بسمه تعالی .

مشخصات رساله/پایان نامه تحصیلی دانشجویان .

دانشگاه فردوسی مشهد

عنوان رساله/پایان نامه: مسائل مکان یابی ماکزیمم پوشش با سیستم های صف *M/M/1*، *M/G/1* و *M/M/k*

نام نویسنده: فروغ معین مقدس

نام استاد(ان) راهنما: دکتر حسین تقی زاده کاخکی

نام استاد(ان) مشاور: دکتر غلامحسین شاهکار

دانشکده : علوم ریاضی	**گروه:** ریاضی کاربردی	**رشته تحصیلی:** ریاضی کاربردی (تحقیق در عملیات)
تاریخ تصویب: ۱۳۸۵/۱۱/ ۲۱		**تاریخ دفاع:** ۱۳۹۰/۳/۳۰
مقطع تحصیلی: **کارشناسی ارشد** ○ **دکتری** ●		**تعداد صفحات:** ۱۲۰

چکیده رساله/پایان نامه :

مساله مکان یابی ماکزیمم پوشش از جمله پرکاربردترین مسائل مکان یابی محسوب می شود. در این مساله هدف تعیین مکان p مرکز سرویس و تخصیص نقاط تقاضا به آنها به گونه ای است که جمعیت سرویس داده شده ماکزیمم شود. یک از معیارهایی که موجب افزایش کیفیت خدمات رسانی توسط مراکز سرویس می شود، توجه به میانگین زمان انتظار در مراکز سرویس می باشد.

در این رساله سه مساله مکان یابی ماکزیمم پوشش مورد بررسی قرار می گیرد. در مساله اول سرویس دهنده ثابت است و مشتریان برای دریافت سرویس به مرکز سرویس مراجعه می کنند و در صورت مشغول بودن سرویس دهنده، مشتری در صفی با سیستم سرویس رسانی *M/M/1* قرار می گیرد. در مساله دوم سرویس دهنده متحرک است و در صورت مشغول نبودن، سرویس دهنده فورا به نقطه تقاضا اعزام می شود. بعد از سرویس مشتری در محل حادثه، سرویس دهنده به مکان اصلی خود بر می گردد. اگر سرویس دهنده مشغول باشد، مشتری در صفی با سیستم سرویس *M/G/1* منتظر دریافت سرویس می ماند. در این دو مساله تخصیص نقاط تقاضا به مراکز سرویس به گونه ای بایستی صورت گیرد که میانگین زمان انتظار در صف در هر مرکز سرویس از مقدار داده شده بیشتر نشود. برای مساله اول ما روش های ابتکاری برای حل مساله ارائه و نتایج محاسباتی را مقایسه می کنیم. در مورد مدل دوم، ما مساله را به صورت یک مساله برنامه ریزی درجه دو صفر و یک مدل، روش های ابتکاری برای حل آن ارائه و نتایج محاسباتی را نیز مقایسه می کنیم. بعلاوه نحوه بکارگیری آزاد سازی SDP به منظور یافتن یک کران بالا برای مساله با سیستم صف *M/G/1* را نیز بررسی می کنیم.

در مساله سوم به منظور واقعی تر شدن مدل، ما محدودیت های جدیدی بر روی تعداد سرویس دهندگان در هر مرکز سرویس و کل هزینه های احداث مراکز سرویس و قرار دادن سرویس دهندگان در آنها، به مساله اضافه می کنیم. هر مرکز سرویس با سیستم صف *M/M/k* با تعداد متغیر سرویس دهنده به مشتریان سرویس می دهد. در این مورد نیز پس از ارائه مدل مساله ، یک روش ابتکاری برای حل آن پیشنهاد و نتایج محاسباتی را مقایسه می کنیم.

کلید واژه:

۱. مساله مکان یابی ماکزیمم پوشش

۲. سیستم صف M/M/1

۳. سیستم صف M/G/1

۴. سیستم صف M/M/k

۵. روش ابتکاری

امضای استاد راهنما:

تاریخ:

دانشکده علوم ریاضی

رساله دکترای رشته ریاضی کاربردی

گرایش تحقیق در عملیات

مسائل مکان یابی ماکزیمم پوشش با سیستم‌های صف $M/M/1$، $M/G/1$ و $M/M/k$

دانشجو:

فروغ معین مقدس

استاد راهنما:

دکتر حسین تقی زاده کاخکی

استاد مشاور:

دکتر غلامحسین شاهکار

خرداد ۱۳۹۰

تقدیم به

پیشگاه مقدس آقا امام زمان (عج)

و تقدیم به

همسر و دخترم

قدردانی

اکنون که با لطف و عنایت پروردگار مراحل تحقیق و نگارش پایان نامه به پایان رسید بر خود لازم می‌دانم که از کلیه عزیزانی که در این زمینه مرا یاری کرده‌اند، قدردانی به عمل بیاورم.

در ابتدا از آقای دکتر تقی زاده که راهنمایی این پایان نامه را بر عهده داشتند و همواره راهنما و مشوق من در طی تحصیل بوده‌اند، سپاسگزاری می‌کنم و سلامتی و موفقیت روزافزون ایشان را از خداوند متعال خواستارم. همچنین از آقای دکتر شاهکار که مشاور من در این پایان نامه بوده‌اند نیز متشکرم و همواره آرزوی سلامتی و طول عمر برای ایشان می‌کنم.

