دانشگاه مازندران
دانشکده علوم ریاضی

پایان نامه دوره کارشناسی ارشد

(رشته ریاضی محض گرایش آنالیز)

عنوان:

مسائل تعادلی غیرمحدب شبه آمیخته

استاد راهنما:

دکتر محسن علیمحمدی

استاد مشاور:

دکتر مهدی روحی

نگارش:

نجمه علی پور تودرواری

شهریور ۱۳۹۱

تقدیم به

پدر دلسوزم

او که به من شخصیت داد

بخاطر حمایت های بی دریغش در تمام مراحل زندگی

مادر مهربانم

او که به من هستی داد

بخاطر یک دنیا مهر و محبتش

تقدیر و سپاسگزاری:

اینک که به یاری خداوند بزرگ موفق به اتمام این پایان نامه شده ام وظیفه خود می دانم از استاد ارجمندم جناب آقای دکتر علیمحمدی که از راهنمایی های ایشان در پیشبرد پایان نامه و نیز شخصیت علمی و انسانی ایشان استفاده فراوان نمودم سپاسگذاری نماییم.

همچنین از زحمات استاد مشاور جناب آقای دکتر روحی و همه عزیزانی که مرا مرهون لطف و کمک های خود نموده اند تشکر می نمایم.

در اینجا فرصت را مغتنم شمرده از اساتید داور جناب آقای دکتر علیزاده افروزی و جناب آقای دکتر داداشی و نماینده محترم تحصیلات تکمیلی که قبول زحمت فرمودند کمال تشکر را دارم.

چکیده:

در این پایان نامه مسائل نامساوی نیم تغییراتی که شکل عمومی آن به‌صورت ذیل است، را بررسی می‌نمائیم:
$u \in K$ را بیابید بطوریکه :

$$\langle Au, v-u \rangle \geq 0 \quad \forall v \in K$$

اگر X یک فضای باناخ متناهی البعد و $K \subset X$ فشرده و محدب و A عملگر پیوسته باشد، در اینصورت مسئله نامساوی تغییراتی فوق یک جواب دارد. وقتی K فشرده نیست یا X نامتناهی البعد است ویژگی های یکنوایی خاص لازم است تا وجود جواب اثبات گردد.

ما نوع خاصی از این مسائل مانند: مسائل نامساوی نیم تغییراتی شامل نگاشتهای رهای $\alpha - \eta$ یکنوا، مسائل نامساوی تغییراتی-نیم تغییراتی شامل نگاشتهای مجموعه مقدار، نامساوی های نیم تغییراتی از نوع هارتمن-استمپاخیا[1] برای عملگرهای بطور یکنواخت شبه یکنوا، مسائل نامساوی نیم تغییراتی غیرخطی و مسائل شبه نیم تغییراتی و وجود جواب برای این مسائل را در این پایان نامه مورد مطالعه قرار می دهیم. بررسی ما شامل هر دو حالت زیرمجموعه محدب و بسته کراندار و بی کران در فضای باناخ انعکاسی حقیقی است. در ابتدا با تکیه بر اصل KKM که با همگرایی مسکو[2] ترکیب می شود و قضیه نقطه ثابت برای نگاشتهای مجموعه مقدار که توسط طرفدار[3] بیان گردیده وجود جواب برای زیرمجموعه های کراندار بسته و محدب را ثابت می کنیم و بعد از آن با نتیجه گیری چندین شرط سودمند، وجود جواب را برای حالت زیرمجموعه های بی کران تضمین می کنیم. در نهایت نیز با ذکر مثالهایی از مکانیک ناهموار کاربردهای نتایج حاصل شده در پایان نامه را شرح می دهیم. .

کلمات کلیدی: مسائل تعادلی، نامساوی های تغییراتی، نامساوی های تغییراتی-نیم تغییراتی، تعمیم گرادیان کلارک، نگاشت های مجموعه مقدار، وجود جواب، نگاشت KKM، همگرایی مسکو، قضیه نقطه ثابت، یکنوایی.

