جمهوری اسلامی ایران

وزارت علوم تحقیقات و فناوری

دانشگاه شیخ‌بهائی

دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر

(پایان نامه کارشناسی ارشد ریاضی کاربردی)

روش نقطه پروکسیمال ترکیبی برای مسائل تعادل

پژوهشگر:

زهرا نصیرزاده

استاد راهنما:

دکتر مجید فخار

استاد مشاور:

دکترجعفر زعفرانی

شهریور ۱۳۹۱

چکیده

در این پایان نامه با توجه به روش تقریب نقطه پروکسیمال (PPM) برای مسئله نابرابری وردشی (VIP) و مسئله بهینه سازی برداری (VOP) می پردازیم که به یافتن جواب مشترک (VIP) و (VOP) مبادرت می کند و به گسترش روش نقطه پروکسیمال ترکیبی (PPM) برای یافتن جواب مشترک مسئله بهینه سازی نیز می پردازیم.ابتدا الگوریتمی برای حل مسئله تعادل (EP) و مسئله نابرابری وردشی (VIP) ارائه می دهیم.در این الگوریتم جواب تقریبی مسئله تعادل کمکی (AEP) را پیدا کرده ، سپس گام (PPM) را برای (EP) و روش اکستراگرادیانت را برای (VIP) متناظر به کار می بریم.الگوریتم ترکیبی دیگری نیز برای حل همزمان دو مسئله تعادل مختلف بیان می شود.در این الگوریتم جواب تقریبی مسئله تعادل کمکی متناظر با تابع f را می یابیم سپس از این جواب برای حل مسئله تعادل کمکی متناظر با تابع g استفاده می کنیم.

واژه های کلیدی: مسئله تعادل ، مسئله نابرابری وردشی ، روش نقطه پروکسیمال ترکیبی ، روش اکستراگرادیانت ، الگوریتم ترکیبی