از خانم دکتر توتونیان، آقای دکتر طباطبایی، آقای دکتر ذکایی آشتیانی و آقای دکتر مدرس یزدی که داوری این پایان نامه را عهده دار بودند، بسیار ممنون هستم.

از آقای احسان منبتی و خانم مرضیه فروغ هم که همواره مرا مورد لطف قرار داده‌اند نیز تشکر می‌کنم.

در پایان لازم می‌دانم از زحمات بی دریغ پدر و مادرم و پدر و مادر همسرم که پشتوانه من در تمام زمینه‌های زندگی و یاریگر من در طی تحصیل بوده‌اند و همینطور از همسر مهربانم که همواره مشوق من بوده و با تحمل مشکلات، زمینه را برای به پایان رساندن این پایان نامه مهیا کرده‌اند، بسیار سپاسگزاری می‌کنم.

پیشگفتار

امروزه محققین توانسته‌اند بسیاری از مسائل واقعی را به صورت مدلهای ریاضی مدل بندی و حل کنند. علم تحقیق در عملیات کارگشای بسیاری از آنان در حل مسائل برنامه‌ریزی شهری و منطقه‌ای، اقتصادی و بازرگانی، نظامی و صنعتی و غیره است. مسائل مکان‌یابی یکی از مهمترین مسائل تحقیق در عملیات است که به دلیل کاربردهای فراوانش، بسیار مورد توجه قرار گرفته است. این مسائل با توجه به مفروضات و محدودیت‌های مساله و نوع تابع هدف و کاربردهای آن، به انواع متفاوتی تقسیم شده‌اند. یکی از پرکاربرد ترین این مسائل، مساله مکان‌یابی ماکزیمم پوشش می‌باشد. در این مساله هدف تعیین مکان تعدادی مرکز سرویس و تخصیص نقاط تقاضا به آنها به‌گونه‌ای است که جمعیت سرویس داده شده ماکزیمم شود.

از جمله مهمترین کاربردهای این مساله در مکان‌یابی مراکز خدمات پستی، مراکز درمانی مانند بیمارستانها، مراکز اورژانس و کلینیک‌های درمانی، بانک‌ها، آتش نشانی و مراکز پلیس می‌باشد. مشکل اصلی این مسائل نحوه سرویس‌دهی به مشتریان، در سیستم‌های پرتراکم و شلوغ است. بکارگیری مفاهیم صف موجب ایجاد مدلهایی واقعی‌تر و با کارایی بیشتر شده است.

در این پایان نامه تلاش شده است سه نوع مساله ماکزیمم پوشش با سیستم صف، که کاربردهای فراوانی در مسائل عملی نیز دارند، مورد بررسی قرار گیرد. این پایان نامه شامل هفت فصل است. در فصل اول و دوم به مرور مختصر انواع مسائل مکان‌یابی، طبقه بندی‌ها و مسائل مکان‌یابی تصادفی خصوصاً مساله پوشش تصادفی پرداخته‌ایم.

در فصل سوم، دو مساله ماکزیمم پوشش با محدودیت بر روی میانگین زمان انتظار در صف را بررسی می‌کنیم. مساله برای دو نوع سیستم صف $M/M/1$ و $M/G/1$ ، که

مساله‌هایی NP–سخت[1] هستند، بررسی شده است. مساله اول حالت خاصی از مساله مقاله [۹۹] است و ما برای حل آن روش‌های ابتکاری [2] ارائه کرده‌ایم. مساله دوم، یعنی مساله با سیستم صف $M/G/1$، در برخی مسائل مکان‌یابی مانند مکان‌یابی مراکز اورژانس و آتش نشانی که در آنها سرویس دهندگان به محل حادثه مراجعه می‌کنند، کاربرد دارد. در این مورد ابتدا مساله مدل بندی و سپس روش‌های ابتکاری برای حل آن ارائه شده است.

در فصل چهارم مساله مکان‌یابی ماکزیمم پوشش با سیستم صف $M/M/k$ را بررسی می‌کنیم. در این مدل به مراکز سرویس اجازه داده شده است که بیش از یک سرویس دهنده در اختیار داشته باشند و بعلاوه اینکه تلاش شده است با قرار دادن برخی محدودیت‌ها بر روی مساله،آن را به مدلهای واقعی نزدیکتر کنیم. در این فصل نیز روش ابتکاری برای حل مساله ارائه شده است.

در فصل پنجم نتایج محاسباتی حاصل از بکارگیری الگوریتم‌های ابتکاری فصل‌های سوم و چهارم را بررسی کرده‌ایم و در فصل ششم به جمع بندی و ارائه برخی پیشنهادات پرداخته‌ایم. در فصل آخر که فصل پیوست است، نحوه بکارگیری آزاد سازی SDP به منظور یافتن یک کران بالا برای مساله با سیستم صف $M/G/1$ و به علاوه داده‌های مربوط به نمونه‌های عددی و برخی جدول‌های بخش نتایج محاسباتی آورده شده است.

