت لی در L است.

برای اینکه مطمئن شویم براکت لی روی L/I خوش تعریف است باید نشان دهیم که $[w,z] + I$ تنها به همدسته‌های شامل w و z وابسته است.

---

[۱۰] Ideal

[۱۱] Trivial ideals

[۱۲] Simple

فرض کنیم $w+I=w'+I$ و $z+I=z'+I$. در این صورت $w-w'\in I$ و $z-z'\in I$. بنابر دوخطی بودن براکت لی در L،

$$\begin{aligned}[w,z] &= [w'+(w-w'),z'+(z-z')] \\ &= [w',z']+[w-w',z']+[w',z-z']+[w-w',z-z'],\end{aligned}$$

که سه جمعوند آخر در I هستند. بنابراین $[w'+I,z'+I]=[w',z']+I$، به طور مشابه ثابت می‌شود که $[w+I,z+I]=[w,z]+I$ و طبق فرض $w+I=w'+I$ و $z+I=z'+I$ پس داریم $[w'+I,z'+I]=[w,z]+I$.

L/I با ضرب لی بالا یک **جبر لی خارج‌قسمتی (یا فاکتور)**[۱۳] از L بوسیله‌ی I نامیده می‌شود.

د) اگر $X\subseteq L$، آنگاه اشتراک تمام زیرجبرهای L که شامل X هستند **زیرجبر تولید شده توسط** X نامیده می‌شود و با نماد $\langle X\rangle$ نشان داده می‌شود. در واقع $\langle X\rangle$، کوچکترین زیرجبر از L شامل X است.

ه) زیرمجموعه X یک **مجموعه مولد** برای L نامیده می‌شود هرگاه $L=\langle X\rangle$. جبر لی L **با تولید متناهی** نامیده می‌شود هرگاه X مجموعه‌ای متناهی باشد. هرگاه X یک مجموعه‌ی مولد برای L با کمترین عدد اصلی باشد، آنگاه $Card(X)$ **تعداد مولد کمین** L نامیده می‌شود و با $d(L)$ نشان داده می‌شود.

مثال ۱۵.۱.۱

الف) فرض کنیم $\mathbf{b}(n,K)$، $\mathbf{n}(n,K)$ و $\mathbf{sl}(n,K)$ به ترتیب فضای ماتریس‌های بالامثلثی، بالامثلثی اکید و ماتریس‌های با اثر صفر باشند. در این صورت هر سه

[۱۳] Quotient or factor algebra

زیرجبرهایی از $\mathbf{gl}(n,K)$ می‌باشند. یادآوری می‌کنیم که اثر یک ماتریس مربعی مجموع عناصر قطری‌اش است و $\mathbf{sl}(n,K)$ **جبرخطی خاص**[۱۴] نامیده می‌شود.

ب) $\mathbf{sl}(n,K)$ یک ایدآل $\mathbf{gl}(n,K)$ و $\mathbf{n}(n,K)$ یک ایدآل $\mathbf{b}(n,K)$ می‌باشند.

ج) هرگاه $charK \neq ۲$ باشد، آنگاه $\mathbf{sl}(۲,K)$ یک جبر لی ساده است. فرض کنیم $x = \begin{pmatrix} ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ \end{pmatrix}$، $y = \begin{pmatrix} ۰ & ۰ \\ ۱ & ۰ \end{pmatrix}$ و $h = \begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{pmatrix}$ یک پایه برای $\mathbf{sl}(۲,K)$ باشد، همچنین فرض کنید $[x,y] = h$، $[h,x] = ۲x$ و $[h,y] = -۲y$. فرض کنیم $I \neq ۰$ یک ایدآل از $\mathbf{sl}(۲,K)$ باشد و $ax+by+ch$ یک عضو ناصفر دلخواه از I باشد، adx را دوبار روی $ax+by+ch$ به کار می‌بریم بدست می‌آوریم $-۲bx \in I$ (در واقع $adx(adx(ax+by+ch))$ را محاسبه می‌کنیم و از طرفی طبق تعریف ۷.۱.۱ می‌دانیم $(adx(y) = [x,y])$. ady را دو بار روی $ax+by+ch$ به کار می‌بریم بدست می‌آوریم $-۲ay \in I$، بنابراین اگر a یا b ناصفر باشد، آنگاه I شامل هر دوی x یا y می‌باشد و در نتیجه $I = \mathbf{sl}(۲,K)$. از سوی دیگر اگر $a = b = ۰$، آنگاه $ch \in I \neq ۰$ و بنابراین $h \in I$ و دوباره $I = \mathbf{sl}(۲,K)$ نتیجه می‌شود. پس $\mathbf{sl}(۲,K)$ ساده است.