فهرست مطالب

پیشگفتار **ح**

۱ تعاریف و مفاهیم مقدماتی **۱**

۱.۱ فضای توپولوژی ۱

۲.۱ توپولوژی ضعیف ۴

۳.۱ مفاهیم اساسی در آنالیز محدب ۵

۲ روش نقطه پروکسیمال **۲۲**

۱.۲ ایده اصلی الگوریتم ۲۲

۲.۲ همگرایی کلی الگوریتم ۲۶

۳.۲ کاربرد در مینیمم سازی ۳۷

۳ مسئله تعادل و نابرابری وردشی **۴۱**

۱.۳ شرایط وجود جواب برای مسئله تعادل و نابرابری وردشی ۴۱

۲.۳ الگوریتم نقطه پروکسیمال برای حل مسئله تعادل و نابرابری وردشی ۵۷

۳.۳ بازنویسی فرمول های مسئله تعادل تحت شرایط ضعیف تر ۶۵

۴ توابع گپ و مسیر کاهشی برای مسائل تعادل و نابرابری وردشی **۷۳**

۱.۴ توابع گپ برای مسائل تعادل و نابرابری وردشی ۷۳

۲.۴ روش کاهشی برای مسئله تعادل و نابرابری وردشی ۸۴

۳.۴ کران خطا ۹۰

۵ روش نقطه پروکسیمال ترکیبی برای مسئله تعادل و نابرابری وردشی ۹۲

۱.۵ الگوریتمی برای حل مسائل تعادل و نابرابری وردشی ۹۲

۲.۵ الگوریتمی برای حل همزمان دو مسئله تعادل مختلف ۱۰۱

۶ نتایج عددی ۱۰۹

۱.۶ برنامه ای برای حل مسئله تعادل و نابرابری وردشی ۱۰۹

۲.۶ برنامه ای برای حل همزمان دو مسئله تعادل مختلف ۱۱۳

کتاب نامه ۱۱۷

واژه نامه فارسی به انگلیسی ۱۱۹

پیشگفتار

مارتینت [1][15] در سال ۱۹۷۰ در مقاله ای با عنوان منظم سازی نا برابری وردشی با استفاده از تقریب پی در پی، روش نقطه پروکسیمال را برای حل مسائل بهینه سازی و نابرابری وردشی (VIP) در موارد یکنوا معرفی کرد. راکفلر[2] [۲۲] در سال ۱۹۷۶ در مقاله ای با نام عملگر های یکنوا و الگوریتم نقطه پروکسیمال این روش را گسترش داد.بوراچیک[3] [۵] در سال ۲۰۰۹ در مقاله ای با عنوان روش نقطه درونی پروکسیمال غیر دقیق برای مسائل نابرابری وردشی، ادعا کرد تا برای حل مسائل نابرابری وردشی با عملگر های یکنوای بیشین با محدودیت خطی روش نقطه درونی پروکسیمال غیر دقیق مناسب است. این روش که توسط اسلندر [4][۳] بیان شد روشی است که از تابع مانع شبه فاصله استفاده می کند و یک همگرایی تحت مفروضات ناچیز دارد.با این وجود این روش فقط برای مسائلی که ناحیه شدنی آن ها درونشان غیر تهی است کاربرد دارد.ایزوم[5] [۱۰] در سال ۲۰۰۳ در مقاله ای با عنوان متغیر های غیر دقیق الگوریتم نقطه پروکسیمال بدون یکنوایی، روش نقطه پروکسیمال برای (VIP) اشاره کرد. همچنین یانگ [6][۲۵] به این روش در مقاله روش پروکسیمال برای مسائل تعادل در فضاهای هیلبرت در سال ۲۰۰۸ اشاره کرد. گسترش های (PPM) برای حل مسائل بهینه سازی برداری (VOP) به کار برده شده است.گسترش های (PPM) برای حل مسائل تعادل (EPS) نیز به کار می رود. این موضوع را می توان در مقاله الگوریتم های شبه پروکسیمال مورد استفاده در برنامه های تعادلی از فلام [7] [۴] در سال ۱۹۹۷ دید. کونوو [8][۱۳] در سال ۲۰۰۳ به بیان یک مسئله تعادل کلی روی مجموعه محدب پرداخت که تابع دو متغیره ممکن است یکنوا نباشد و ادعا کرد که این موضوع می تواند با در نظر گرفتن راه حلی برای مسئله دوگان از روش نقطه پروکسیمال غیر دقیق حل شود. این خود کاربردی برای مسائل محدود غیر خطی است. اخیراً چند

[1] Martinet
[2] Rockafellar
[3] Burachik
[4] Auslender
[5] Isum
[6] Yang
[7] Flam
[8] Konnov

مدل که به روش تقریب پروکسیمال ترکیبی $(HAPM)$ معروفند، معرفی شده اند. موردوخوویچ [۹][۶] در سال ۲۰۱۰ به بیان روشی برای یافتن یک جواب مشترک (VOP) و (VIP) در مقاله روش تقریب پروکسیمال ترکیبی با نابرابری های وردشی کمکی برای بهینه سازی برداری پرداخته است. در این مقاله یک مسئله بهینه سازی برداری جامع برای پیدا کردن نقاط موثر ضعیف برای نگاشت هایی از فضای هیلبرت به فضای باناخ دلخواه مورد مطالعه قرار می گیرد.در آخر مخروط های مشخص شده محدب و بسته با درون ناتهی به صورت جزئا مرتب در می آیند.برای پیدا کردن جواب های مسائل بهینه سازی برداری یک مسئله نابرابری وردشی کمکی برای نگاشت های پیوسته لیپ شیتز و یکنوا معرفی می شود. روش تقریب پروکسیمال در بهینه سازی برداری به روش تقریب پروکسیمال ترکیبی برای مسائل بهینه سازی برداری جامع با در نظر گرفتن ترکیب روش اکستراگرادیانت گسترش داده می شود تا یک جواب مسئله نابرابری وردشی و روش نقطه تقریب پروکسیمال برای یافتن یک ریشه عملگر یکنوای ماکزیمال پیدا می شود. در روش تقریب پروکسیمال ترکیبی زیر مسئله ها شامل پیدا کردن جواب های تقریبی مسائل نابرابری وردشی برای نگاشت های پیوسته لیپ شیتز و یکنوا هستند. در آخر نقاط موثر ضعیف برای منظم سازی یک تابع اصلی یافت می شود. سپس نشان داده می شود که در نسخه های نسبی و مطلق برای الگوریتم ترکیبی گفته شده در زیر مسئله هایی که فقط بطور تقریبی حل می شوند، همگرایی ضعیف از دنباله های تولید شده به وسیله نقاط موثر ضعیف وجود دارد. همچنین بعضی از توسیع های الگوریتم های ترکیبی مذکور را برای بهینه سازی برداری با استفاده از توابع بریجمنی بیان می شود.روش اخیر بر پایه ترکیب چند ایده (PPM) برای حل (VOP) و روش اکستراگرادیانت برای حل (VIP) است. کرپلوویچ [۱۰][۱۴] در سال ۱۹۷۷ در مقاله ای با عنوان روش اکستراگرادیانت برای پیدا کردن نقاط زینی و مسائل دیگر به روش فوق اشاره کرده است. این در حالی است که خوبوتوو [۱۱][۱۲] در سال ۱۹۸۹ روش فوق را در مقاله ای باعنوان اصلاح روش اکستراگرادیانت برای حل نابرابری وردشی و مسائل بهینه سازی خاص، گسترش داد.

این پایان نامه به ۶ فصل تقسیم می شود:

---

[۹] Mordukhovich
[۱۰] Korpelevich
[۱۱] Khobotov

فصل اول : ابتدا به تعاریف و مفاهیم مقدماتی پر داخته می شود و سپس به بررسی عملگر یکنوای ماکزیمال می پردازیم.