امید است مطالب ارائه شده در این پایان نامه بتواند گامی هر چند کوچک در راستای پیشرفت علم ریاضیات کاربردی برداشته و برای کلیه علاقه‌مندان مفید واقع شود.

---

[1] NP-hard

[2] Heuristic

فهرست مندرجات

۱ بررسی اجمالی مسائل مکانیابی ۸

۱.۱ مقدمه ۸

۲.۱ مولفه‌های اصلی مسائل مکانیابی ۱۰

۳.۱ طبقه بندی مسائل مکانیابی ۱۳

۴.۱ معرفی سه مساله میانه، مرکز و پوشش ۱۴

۱.۴.۱ میانه ۱۴

۲.۴.۱ مرکز ۱۵

۳.۴.۱ پوشش ۱۶

۲ مسائل مکانیابی تصادفی ۲۲

۱.۲ آشنایی با برخی مفاهیم سیستم‌های صف ۲۴

۲.۲ مساله مکانیابی پوشش تصادفی ۲۶

۱.۲.۲ استفاده از مدلهای احتمالی بدون صف ۲۶
۲.۲.۲ استفاده از مدلهای احتمالی با صف ۲۸

۳.۲ مساله مکانیابی میانه تصادفی ۳۲

۴.۲ برخی مدلهای دیگر مکانیابی تصادفی ۳۴

۳ مساله ماکزیمم پوشش با دو سیستم صف $M/M/1$ و $M/G/1$ ۳۷

۱.۳ معرفی و مدل بندی مساله ۳۷
۱.۱.۳ مساله با سیستم صف $M/M/1$ ۴۰
۲.۱.۳ مساله با سیستم صف $M/G/1$ ۴۱

۲.۳ یک الگوریتم ابتکاری برای حل مساله ۴۴
۱.۲.۳ مساله با سیستم صف $M/M/1$ ۴۴
۲.۲.۳ مساله با سیستم صف $M/G/1$ ۴۶

۳.۳ الگوریتم $GRASP$ برای حل زیرمساله‌ها ۴۷
۱.۳.۳ الگوریتم $GRASP$ برای حل زیر مساله P_j ۴۷
۲.۳.۳ الگوریتم $GRASP$ برای حل زیر مساله $Knap_j$ ۵۳

۴.۳ حل مساله با استفاده از الگوریتم $GRASP$ ۵۴

۴ مساله ماکزیمم پوشش با سیستم صف $M/M/k$ ۵۶

۱.۴ معرفی و مدل بندی مساله ۵۷

۲.۴ یک کران بالا برای میانگین زمان انتظار در صف ٦٠

۳.۴ حل مساله به کمک الگوریتم ابتکاری ٦۴

۴.۴ حل زیرمساله‌های تولید شده از الگوریتم ابتکاری ٦٧

۵.۴ بکارگیری جستجوی محلی ٧٠

۵ نتایج محاسباتی ٧٣

۱.۵ نتایج محاسباتی برای مساله با سیستم صف $M/M/1$ ٧٣

۲.۵ نتایج محاسباتی برای مساله با سیستم صف $M/G/1$ ٧٩

۳.۵ نتایج محاسباتی برای مساله با سیستم صف $M/M/k$ ٨١

٦ نتیجه‌گیری و پیشنهادات ٨٨

٧ پیوست ٩١

۱.٧ پیوست ۱ . . . . . ٩١

۲.٧ پیوست ۲ . . . . . ٩۵

فصل ۱

بررسی اجمالی مسائل مکانیابی

در این فصل به بررسی مختصر تاریخچه مسائل مکانیابی، مولفه‌ها و طبقه‌بندی‌های آن و سپس معرفی برخی از آنها می‌پردازیم.

۱.۱ مقدمه

مسائل مکانیابی از جمله مسائلی هستند که به دلیل کاربردهای فراوانشان، خصوصاً در چهار دهه اخیر، بسیار مورد توجه قرار گرفته‌اند [۴۶]. این مسائل دارای چند مشخصه اصلی فضا[۱]، متر[۲] یا معیار اندازه‌گیری، مجموعه‌ای از نقاط تقاضا [۳] و مجموعه‌ای از مراکز سرویس[۴] کاندید می‌باشند[۴۶]. نیاز نقاط تقاضا برای سرویس از طریق انتخاب مراکز سرویس و تخصیص آنها به این نقاط برآورده می‌شود. هدف یافتن مکان تعدادی مرکز سرویس و تعیین نحوه تخصیص آنها به نقاط تقاضا به گونه‌ای است که سود ماکزیمم یا هزینه‌ها می‌نیمم شود.

اولین کاربرد مساله مکانیابی، کاربردی نظامی بود که توسط امپراتور کُنستانتین در قرن

---

[۱] *Space*

[۲] *Metric*

[۳] *Demand Point*

[۴] *Servic Center*

چهارم مورد استفاده قرار گرفت. این مساله بر روی شبکه‌ای که نقاط در آن نمایش دهنده پایگاه‌های ارتش رم بود، تعریف شده بود. محل این پایگاه‌ها به گونه‌ای بایستی تعیین می‌شدند که نیروهای ارتش بتوانند در مقابل شورشیان و تهدیدات مهاجمان دفاع کنند [۸۹].