۲.۱ ایدآل‌ها و همریختی‌ها

قضیه ۱.۲.۱ (تناظر بین ایدآل‌ها):

فرض کنیم I یک ایدآل از جبر لی L باشد. تناظری دوسویی بین ایدآل‌هایی از جبر خارج‌قسمتی L/I و ایدآل‌هایی از L که شامل I هستند وجود دارد. این تناظر به شرح زیر می‌باشد؛

اگر J یک ایدآل L شامل I باشد، آنگاه J/I یک ایدآل از L/I است. برعکس، اگر H یک ایدآل از L/I باشد، آنگاه $J = \{z \in L \mid z + I \in H\}$ تنها ایدآل از L و شامل I

[۱۴] Special linear algebra

است و $J/I=H$.

برهان. فرض کنیم $H \trianglelefteq L/I$ باشد. در این صورت $J \supseteq I$ زیرا به ازای هر $a \in I$ داریم $a+I=I\in H$ در نتیجه $a\in J$. حال نشان می‌دهیم $J \trianglelefteq L$، به ازای هر $j\in J$ و هر $l\in L$ داریم $j+I\in H$ و چون $H \trianglelefteq L/I$ داریم $[j+I,l+I]=[j,l]+I\in H$ و طبق تعریف J داریم $[j,l]\in J$ پس $J \trianglelefteq L$ و همینطور طبق تعریف J داریم $J/I=H$.
نشان می‌دهیم J یکتاست. فرض کنید J' ایدآل دیگری از L با ویژگی‌های $J'\supseteq I$ و $J'/I=H$ باشد. ابتدا فرض کنیم $j'\in J'$. در این صورت $j'+I\in J'/I=H$ و طبق تعریف J، $j'\in J$ یعنی $J'\subseteq J$. از طرف دیگر هرگاه $j\in J$ باشد، آنگاه $j+I\in H=J'/I$ و درنتیجه $j\in J'$ پس $J\subseteq J'$. بنابراین داریم $J'=J$.
اثبات عکس روشن است زیرا اگر J یک ایدآل L شامل I باشد و فرض کنیم $a+I\in J/I$ و $b+I\in L/I$ باید نشان دهیم که $[a+I,b+I]\in J/I$. چون J یک ایدآل L است داریم $[a,b]\in J$ پس $[a,b]+I\in J/I$ از این رو J/I یک ایدآل از L/I است. ■

تعریف ۲.۲.۱ فرض کنید L_1 و L_2 دو جبر لی روی میدان K باشند. در این صورت همریختی $K-$مدولی $\varphi: L_1 \longrightarrow L_2$ یک **همریختی (لی)**[15] نامیده می‌شود هرگاه به ازای هر $x,y\in L_1$،

$$\varphi([x,y])=[\varphi(x),\varphi(y)].$$

توجه شود که در تساوی بالا براکت سمت چپ در L_1 و براکت سمت راست در L_2 می‌باشد.
همریختی φ **تکریختی** است هرگاه $Ker\varphi=0$ باشد. همچنین همریختی φ **برووریختی** است هرگاه $Im\varphi=L_2$. به علاوه همریختی φ **یکریختی** [16] نامیده می‌شود هرگاه

[15] Homomorphism
[16] Isomorphism

دوسویی[۱۷] (هم تکریختی و هم بروریختی) باشد. گروه همه‌ی یکریختی‌های L را با $Aut(L)$ نشان می‌دهند و مجموعه همه‌ی همریختی‌ها از L به خودش را با $End(L)$ نشان می‌دهیم.

نکته ۳.۲.۱ به آسانی دیده می‌شود که اگر $\varphi : L_۱ \longrightarrow L_۲$ یک همریختی باشد، آنگاه هسته‌ی φ، $Ker\varphi$، یک ایدآل از $L_۱$ است؛ در واقع اگر $x \in Ker\varphi$ $(\varphi(x) = ۰)$ و اگر $y \in L_۱$ عضو دلخواهی باشد، آنگاه $\varphi([x,y]) = [\varphi(x), \varphi(y)] = ۰$ پس $[x,y] \in Ker\varphi$.

به وضوح برد φ، $Im\varphi$، یک زیرجبر لی $L_۲$ می‌باشد. (فرض کنیم $x,y \in Im\varphi$ باشند. در این صورت $x',y' \in L_۱$ وجود دارند به طوری که $x = \varphi(x')$ و $y = \varphi(y')$. حال داریم:

$$\varphi[x',y'] = [\varphi(x'), \varphi(y')] = [x,y] \in Im\varphi.)$$

برای هر ایدآل I در L، همریختی $\pi : L \longrightarrow L/I$ با ضابطه‌ی $\varphi(x) = x + I$ بروریختی طبیعی نامیده می‌شود.

مثال ۴.۲.۱ یک همریختی بسیار مهم **همریختی الحاقی**[۱۸] است. اگر L یک جبر لی باشد، تعریف می‌کنیم:

$$ad : L \longrightarrow gl(L)$$

به ازای هر $x,y \in L$، قرار می‌دهیم $(\mathrm{adx})(\mathrm{y}) := [\mathrm{x,y}]$.