فصل دوم : روش نقطه پروکسیمال را تعریف کرده و الگوریتمی را برای یافتن ریشه عملگر یکنوای ماکزیمال ارائه می دهیم.

فصل سوم : خواننده با مسئله تعادل و نابرابری وردشی و الگوریتم نقطه پروکسیمال برای حل (EP) آشنا می شود.هم چنین در ادامه الگوریتمی که برای حل مسئله نابرابری وردشی به روش اکستراگرادیانت معروف است را ارائه خواهیم کرد.

فصل چهارم : به توضیح وبررسی توابع گپ و مسیر کاهشی و کاربردهای آنها برای مسائل تعادل و نابرابری وردشی پر داخته می شود.

فصل پنجم: در این فصل در مورد گسترش دو روش پروکسیمال ترکیبی صحبت می کنیم.ابتدا الگوریتمی برای یافتن جواب مشترک (EP) و (VIP) ارائه می دهیم سپس الگوریتم ترکیبی دیگری را حل همزمان دو مسئله تعادل مختلف بیان می کنیم.

فصل ششم: برنامه ای را برای تفهیم بهتر و بیشتر الگوریتم های ترکیبی مربوطه ارائه خواهیم کرد.

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم مقدماتی

۱.۱ فضای توپولوژی

تعریف ۱.۱.۱. *فرض کنید $X \neq \emptyset$ و $\tau \subset 2^X$ (منظور از 2^X گردایه همه زیر مجموعه های X است) به گونه ای باشد که شرایط زیر برقرار باشند:*

۱. $\emptyset \in \tau, x \in \tau$

۲. هرگاه $E_1, E_2, ..., E_n \in \tau$ آنگاه $\cap_{i=1}^{n} E_i \in \tau$

۳. هرگاه $E_\alpha \in \tau$ آنگاه $\cup_\alpha E_\alpha \in \tau$

در اینصورت (X, τ) را یک فضای توپولوژیکی می نامند.

تعریف ۲.۱.۱. *فرض کنید $X \neq \emptyset$. کوچکترین توپولوژی در X (توپولوژی با کمترین عنصر) $\{X, \emptyset\}$ و بزرگترین توپولوژی در X (توپولوژی با کمترین عنصر) 2^X است که به ترتیب به توپولوژی ناگسسته و توپولوژی گسسته موسومند.*

تعریف ۳.۱.۱. *فرض کنید (X, τ) یک فضای توپولوژیکی باشد.*

$x \in X$ را یک نقطه تجمعی (حدی ، انباشتگی) $A \subset X$ گویند اگر و فقط اگر

$$x \in G \in \tau \Longrightarrow (G - \{x\}) \cap A \neq \emptyset$$

$x \in X$ نقطه مرزی $A \subset X$ است اگر وتنها اگر :

$$x \in G \in \tau \Longrightarrow G \cap A \neq \emptyset, G \cap (X - A) \neq \emptyset$$

مجموعه $A \subset X$ را بسته گویند اگر $X - A = A^c$ باز باشد.

قضیه ۴.۱.۱. *اگر S مجموعه ای فشرده در فضای توپولوژی باشد آنگاه هر زیر مجموعه نامتناهی S دارای نقطه تجمعی است.*

اثبات. به [۲۲]مراجعه کنید. □

تعریف ۵.۱.۱. *فضای توپولوژی (X, τ) را هاسدورف گویند اگر برای هر $x, y \in X$ که $x \neq y$ دو مجموعه باز U و V وجود داشته باشند که $x \in U$ و $y \in V$.*

تعریف ۶.۱.۱. *یک فضای برداری حقیقی مانند X با توپولوژی τ یک فضای برداری توپولوژیکی نامیده می شود هرگاه*

۱. نگاشت $x + y \longmapsto (x, y)$ از $X \times X$ به X پیوسته باشد.

۲. نگاشت $\lambda y \longmapsto (\lambda, y)$ $\mathbb{R} \times X$ به X پیوسته باشد.

یعنی اعمال جمع برداری و ضرب اسکالر در بردار تحت توپولوژی τ پیوسته باشند.