شروع رسمی مساله مکانیابی مربوط به قرن هفدهم با معرفی مساله فِرما[۵] می‌باشد. در این مساله سه نقطه در صفحه داده شده و هدف تعیین نقطه چهارم به گونه‌ای است که مجموع فواصل تا آن نقطه می‌نیمم شود. در مورد اینکه این مساله نخستین بار توسط چه کسی (یا کسانی) ارائه و حل شد، اختلاف نظر وجود دارد[۴۱]. یک روش هندسی برای حل این مساله، یعنی مساله با نرم اقلیدسی، توسط توریچِلی [۶] ارائه شد. از این جهت نقطه بهینه این مساله را نقطه توریچِلی می‌نامند. سیمپسون [۷] نیز روش هندسی دیگری برای حل این مساله ارائه کرد[٦٨].

وِبِر [۸] در سال ۱۹۰۹ از این مساله در تعیین مکان یک مرکز صنعتی به منظور می‌نیمم کردن هزینه‌های نقل و انتقال، استفاده کرد[۴۱]. امروزه مساله تعیین مکان یک مرکز سرویس در صفحه به منظور می‌نیمم کردن مجموع فواصل (اقلیدسی) را مساله وِبِر می‌نامند. حکیمی[۹] در سال ۱۹٦۴ [۵۵] مساله تعیین مکان مراکز سوئیچ [۱۰] در شبکه‌های مخابرات و مراکز پلیس در بزرگراه‌ها را بررسی کرد[۴٦]. حکیمی مساله را بر روی شبکه و با دو نوع تابع هدف به صورت می‌نیمم—مجموع[۱۱] و می‌نیمم—ماکزیمم [۱۲] بررسی کرد. از آن به بعد مطالعه بر روی مسائل مکانیابی، توجه بسیاری از محققین را به خود جلب کرد[۴٦].

---

۵ $Fermat$

۶ $Torricelli$

۷ $Simpson$

۸ $Weber$

۹ $Hakimi$

۱۰ $Switching$

۱۱ $Mini-sum$

۱۲ $Mini-max$

۲.۱ مولفه‌های اصلی مسائل مکانیابی

ایسلت[۱۳] و لاپورت[۱۴] [۴۲] مولفه‌های اصلی مسائل مکانیابی را به صورت فضا، تابع هدف، اندازه فاصله‌ها، محدودیت‌ها بر روی فاصله‌ها، مشتری‌ها، وزنها، تعداد سرویس دهندگان و ظرفیت سرویس دهندگان معرفی کرده‌اند. ریول[۱۵] و همکارانش [۹۱] سه مولفه مشترک مسائل مکانیابی را فضا، مشتریان و مراکز سرویس می‌دانند. ما در ادامه به توضیح برخی مولفه‌ها می‌پردازیم. توضیحات این بخش از مراجع [۱۷، ۲۴، ۷۹، ۹۶] آورده شده است.

۱) **فضا:** ناحیه‌ای است که مساله بر روی آن تعریف می‌شود. این ناحیه ممکن است به صورت یک ناحیه پیوسته [۱۶] بر روی فضای d بعدی، یک فضای گسسته[۱۷] و یا ناحیه‌ای به شکل شبکه[۱۸] باشد. متناسب با این فضاها، سه نوع مساله مکانیابی وجود دارد:

مسائل مکانیابی پیوسته: در این مدلها فرض می‌شود که نقاط تقاضا و مراکز سرویس هر جایی از ناحیه (که یک فضای d بعدی است) می‌توانند قرار گیرند.

مسائل مکانیابی گسسته: در این مسائل مجموعه نقاط تقاضا و مجموعه مراکز سرویس کاندید، مجموعه‌هایی گسسته می‌باشند.

مسائل مکانیابی بر روی شبکه: در این مدلها مساله برروی شبکه‌ای با مجموعه گره‌ها و یالهای آن تعریف می‌شود. در اغلب این مسائل، نقاط تقاضا برروی گره‌های شبکه تعریف می‌شوند ولی مراکز سرویس در هر نقطه‌ای از شبکه می‌توانند انتخاب شوند. سیستم خدمات رسانی اضطراری بزرگراه‌ها نمونه‌ای از مسائل مکانیابی بر روی شبکه است که در آن تقاضا ممکن است بر روی گره‌ها و یا هر نقطه دیگر از شبکه اتفاق بیافتد.

۲) **تابع هدف:** تابع هدف مسائل مکانیابی ممکن است از نوع ماکزیمم سازی سود

---

[۱۳] $Eiselt$
[۱۴] $Laporte$
[۱۵] $ReVelle$
[۱۶] $Continous$
[۱۷] $Discrete$
[۱۸] $Network$

(یا می‌نیمم کردن هزینه)، ماکزیمم—می‌نیمم (یا می‌نیمم—ماکزیمم) و یا ایجاد تعادل[۱۹] تجهیزات بین نقاط تقاضا و مراکز سرویس باشد.