از دوخطی بودن براکت لی نتیجه می‌شود که نگاشت adx برای هر $x \in L$ خطی است. به دلیل یکسان، نگاشت $x \longmapsto adx$ نیز خطی است. بنابراین برای اینکه نشان دهیم ad یک همریختی است لازم است رابطه زیر را به ازای هر $x,y \in L$ بررسی کنیم:

$$ad([x,y]) = adx\ o\ ady - ady\ o\ adx,$$

[۱۷] Bijective

[۱۸] Adjoint homomorphism

معلوم می شود که این با اتحاد ژاکوبی معادل است.

قضیه ۵.۲.۱ قضایای یکریختی :

الف) اگر $\varphi : L_1 \longrightarrow L_2$ یک همریختی جبرهای لی باشد، آنگاه

$$\frac{L_1}{Ker\varphi} \cong Im\varphi.$$

ب) اگر I و J ایدآل‌هایی از جبر لی L باشند، آنگاه

$$\frac{I+J}{J} \cong \frac{I}{I\cap J}.$$

ج) اگر I و J ایدآل‌هایی از جبر لی L باشند به طوری که $I \subseteq J$، آنگاه J/I ایدآلی از L/I است و

$$\frac{L/I}{J/I} \cong \frac{L}{J}.$$

قسمت‌های (الف)، (ب) و(ج) از این قضیه به ترتیب **قضیه‌های اول، دوم و سوم یکریختی** نامیده می‌شوند.

برهان. الف):

نگاشت $\bar{\varphi} : L_1/Ker\varphi \longrightarrow Im\varphi$ را در نظر می‌گیریم به طوری که به ازای هر $x \in L_1$ داریم $\bar{\varphi}(x + Ker\varphi) = \varphi(x)$. ابتدا نشان می‌دهیم این نگاشت خوش تعریف است:

فرض کنیم $x + Ker\varphi = x' + Ker\varphi$، داریم

$$x - x' \in Ker\varphi \Rightarrow \varphi(x) - \varphi(x') = \varphi(x - x') = 0 \Rightarrow \varphi(x) = \varphi(x').$$

پوشایی $\bar{\varphi}$ واضح است. حال ثابت می‌کنیم که همریختی لی است:

$$\begin{aligned}
\bar{\varphi}((x + Ker\varphi) + (x' + Ker\varphi)) &= \bar{\varphi}((x + x') + Ker\varphi) \\
&= \varphi(x + x') = \varphi(x) + \varphi(x') \\
&= \bar{\varphi}(x + Ker\varphi) + \bar{\varphi}(x' + Ker\varphi)\cdot
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{\varphi}((x+Ker\varphi)(x'+Ker\varphi)) &= \bar{\varphi}((xx')+Ker\varphi)=\varphi(xx')=\varphi(x)\varphi(x')\\ &= \bar{\varphi}(x+Ker\varphi)\bar{\varphi}(x'+Ker\varphi)\cdot\end{aligned}$$

$$\bar{\varphi}(1_{L_1/Ker\varphi})=\bar{\varphi}(1_{L_1}+Ker\varphi)=\varphi(1_{L_1})=1_{L_2}.$$

$$\begin{aligned}\bar{\varphi}([x+Ker\varphi,x'+Ker\varphi]) &= \bar{\varphi}([x,x']+Ker\varphi)=\varphi([x+x'])=[\varphi(x),\varphi(x')]\\ &= [\bar{\varphi}(x+Ker\varphi),\bar{\varphi}(x'+Ker\varphi)]\cdot\end{aligned}$$

در نهایت ثابت می‌کنیم که $\bar{\varphi}$ یک به یک است:

فرض کنیم $\bar{\varphi}(x+Ker\varphi)=\bar{\varphi}(x'+Ker\varphi)$ در نتیجه

$$\varphi(x)=\varphi(x')\Rightarrow\varphi(x)-\varphi(x')=\varphi(x-x')=0$$

$$\Rightarrow x-x'\in Ker\varphi\Rightarrow x+Ker\varphi=x'+Ker\varphi.$$

نتیجه مورد نظر حاصل می شود.

ب):

نگاشت $\bar{\varphi}:I\longrightarrow(I+J)/J$ با ضابطه $\bar{\varphi}(i)=i+J$ (به ازای هر $i\in I$) را در نظر می‌گیریم. نشان می‌دهیم که همریختی لی است:

$$\begin{aligned}\bar{\varphi}(i+i') &= (i+i')+J=i+J+i'+J\\ &= \bar{\varphi}(i)+\bar{\varphi}(i')\cdot\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{\varphi}([i,i']) &= [i,i']+J=[i+J,i'+J]\\ &= [\bar{\varphi}(i),\bar{\varphi}(i')]\cdot\end{aligned}$$

اثبات پوشایی:

فرض کنیم $i'+j'+J\in(I+J)/J$. در این صورت $i'+j'+J=i'+J$ پس پوشایی نتیجه می‌شود.