تعریف ۷.۱.۱. *فرض کنید U و V فضای برداری توپولوژیکی باشند و $f : U \to V$. تابع f را خطی گویند هرگاه برای هر $u, v \in U$ و $\alpha, \beta \in F$ داشته باشیم*

$$f(\alpha u + \beta v) = \alpha f(u) + \beta f(v)$$

تعریف ۸.۱.۱. *دوگان فضای برداری توپولوژیکی X را با X^* نشان می دهیم که شامل تمام توابع خطی و پیوسته روی X است.*

تعریف ۹.۱.۱. *فضای متریک X را کامل گویند اگر هر دنباله کوشی در X به عضوی از X همگرا باشد.*

تعریف ۱۰.۱.۱. *فضای نرمداری که نسبت به متریک حاصل از نرم، کامل باشد را فضای باناخ می گویند.*

تعریف ۱۱.۱.۱. *فرض کنید X یک فضای برداری حقیقی باشد و تابع $. : X \times X \to \mathbb{R}$ به گونه ای باشد که در شرایط زیر صدق کند*

۱. $x = \circ \quad \longleftrightarrow \quad < x.x >= \circ$

۲. $x.y = y.x$

۳. $x.(y+z) = x.y + x.z$

۴. $\alpha \in \mathbb{R} \quad \alpha(x.y) = (\alpha x).y = x.(\alpha y)$

فضایی با این ویژگی را فضای ضرب داخلی گویند. اگر $(X, .)$ تحت نرم $\|x\| = \sqrt{x.x}$ که $x \in X$ کامل باشد، X را فضای هیلبرت گویند. لازم به ذکر است که اگر $X = R$ آنگاه فضای هیلبرت حقیقی را خواهیم داشت.

لم ۱۲.۱.۱. *فرض کنید H فضای هیلبرت حقیقی باشد، آنگاه برای هر $x, y \in H$ شرایط زیر برقرار است:*

۱. $\|x+y\|^{۲} \leq \|y\|^{۲} + ۲ < x, x+y >$

۲. $\|\alpha x + (۱-\alpha)y\|^{۲} = \alpha\|x\|^{۲} + (۱-\alpha)\|y\|^{۲} - \alpha(۱-\alpha)\|x-y\|^{۲}$

۳. $\|x-y\|^{۲} = \|x\|^{۲} + \|y\|^{۲} - ۲ < x, y >$

لم ۱۳.۱.۱. *فرض کنید H فضای هیلبرت حقیقی باشد و $\{\alpha_k\}$ دنباله حقیقی باشد که برای هر $k \geq \circ$، $a \leq \alpha_k \leq b < ۱$. همچنین $\{x_k\}$ و $\{y_k\}$ دو دنباله در H باشند که برای بعضی از $\sigma \geq \circ$ در روابط زیر صدق می کنند:*

$$\begin{cases} \limsup_{k\to\infty} \|x_k\| \leq \sigma \\ \limsup_{k\to\infty} \|y_k\| \leq \sigma \\ \lim_{k\to\infty} \|\alpha_k x_k + (۱-\alpha_k)y_k\| = \sigma \end{cases}$$

آنگاه: $\lim_{k\to\infty} \|x_k - y_k\| = \circ$

اثبات. به [۸] مراجعه کنید. □

۲.۱ توپولوژی ضعیف

تعریف ۱.۲.۱. *ابتدا برای فضای توپولوژیکی X همسایگی ضعیف حول $x_\circ \in X$ را به صورت زیر تعریف می کنیم.*

$$\nu_w = \{x \in X| \quad |< x - x_\circ, x_i^\star >| < \epsilon \qquad \forall i \in \{۱, ۲, ..., m\} \quad \}$$

که $m \in \mathbb{N}, \epsilon > \circ$ و $x_i^* \in X^*$. یک توپولوژی ضعیف روی X به صورت اجتماع دلخواه و اشتراک متناهی از همسایگی های ضعیف روی X است و با نماد $\tau(X, X^\star)$ نشان می دهیم.

گزاره ۲.۲.۱. *فرض کنید Z و X به ترتیب فضاهای برداری توپولوژیکی و توپولوژیکی باشند، در اینصورت*

$$\psi : Z \to X$$

همراه با توپولوژی ضعیف پیوسته است اگر وتنها اگر برای هر $x^\star \in X^\star$ ترکیب $x^\star \circ \psi$ پیوسته باشد.

گزاره ۳.۲.۱. *فضای باناخ X همراه با توپولوژی ضعیف $\tau(X, X^\star)$ هاسدورف است.*

گزاره ۴.۲.۱. *فرض کنید X فضای باناخ باشد در اینصورت $\{x_n\} \subset X$ در شرایط زیر صدق می کند.*

۱. $x_n \rightharpoonup x$ *اگر و تنها اگر* $< x_n, x^\star > \to < x, x^\star >$ *برای هر* $x^\star \in X^\star$

۲. *اگر* $\|x_n - x\| \to \circ$ *آن گاه* $x_n \rightharpoonup x$

۳. *اگر* $x_n \rightharpoonup x$ *آن گاه* $\{\|x_n\|\}$ *کراندار است و* $\|x\| \le \lim_{n\to\infty} \inf \|x\|$

۴. *اگر* $x_n \rightharpoonup x$ *و* $x_n^* \to x^*$ *آنگاه* $< x_n, x_n^* > \to < x, x^* >$