۳) مشتریان (متقاضیان)[۲۰]: نقاط تقاضا ممکن است در محدوده خاصی از فضای مساله (مثلاً گره‌های یک شبکه) و یا بطور پراکنده در فضا پخش شده باشند. تکنیک‌های همفزونی[۲۱] داده‌ها به ما کمک می‌کند که بتوانیم تقاضاها را در تعدادی نقطه از فضا متمرکز کنیم. این کار به ساده‌تر شدن مساله و کاهش بعد آن کمک می‌کند. برخی تکنیک‌های همفزونی داده‌ها در [۵۱] آمده است.

۴) مراکز سرویس: مراکزی هستند که مکان و چگونگی تخصیص آنها به نقاط تقاضا بایستی تعیین شود. در این مراکز ممکن است یک سرویس دهنده[۲۲] و یا چند سرویس دهنده[۲۳] قرار داده شود و البته در برخی مسائل تعداد سرویس دهندگان در مراکز سرویس نیز جزء متغیرهای مساله هستند که بایستی پس از حل مساله تعیین شود.

تخصیص مشتریان به مراکز سرویس به دو صورت امکان‌پذیر است. در برخی از مسائل، مشتریان با توجه به نزدیکی فاصله‌شان تا مراکز سرویس و با توجه به پیشینه‌ای که از مراکز سرویس دارند (مانند کیفیت ارائه سرویس و زمان انتظار برای دریافت سرویس)، مرکزی را برای دریافت سرویس انتخاب می‌کنند[۲۴] (مانند سیستم سرویس رسانی بانک‌ها) و در برخی دیگر انتخاب مراکز سرویس برای مشتریان از سوی یک مرکز واحد صورت می‌گیرد[۲۵] (مانند سیستم‌های خدمات رسانی آمبولانس‌ها و ماشین‌های آتش نشانی).

۵) سرویس دهندگان : مکان اصلی[۲۶] سرویس دهندگان مراکز سرویس است. در برخی مدلها، مشتریان برای دریافت سرویس به مرکز سرویس مراجعه و در آنجا سرویس دریافت می‌کنند. در حالت دیگر متقاضیان پس از انجام مکالمه در مکان خود منتظر رسیدن

---

[۱۹] $Equity$
[۲۰] $Customers$
[۲۱] $Aggregation$
[۲۲] $One\ Server$
[۲۳] $Multiple-Servers$
[۲۴] $User\ Choice$
[۲۵] $System\ Choice$
[۲۶] $Home$

سرویس دهندگان و دریافت خدمات از سوی آنها می‌مانند. مسائل نوع اول را مسائل با سرویس دهنده **ثابت** [۲۷] و نوع دوم را مسائل با سرویس دهنده **متحرک** [۲۸] می‌نامند.

سیستم سرویس رسانی آمبولانس، ماشین‌های آتش نشانی و ماشین‌های پلیس، نمونه‌هایی از مسائلی هستند که سرویس دهنده آنها متحرک است. در سیستم خدمات رسانی آمبولانس، پس از اعلام نیاز یک نقطه تقاضا، ماشین آمبولانس (سرویس دهنده) به محل حادثه اعزام شده و سپس به محل اصلی خود (بیمارستان یا مرکز اورژانس) مراجعه می‌کند. در سیستم خدمات رسانی پلیس، مراجعه به مرکز اصلی در برخی موارد لازم است و در برخی موارد ضرورتی ندارد.

در مسائل واقعی‌تر، محدودیت‌هایی برای تعداد مشتریانی که سرویس دهندگان می‌توانند به آنها سرویس ارائه دهند وجود دارد. این مسائل را مسائل **ظرفیت دار** [۲۹] گویند. مسائلی که در آنها سرویس دهنده می‌تواند پاسخگوی هر تعداد مشتری باشد، مسائل **بدون ظرفیت** هستند.

در مورد نحوه سرویس دهی مراکز سرویس به نقاط تقاضا، به چند نکته بایستی توجه کرد. **نخست** اینکه در صورتی نقطه تقاضای i توسط مرکز j می‌تواند سرویس دریافت کند (یا پوشش داده شود) که فاصله این دو نقطه (یا زمان طی مسیر بین آنها) از حد استاندارد بیشتر نباشد. درصورت بیشتر بودن فاصله آنها از حد استاندارد، سرویس نقطه تقاضا توسط مرکز مورد نظر رد می‌شود[۳۰]. این محدودیت برای قابل قبول بودن زمان پاسخگویی بر مساله اعمال می‌شود. **دوم** اینکه قاعده تخصیص مراکز سرویس به نقاط تقاضا چگونه تعیین می‌شود (مثلاً برحسب فاصله یا تخصیص نقاط تقاضا به نزدیکترین مرکز سرویس در دسترس و یا معیاری دیگر). **دیگر** اینکه در صورت مشغول بودن یک مرکز سرویس، آیا سرویس نقطه تقاضای دیگری که می‌خواهد توسط این مرکز سرویس دریافت کند، رد می‌شود و یا بایستی متقاضی در صفی برای دریافت سرویس منتظر بماند.