اثبات. به [۲۲] مراجعه کنید. □

۳.۱ مفاهیم اساسی در آنالیز محدب

تعریف ۱.۳.۱. *فرض کنید S زیر مجموعه ای از فضای برداری X باشد در اینصورت غلاف محدب را با $Co(S)$ نشان می دهیم و به صورت زیر نشان می دهیم.*

$$Co(S) = \{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i | n \in \mathbb{N}, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0, x_i \in S \forall i \in \{1, 2, ..., n\}\}$$

تعریف ۲.۳.۱. *فرض کنید X فضای باناخ باشد. تابع $F : X \to \mathbb{R}$ را پیوسته آفین گویند اگر وجود داشته باشد $x^\star \in X^\star$ و $\alpha \in \mathbb{R}$ به طوریکه برای هر $x \in X$ داشته باشیم*

$$F(x) = < x, x^\star > + \alpha$$

.

تعریف ۳.۳.۱. *فرض کنید $f : \mathbb{R}^n \to \bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. تابع f را محدب گوییم اگر برای هر $x, y \in \mathbb{R}^n$ و $\lambda \in [0, 1]$ داشته باشیم*

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda) f(y)$$

تعریف ۴.۳.۱. *فرض کنید $f : \mathbb{R}^n \to \bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. تابع f را در x_0 نیم پیوسته پائینی (بالایی) گوییم هر گاه $\lim_{x \to x_0} \inf f(x) \geq f(x_0)$.*

$(\lim_{x \to x_0} \sup f(x) \leq f(x_0))$

تعریف ۵.۳.۱. *فرض کنید X فضای باناخ باشد. تابع $F : X \to \bar{\mathbb{R}}$ ضعیفا نیم پیوسته پائینی است در $x \in X$ اگر*

$$\lim_{n \to \infty} \inf F(x_n) \geq F(x)$$

وقتی که

$$x_n \rightharpoonup x$$

تذکر ۶.۳.۱. *هر تابع $F : X \to \bar{\mathbb{R}}$ ضعیفا نیم پیوسته پائینی است اگر برای هر $x \in X$ ضعیفا نیم پیوسته پائینی باشد.*

نتیجه ۷.۳.۱. *هر تابع $F : X \to \bar{\mathbb{R}}$ نیم پیوسته پائینی ، ضعیفا نیم پیوسته پائینی است.*

تعریف ۸.۳.۱. *فرض کنید $f : K \times K \to \mathbb{R}$ و K مجموعه محدب ، بسته و غیر تهی باشد. f را نیمه پیوسته بالایی در x گویند هرگاه برای هر $x, y, z \in K$ داشته باشیم*

$$\limsup_{t \to ۰^+} f(tz + (۱ - t)x, y) \leq f(x, y)$$

تعریف ۹.۳.۱. *تابع $f : \mathbb{R}^n \to \bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ را سره یا غیر بدیهی گویند هرگاه برای هر $x \in \mathbb{R}^n$ ،*

$$f(x) > \infty \qquad , \qquad Dom(f) = \{x : f(x) < \infty\} \neq \emptyset$$

فرض کنید $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ، در اینصورت تعاریف زیر را خواهیم داشت:

تعریف ۱۰.۳.۱. *تابع f را لیپ شیتز پیوسته گویند هرگاه عدد حقیقی $L > ۰$ موجودباشد، به طوریکه برای هر $x, y \in \mathbb{R}^n$ داشته باشیم:*

$$\|f(y) - f(x)\| \leq L\|y - x\|$$

اگر $L = ۱$ ، f را غیرانبساطی و در صورتی که $L < ۱$ ، f را انقباضی می گویند.

تعریف ۱۱.۳.۱. *تعریف دیگری را برای انقباضی بودن تابع f داریم که بصورت زیر است. تابع f را انقباضی گویند هرگاه برای هر $x, y \in \mathbb{R}^n$ که $x \neq y$ داشته باشیم*

$$\|f(y) - f(x)\| < \|y - x\|$$

تعریف ۱۲.۳.۱. *اپی گراف f رابرای هر $x \in \mathbb{R}^n$ بصورت زیر تعریف می کنیم:*

$$epi(f) = \{(x, \lambda) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : f(x) \leq \lambda\}$$

تعریف ۱۳.۳.۱. *گراف تابع f برای هر $x \in \mathbb{R}^n$ عبارت است از :*

$$graph(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : y \in f(x)\}$$

تعریف ۱۴.۳.۱. *مجموعه تراز تابع f برای هر $x \in \mathbb{R}^n$ و هر $\alpha \in \mathbb{R}$ بصورت زیر تعریف می شود:*

$$Lev_\alpha(f) = \{x : f(x) \leq \alpha\}$$

گزاره ۱۵.۳.۱. *فرض کنید $f : \mathbb{R}^n \to \bar{\mathbb{R}}$ شرایط زیر معادل هستند:*

الف. f نیم پیوسته پائینی است.

ب. $epi(f)$ بسته است.

ج. $Lev_\alpha(f)$ بسته است.

گزاره ۱۶.۳.۱. *فرض کنید $f : \mathbb{R}^n \to \bar{\mathbb{R}}$ سره و نیم پیوسته پائینی و $X \subset \mathbb{R}^n$ فشرده باشد آنگاه تابع f از پایین کراندار است و کران خود را اختیار می کند، یعنی:*

$$\inf_{x \in X} f(x) = f(x_\circ)$$

تذکر ۱۷.۳.۱. *اگر شرایط گزاره قبل برقرار باشد ولی X فشرده نباشد بلکه مجموعه ترازهای تابع f کراندار باشدباز هم تابع f از پایین کراندار است و کران خود را اختیار می کند.*

تعریف ۱۸.۳.۱. *اگر f مشتقپذیر باشد ، f شبه محدب است اگر وتنها اگر :*

$$f(x) \leq f(y) \qquad \Longrightarrow \qquad < \nabla f(y), x - y > \leq \circ$$

هم چنین می توان گفت $f : K \to \mathbb{R}$ که K مجموعه محدب و بسته و غیر تهی است ،شبه محدب است اگر وتنها اگر برای هر $x, y \in K$ و $\lambda \in [\circ, ۱]$ داشته باشیم:

$$f(\lambda x + (۱ - \lambda)y) \leq \max\{f(x), f(y)\}$$

f را اکیدا شبه محدب گویند هرگاه برای $x, y \in K$ که $x \neq y$:

$$f(\lambda x + (۱ - \lambda)y) < \max\{f(x), f(y)\}$$

تعریف ۱.۳.۱۹. *اگر f مشتقپذیر باشد ، f رامحدبنماگویند اگروفقط اگر:*

$$< \nabla f(y), x - y > \geq ۰ \qquad \Longrightarrow \qquad f(x) \geq f(y)$$

تعریف ۱.۳.۲۰. *تابع f را ρـمحدب گویند هرگاه برای هر $x, y \in \mathbb{R}^n$ و $\lambda \in [۰, ۱]$:*

$$f(\lambda y + (۱ - \lambda)x) + \rho\lambda(۱ - \lambda)\|y - x\|^۲ \leq \lambda f(y) + (۱ - \lambda)f(x)$$

اگر $\rho > ۰$، f را قویا محدب و در صورتی که $\rho < ۰$ ، f را ضعیفا محدب گویند.

در تعاریف زیر X و Y را دو فضای توپولوژیک در نظر بگیرید.

تعریف ۱.۳.۲۱.

نگاشت $T : X \to ۲^Y$ که به هر نقطه $x \in X$ یک زیر مجموعه یکتای $T(x)$ از Y را نسبت می دهد، نگاشت مجموعه مقدار می گویند.

تعریف ۱.۳.۲۲. *معکوس $T : X \to ۲^Y$ ، نگاشت مجموعه مقدار $T^{-۱} : Y \to ۲^X$ است که*

$$T^{-۱} = \{x \in X : y \in T(x)\}$$

تعریف ۱.۳.۲۳. *نگاشت مجموعه مقدار $T : X \to ۲^Y$ را نیم پیوسته بالایی در نقطه $\lambda^* \in X$ گویند، اگر برای هر مجموعه باز B شامل $T(\lambda^*)$ یک همسایگی V حول λ^* موجود باشد به طوری که برای هر $\lambda \in V$*

$$T(\lambda) \subset B$$

تعریف ۱.۳.۲۴. *نگاشت مجموعه مقدار $T : X \to ۲^Y$ را نیم پیوسته پائینی در نقطه $\lambda^* \in X$ گویند، اگر برای هر مجموعه باز B که $B \cap T(\lambda^*) \neq \emptyset$،یک همسایگی V حول λ^* وجود داشته باشد که برای هر $\lambda \in V$*

$$T(\lambda) \cap B \neq \emptyset$$

تعریف ۲۵.۳.۱. *نگاشت مجموعه مقدار T را پیوسته گوئیم هرگاه نیم پیوسته بالایی و نیم پیوسته پائینی باشد.*

تعریف ۲۶.۳.۱. *نگاشت مجموعه مقدار $T : X \to 2^Y$ در $x \in X$ بسته است اگروتنها اگر:*

$$x_k \to x \in X, \qquad y_k \to y \in Y, \qquad y_k \in T(x_k) \Longrightarrow y \in T(x_k)$$

T روی $S \subset X$ بسته است اگر در هر نقطه S بسته باشد

تعریف ۲۷.۳.۱. *فرض کنید $f : X \to \bar{\mathbb{R}}$ ، $X \subset H$ محدب و H فضای هیلبرت باشد ، زیردیفرانسیل f در نقطه $x_\circ$ برای هر $y \in H$ عبارت است از:*

$$\partial f(x_\circ) = \{p \in X^* :< p, y - x_\circ >\leq f(y) - f(x_\circ)\}$$