---

[۲۷] *Fixed Server*
[۲۸] *Mobile Server*
[۲۹] *Capacitated*
[۳۰] *Reject*

۳.۱ طبقه بندی مسائل مکانیابی

تا کنون طبقه‌بندی های متفاوتی برای مسائل مکانیابی ارائه شده است. اولین طبقه بندی توسط هندلر[۳۱] و میرچَندانی [۳۲] در سال ۱۹۷۹ [۵۷] ارائه شد. آنها چهار مولفه اصلی را برای مساله مکانیابی تعریف کردند. مولفه اول نشان دهنده اطلاعاتی در مورد سرویس دهندگان، مولفه دوم اطلاعاتی در مورد مشتریان، مولفه سوم تعداد سرویس دهندگان و مولفه چهارم نوع شبکه است. طبقه بندی آنها برای مساله مکانیابی بر روی شبکه با تابع هدف به شکل می‌نیمم—ماکزیمم قابل استفاده بود[۴۶].

بعد از آنها، اِیسلت و همکارانش در سال ۱۹۹۳ [۴۳]، کاریزوسا[۳۳] و همکارانش در سال ۱۹۹۵ [۲۷] طبقه‌بندی های دیگری برای مسائل مکانیابی ارائه کردند. در آخرین طبقه‌بندی، هاماخِر [۳۴] و نیکل [۳۵] در سال ۱۹۹۸ [۵۶] پنج مولفه را برای مسائل مکانیابی در نظر گرفتند. مولفه اول تعداد و نوع سرویس دهندگان را مشخص می‌کند. مولفه دوم نوع فضای مساله، مولفه سوم شامل اطلاعاتی در مورد ویژگی‌های مدل از جمله جواب‌های شدنی، ظرفیت و غیره را تعیین می‌کند. مولفه چهارم رابطه بین سرویس دهندگان و مشتریان و مولفه پنجم شامل نوع تابع هدف می‌باشد[۴۶].

برخی دسته‌بندی‌های خاص‌تر نیز برای مسائل مکانیابی ارائه شده است. برای نمونه ریول و همکارانش [۹۱] مسائل مکانیابی را با توجه به نوع فضایی که برای مساله تعریف می‌شود، به چهار دسته مسائل پیوسته، مسائل گسسته، مسائل بر روی شبکه و مسائل تحلیلی [۳۶] تقسیم کرده‌اند. کارِنت[۳۷] و همکارانش [۳۵] هشت مساله اصلی مکانیابی را به صورت مساله

---

[۳۱] $Handler$
[۳۲] $Mirchandani$
[۳۳] $Carrizosa$
[۳۴] $Hamacher$
[۳۵] $Nickel$
[۳۶] $Analytic$
[۳۷] $Current$

پوشش مجموعه‌ای[۳۸]، مساله ماکزیمم پوشش[۳۹]، مساله p—مرکز[۴۰]، مساله p—پراکندگی[۴۱]، مساله p—میانه[۴۲]، مساله هزینه ثابت[۴۳]، مساله مکانیابی مراکز هاب[۴۴] و مکانیابی ماکزیمم—مجموع[۴۵] معرفی کردند. آنها این هشت مساله را به دو دسته اصلی تقسیم کردند. دسته اول، شامل چهار مساله اول می‌باشد که در آنها معیار سرویس‌دهی، ماکزیمم فاصله است و دسته دوم شامل چهار مساله بعدی است که در آنها معیار سرویس‌دهی مجموع (یا میانگین) فواصل می‌باشد[۳۵].

برای اطلاع از برخی طبقه‌بندی های دیگر که برای مسائل مکانیابی ارائه شده‌است، مرجع [۴۶] را ملاحظه نمائید.

۴.۱ معرفی سه مساله میانه، مرکز و پوشش

ما در این بخش به توضیح مختصر سه مساله مکانیابی میانه، مرکز و پوشش[۴۶] که جزء مهمترین مسائل مکانیابی می‌باشند، می‌پردازیم.

۱.۴.۱ میانه

توجه جدی بر مسائل مکانیابی بر روی شبکه، مربوط به دهه شصت با ارائه دو مدل توسط حکیمی می‌باشد[۹۰]. حکیمی در سال ۱۹۶۴ [۵۵] مساله تعیین یک مرکز بر روی شبکه، به گونه‌ای که مجموع وزنی فاصله نقاط تقاضا تا مرکز سرویس انتخاب شده، می‌نیمم شود را بررسی کرد. اگر $G = (V, E)$ شبکه‌ای با مجموعه رئوس V و مجموعه یالهای E باشد و $|V|$ نقطه تقاضا منطبق بر رئوس شبکه موجود باشد، هدف یافتن مکان یک مرکز سرویس x بر

---

[۳۸] $Set\ Covering$
[۳۹] $Maximum\ Covering$
[۴۰] $p - Center$
[۴۱] $p - Dispersion$
[۴۲] $p - Median$
[۴۳] $Fixed\ Charge$
[۴۴] $Hub\ Location$
[۴۵] $Maxi - sum$
[۴۶] $Covering$

روی شبکه، به گونه‌ای است که $\sum_{v_i \in V} w_i d(x, v_i)$ می‌نیمم شود. که در آن w_i و $d(x, v_i)$ به ترتیب وزن نقطه تقاضای i و کوتاهترین فاصله بین نقطه تقاضای i و مرکز سرویس x می‌باشند.