تعریف ۲۸.۳.۱. *مزدوج فنچل تابع f را با f^* نشان می دهیم که بصورت زیر تعریف می شود:*

$$f^* : X^* \to \bar{\mathbb{R}}$$

$$f^*(p) = \sup_{x \in X}\{< p, x > -f(x)\} \qquad \forall p \in X^*$$

مزدوج دوم فنچل تابع f عبارت است از:

$$f^{**}(x) = \sup_{p \in X^*}\{< p, x > -f^*(p)\} \qquad \forall x \in X$$

تعریف ۲۹.۳.۱. *نابرابری فنچل برای هر $x \in X$ و $p \in X^*$ بصورت زیر تعریف می شود:*

$$< p, x >\leq f(x) + f^*(p)$$

نکته ۳۰.۳.۱. *با توجه به تعاریف مزدوج فنچل ومزدوج دوم فنچل تابع f در می یابیم که $f^{**}(x) \leq f(x)$.*

گزاره ۳۱.۳.۱. *اگر $f : X \to \bar{\mathbb{R}}$ محدب و نیم پیوسته پائینی و X یک فضای برداری باشد آنگاه ، $f^{**}(x) = f(x)$.*

تعریف ۳۲.۳.۱. *فرض کنید $f:\mathbb{R}^n\to\bar{\mathbb{R}}$ مشتق جهتی تابع f بصورت زیر تعریف می شود:*

$$f'(x_\circ,v)=Df(x_\circ)(v)=\lim_{t\to\circ^+}\frac{f(x_\circ+tv)-f(x_\circ)}{t}$$

این مشتق همگن مثبت است ودر صورتیکه خطی و پیوسته باشد به آن مشتق گتو می گویند.

نکته ۳۳.۳.۱. *اگر تابع f مشتقپذیر باشد آنگاه: $f'(x_\circ,v)=<\bigtriangledown f(x_\circ),v>$*

لم ۳۴.۳.۱. *فرض کنید $f:X\to\bar{\mathbb{R}}$ و $X\subset H$ و H فضای هیلبرت باشد.اگر f محدب باشد و $x_\circ\in Dom(f)$ و $[x_\circ-x,x_\circ+x]\subseteq Dom(f)$ آنگاه:*

۱. $f'(x_\circ,v)$ موجود است.

۲. $f(x_\circ)-f(v-x_\circ)\leq f'(x_\circ,v)\leq f(v+x_\circ)-f(x_\circ)$

قضیه ۳۵.۳.۱. *اگر $f:X\to\bar{\mathbb{R}}$ محدب باشد و در نقطه درونی $x_\circ\in X$ پیوسته باشد آنگاه $f'(x_\circ,v)$ موجود و پیوسته است.*

اثبات. به [۱] مراجعه کنید. □

تعریف ۳۶.۳.۱. *با توجه به تعریف مشتق جهتی تعریف دیگری را برای زیردیفرانسیل f ارائه دهیم:*

$$\partial f(x_\circ)=\{p\in X^*:<p,v>\leq f'(x_\circ,v)\}\qquad\forall x\in X$$

با توجه به تعریف بالا می دانیم که زیردیفرانسیل تابع f ،محدب و بسته است ولی اگر

$$f'(x_\circ,v)=-\infty$$

آنگاه زیردیفرانسیل f تهی حواهد شد.

لم ۳۷.۳.۱. *فرض کنید $f:X\to\bar{\mathbb{R}}$ محدب و پیوسته باشد در اینصورت $\partial f(x)$ نیمه پیوسته بالایی است.*

قضیه ۳۸.۳.۱. *اگر $f : X \to \bar{\mathbb{R}}$ محدب و نیم پیوسته پائینی باشد آنگاه:*

$$p \in \partial f(x_\circ) \qquad \Longleftrightarrow \qquad x_\circ \in \partial f^*(p)$$

اثبات. به [۱] مراجعه کنید. □

گزاره ۳۹.۳.۱. *اگر $f : H \to \bar{\mathbb{R}}$ محدب و در $x_\circ \in intDom(f)$ مشتق‌پذیر گتو باشد آنگاه*

$$\partial f(x_\circ) = \bigtriangledown f(x_\circ)$$

عکس گزاره بالا نیز به این صورت است:

اگر $f : H \to \bar{\mathbb{R}}$ محدب و پیوسته باشد و $\partial f(x_\circ)$ تک مقداری باشد آنگاه f در $x_\circ$ مشتق‌پذیر گتو است.