حکیمی طی قضیه‌ای نشان داد با فرض نامنفی بودن وزنها، مساله فوق (۱ − میانه) حداقل دارای یک جواب بهینه منطبق بر یکی از گره‌های شبکه است، یعنی مساله دارای بهینه رأسی است. بعد از آن حکیمی برای تعمیم این مساله، یعنی مساله p−میانه، به طور مشابه نشان داد که مساله دارای جواب بهینه رأسی می‌باشد[۹۰].

ریول و سُوان[۴۷] در سال ۱۹۷۰ [۹۴] مساله p−میانه را به صورت یک مساله برنامه‌ریزی خطی مدل بندی کردند. برای حالتی که p ثابت است این مساله را می‌توان با روش شمارشی حل کرد ولی در حالت کلی (یعنی p غیرثابت)، کاریو[۴۸] و حکیمی [۶۴] نشان دادند که مساله NP−سخت[۴۹] است.

از جمله تعمیم‌های این مساله، مساله p−میانه ظرفیت‌دار[۵۰] می‌باشد که در آن قیدی به عنوان قید ظرفیت برای مراکز سرویس به مساله تحمیل می‌شود. اطلاعات بیشتر در مورد روش‌های حل مساله‌های p−میانه و p−میانه ظرفیت‌دار و دیگر تعمیم‌های ارائه شده برای این مساله را می‌توان در مراجع [۹۰، ۹۱] یافت.

۲.۴.۱ مرکز

در برخی از مسائل هدف می‌نیمم کردن ماکزیمم فاصله وزندار نقاط تقاضا تا مراکز سرویس می‌باشد. نمونه‌هایی از کاربردهای این مساله در مکانیابی کتابخانه‌های عمومی، آژانس‌های خدماتی می‌باشد [۳۵]. این مساله نخستین بار توسط حکیمی در سال ۱۹۶۴ [۵۵] ارائه شد[۹۰]. این مساله بر روی شبکه تعریف می‌شود و هدف تعیین p مرکز سرویس به گونه‌ای است که با تخصیص نقاط تقاضا به نزدیکترین مرکز سرویس، ماکزیمم فاصله

---

۴۷ $Swain$

۴۸ $Kariv$

۴۹ $NP-hard$

۵۰ $Capacitated\ p-Median$

(وزندار) نقاط تقاضا تا آن مراکز می‌نیمم شود. تابع هدف $min\ z$ است که z ماکزیمم فاصله وزندار نقاط تقاضا تا نزدیکترین مرکز سرویس می‌باشد.

این مساله برخلاف مساله $p-$میانه ممکن است جواب بهینه رأسی نداشته باشد. از این جهت می‌توان این مساله را به دو صورت مساله $p-$مرکز بر روی رئوس [۵۱] و $p-$مرکز مطلق [۵۲] مدل‌بندی کرد. در مساله $p-$مرکز بر روی رئوس، مراکز سرویس بایستی از میان رئوس شبکه انتخاب شوند ولی در مساله $p-$مرکز مطلق مراکز سرویس می‌توانند هر نقطه‌ای از شبکه (بر روی رئوس شبکه یا نقطه‌ای بر روی یالهای شبکه) باشند.

مساله $p-$مرکز غیر وزندار را می‌توان مساله‌ای در نظر گرفت که در آن هدف یافتن می‌نیمم ماکزیمم فاصله لازم برای سرویس دهی به تمام نقاط تقاضا، است.

مشابه مساله $p-$میانه، برای p ثابت، مساله را می‌توان با روش شمارشی حل کرد ولی برای حالت کلی (p متغیر)، گَری [۵۳] و جانسون [۵۴] [۵۲] و کاریو و حکیمی [۶۳] نشان دادند که مساله $NP-$سخت است.

۳.۴.۱ پوشش

مساله پوشش به دو دسته اصلی تقسیم می‌شود: ۱) مساله مکانیابی پوشش مجموعه‌ای ($SCLP$) [۵۵] و ۲) مساله مکانیابی ماکزیمم پوشش ($MCLP$) [۵۶].

مساله مکانیابی پوشش مجموعه‌ای:

مساله مکانیابی پوشش مجموعه‌ای نخستین بار توسط تورگاس [۵۷] و همکارانش [۱۰۰] برای مکانیابی مراکز خدمات رسانی اضطراری ارائه شد[۹۱]. در این مساله هدف یافتن می‌نیمم تعداد سرویس دهندگان لازم برای پوشش حداقل یکبار نقاط تقاضا توسط سرویس

---

[۵۱] $Vertex\ p-Center$
[۵۲] $Absolute\ p-Center$
[۵۳] $Garey$
[۵۴] $Johnson$
[۵۵] $Set\ Covering\ Location\ Problem$
[۵۶] $Maximal\ Covering\ Location\ Problem$
[۵۷] $Toregas$

دهندگان است.

مجموعه‌های I و J را به ترتیب مجموعه نقاط تقاضا و مجموعه مراکز کاندید برای خدمات رسانی فرض می‌کنیم. کوتاهترین فاصله بین نقطه تقاضای i و مرکز کاندید j را $d(i,j)$ و فاصله استاندارد برای پوشش را ds تعریف می‌کنیم. نقطه تقاضای i $(i \in I)$ در صورتی می‌تواند توسط مرکز کاندید j $(j \in J)$ پوشش (سرویس) داده شود که فاصله بین آنها از مقدار استاندارد ds بیشتر نباشد. بنابراین برای تمام نقاط تقاضا مانند i، مجموعه N_i را مجموعه تمام مراکز کاندیدی تعریف می‌کنیم که فاصله‌شان تا نقطه تقاضای i از ds بیشتر نباشد، یعنی $N_i = \{j \in J \mid d(i,j) \leq ds\}$.