گزاره ۴۰.۳.۱. *$x_\circ$ تابع $x \longmapsto f(x) - < p, x >$ را مینیمم می کند اگر وفقط اگر:*

$$x_\circ \in \partial f^*(p), f^{**}(x_\circ) = f(x_\circ)$$

گزاره ۴۱.۳.۱. *اگر برای هر نقطه $x_\circ$ ، $\partial f(x_\circ) \neq \emptyset$ آنگاه f محدب است.*

گزاره ۴۲.۳.۱. *اگر $f : H \to \bar{\mathbb{R}}$ محدب باشد برای تمام نقاط درونی دامنه ، $\partial f(x) \neq \emptyset$ است.*

قضیه ۴۳.۳.۱. *اگر $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ محدب و نیم پیوسته پائینی باشند ویکی از این توابع پیوسته باشد هم چنین $\circ \in IntDom(f - g)$ آنگاه:*

$$\partial(f + g)(x) = \partial f(x) + \partial g(x)$$

علاوه بر این اگر f مشتق‌پذیر باشد خواهیم داشت:

$$\partial(f + g)(x) = \bigtriangledown f(x) + \partial g(x)$$

اثبات. به [۲] مراجعه کنید. □

تعریف ۴۴.۳.۱. *تابع شاخص را بصورت زیر تعریف می کنیم:*

$$\Psi_X(x) = \begin{cases} 0 & ; x \in X \\ \infty & ; x \notin X \end{cases}$$

اگر $x \in intDom(X)$ و X بسته باشد آنگاه $\Psi_X(x)$ در x پیوسته است.اگر X محدب باشد $\Psi_X(x)$ محدب خواهد بود.

تعریف ۴۵.۳.۱. *فرض کنید $M \subseteq H$ تعاریف زیر را خواهیم داشت:*

۱. M *را مخروط گوئیم هرگاه برای هر* $x \in M$ *و* $\lambda \geq 0$ *داشته باشیم* $\lambda x \in M$

۲. $M^- = \{y \in H^* :< y, m >\leq 0 \qquad \forall m \in M\}$

۳. $M^\perp = \{y \in H^* :< y, m >= 0 \qquad \forall m \in M\}$

حال به تعریف مخروط نرمال و مخروط مماس می پردازیم.

تعریف ۴۶.۳.۱. *مخروط نرمال بصورت زیر تعریف می شود:*

$$N_X(x) = \{p \in H^* :< p, y - x >\leq 0 \qquad \forall y \in X\}$$

با توجه به تعریف تابع شاخص در می یابیم که: $N_X(x) = \partial\Psi_X(x)$.

تعریف ۴۷.۳.۱. *مخروط مماس عبارت است از*

$$T_X(x) = \{p \in H^* :< p, z >\leq 0 \qquad \forall z \in N_X(x)\} = N_X(x)^-$$

تعاریف دیگری نیز برای مخروط مماس داریم که در زیر به آن اشاره می شود:

$$T_X(x_0) = \overline{cone}(X - x_0) = \cup_{\lambda > 0}\overline{\lambda((X - x_0))}$$

گزاره ۴۸.۳.۱. *فرض کنید* $X \subseteq H$

۱. *اگر* $x \in X^\circ$ *و* $X^\circ \neq \emptyset$ *آنگاه*

$$N_X(x) = \{0\} \qquad , \qquad T_X(x) = H$$

۲. اگر $X = x_\circ$ آنگاه

$$N_X(x) = H \qquad , \qquad T_X(x) = \{\circ\}$$

قضیه ۴۹.۳.۱. *اگر $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ مشتقپذیر و $K \subseteq \mathbb{R}^n$ محدب باشد و $\min_{x\in K} f(x) = f(x_\circ)$ آنگاه:*

$$- \bigtriangledown f(x_\circ) \in N_K(x_\circ)$$

اثبات. به [۲] مراجعه کنید. □

قضیه ۵۰.۳.۱. *اگر $f : \mathbb{R}^n \to \bar{\mathbb{R}}$ محدب و $K \subseteq \mathbb{R}^n$ محدب باشد و*

$$\min f(x)$$
$$s.t \qquad P(x)$$
$$x \in K$$

آنگاه:

$x_\circ$ جواب مسئله $P(x)$ است اگر وتنها اگر

$$\circ \in \partial f(x_\circ) + N_K(x_\circ)$$

اثبات. به [۲] مراجعه کنید. □

تعریف ۵۱.۳.۱. *اگر H فضای هیلبرت باشد و $K \subseteq H$ مجموعه محدب و بسته و غیرتهی باشد.برای هر نقطه $x \in H$ نزدیکترین نقطه در K موجود است که آن را با $P_K(x)$ نشان می دهیم و بصورت زیر است:*

$$P_K : H \to K$$

$$\|x - P_K(x)\| \leq \|x - y\| \qquad \forall y \in K$$

قضیه ۵۲.۳.۱. *$P_K(x)$ موجود است وبرای هر $x \in H, y \in K$ داریم:*

$$< x - P_K(x), P_K(x) - y >\geq \circ$$