به منظور مدل بندی مساله، متغیر تصمیم x_j به صورت زیر تعریف می‌شود:

x_j برابر ۱ اگر مرکز کاندید j به عنوان مرکز سرویس انتخاب شود و ۰ در غیراینصورت.

مدل ریاضی مساله مکانیابی پوشش مجموعه‌ای به صورت زیر است [۷۹]:

$$
\begin{aligned}
SCLP) \quad Min \quad & \sum_{j \in J} x_j & & \\
s.t \quad & \sum_{j \in N_i} x_j \geq 1 & \forall i \in I \qquad & (1.1) \\
& x_j \in \{0,1\} & \forall j \in J \qquad & (2.1)
\end{aligned}
$$

تابع هدف تعداد مراکز سرویس لازم را می‌نیمم می‌کند و قید اول ایجاب می‌کند که هر نقطه تقاضا حداقل باید توسط یک مرکز سرویس که در فاصله استاندارد از آن قرار دارد، سرویس دریافت کند. گَری و جانسون[۵۲] نشان دادند که این مساله، یک مساله NP—سخت است.

این مدل علی رغم کاربردهای فراوانش در مسائل مکانیابی اضطراری، دارای ایراداتی نیز می‌باشد. **نخست** اینکه در این مدل هدف یافتن می‌نیمم تعداد سرویس دهندگان لازم برای پوشش تمام نقاط تقاضا است و در عمل تعداد سرویس دهندگان و امکانات موجود کمتر از این مقدار می‌نیمم می‌باشد[۹۱]. **دوم** اینکه در این مساله هیچ گونه اولویتی برای نقاط تقاضا وجود ندارد به عبارت دیگر نقاط تقاضا با هر تعداد متقاضی بایستی بطور یکسان پوشش دریافت کنند[۹۱]. **سوم** اینکه در حل این مساله ممکن است یک مرکز سرویس مسئولیت

سرویس رسانی به بیش از یک نقطه تقاضا را داشته باشد و هنگامیکه تقاضاها بطور همزمان به این مرکز می‌رسند، سرویس دهنده قادر به پاسخگویی همزمان و یا اینکه تعیین کند کدام متقاضی اول بایستی سرویس دریافت کند، نیست[۲۶].

دو ایراد اول با ارائه مدل مساله ماکزیمم پوشش تا حدی قابل حل می‌باشد ولی برای برطرف شدن مشکل سوم که در سیستم‌های متراکم و شلوغ اتفاق می‌افتد، بایستی رویکردی دیگر اتخاذ شود که در فصل‌های بعد به آن خواهیم پرداخت.

هنگامی که امکان سرویس دهی تمام نقاط تقاضا با توجه به امکانات موجود فراهم نمی‌شود دو راه حل را می‌توان در پیش گرفت[۹۱]: ۱– ساده سازی (یا نادیده گرفتن) شرط پوشش ۱۰۰ درصدی نقاط تقاضا ۲– ساده سازی فاصله استاندارد تا آنجایی که فاصله استانداردی یافت شود بطوریکه با توجه به امکانات موجود، تمام نقاط تقاضا پوشش داده شوند.

مسائل مکانیابی مدارس و تخصیص دانش‌آموزان به آن در هر سال تحصیلی که همراه با محدودیت ثبت نام برای تعداد دانش‌آموزان است و همینطور مکانیابی مراکز خدمات رسانی اورژانس که بایستی پاسخگوی متقاضیان در زمان معقول باشند، نمونه‌هائی از مسائل ظرفیت‌دار می‌باشند.

توجه داشته باشید که اگر می‌نیمم تعداد سرویس دهندگان بدست آمده از حل مساله پوشش مجموعه‌ای برابر p در مساله $p-$ مرکز (غیر وزندار) باشد، فاصله استاندارد فرض شده در مساله پوشش مجموعه‌ای، برابر جواب بهینه مساله $p-$ مرکز می‌باشد. در غیر اینصورت می‌توان با افزایش ماکزیمم فاصله استاندارد در مساله پوشش مجموعه‌ای به جواب بهینه‌ای برای مساله $p-$ مرکز دست پیدا کرد [۳۵].

بشیری [۵۸] و فتوحی [۵۹] در سال ۲۰۰۹ [۶] مساله مکانیابی پوشش مجموعه‌ای که در آن شعاع پوشش با توجه به فاصله بین مراکز سرویس موجود و مراکز کاندید تعیین می‌شود را بررسی کردند. در این مقاله شعاع پوشش، می‌نیمم تعداد مراکز سرویس، مکان مراکز سرویس و تخصیص نقاط تقاضا به آنها به گونه‌ای بایستی صورت گیرد که هزینه‌های نقل و انتقال

[۵۸] $Bashiri$
[۵۹] $Fotuhi$