[1] Hartman-Stampacchia
[2] Mosco
[3] Tarafdar

فهرست مطالب

لیست جداول

پیش گفتار:

نظریه نابرابری نقش مهمی در زمینه های مختلف مانند مکانیک، علوم مهندسی، اقتصاد و کنترل بهینه ایفا می کند [۴۰]. به علت کاربردهای زیاد، مسائل نامساوی از زمینه های مهمی برای تحقیق در دهه های اخیر شده است. مهمترین قسمت این تحقیقات تمرکز بر روی وجود جواب است. مسائل نامساوی می تواند به دو بخش اصلی تقسیم شود: نامساوی های تغییراتی که حالت خاصی از مسائل موازنه می باشد و در سال ۱۹۶۷ توسط استمپاخیا[۴][۲۷] معرفی گردید، و نامساوی های نیم تغییراتی که با جایگزین کردن زیر دیفرانسیل از یک تابع محدب با تعمیم گرادیان کلارک از یک تابع موضعاً لیپ شیتس در نامساوی تغییراتی بوجود می آید و مجموعه محدب اساسی به طور ضمنی یا صریح به جواب وابسته است. نامساوی های نیم تغییراتی اولین بار توسط پاناجیوتپولس[۵][۳۸] معرفی گردید و در بازه زمانی کوتاهی دستخوش گسترش قابل توجهی در ریاضیات محض و کاربردی شد [۵،۲۰].

در دهه اخیر، روشهای ریاضی مفید و جدید در این زمینه امکان فرمول بندی ریاضی برای رده جدیدی از مسائل را در شاخه های مختلف خصوصاً علوم مهندسی فراهم آورده است [۴۰]. نظریه ریاضی از نامساوی های نیم تغییراتی و کاربردهایش در مکانیک ناهموار، اقتصاد، علوم مهندسی توسط پاناجیوتپولس و موترانو[۶][۳۹] در حالت تابع های انرژی غیرمحدب معرفی شد و گسترش یافت.

---

[۴] Stampacchia
[۵] Panagiotopoulos
[۶] Motreanu

فصل ۱
تعاریف و مفاهیم اولیه

۱.۱ مقدمه

در این فصل مفاهیم پایه مورد نیاز را بیان نموده و در ادامه مروری گذرا بر فضاهای باناخ، هیلبرت، L^P، سوبولف و قضایای مرتبط با آنها خواهیم داشت. پس از آن به بیان قضیه دیورژانس، اتحادهای گرین و مسائل مقدار مرزی خواهیم پرداخت. شایان ذکر است که تمامی‌مطالب این فصل از کتب و مقالات معتبر گردآوری شده است.

۲.۱ مفاهیم مقدماتی

تعریف ۱.۲.۱. ***الف) دامنه:*** *فرض کنید $\mathbb{R}^N$ یک فضای اقلیدسی N ـ بعدی با نقاط $x = (x_1, ..., x_N)$ که $x_i \in R$ و $\parallel x \parallel^2 = \sum_{i=1}^{N} x_i^2$ باشد. در این صورت $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ را یک دامنه گوییم هرگاه باز و همبند باشد.*
ب) مجموعه محدب : مجموعه $E \subset \mathbb{R}^n$ *را محدب گویند، هرگاه به ازای هر $x, y \in E$ و $0 \leq t \leq 1$ داشته باشیم:*

$$tx + (1 - t)y \in E.$$

به عنوان مثال گویها در فضاهای نرم دار مجموعه هایی محدب اند.

ج) تابع محدب: *فرض کنید X یک فضای برداری باشد، تابع $f : X \to \mathbb{R} \cup +\infty$ را محدب نامیم هرگاه برای هر $x, y \in X$ و $t \in [0, 1]$ داشته باشیم:*

$$f(tx + (1 - t)y) \leq tf(x) + (1 - t)f(y).$$

د) تابع مقعر: *تابع f مقعر نامیده می شود هرگاه $-f$ محدب باشد.*

تعریف ۲.۲.۱. *نگاشت مجموعه ای مقدار $F : X \rightrightarrows Y$ را محدب گوییم اگر و تنها اگر*

$$\alpha F(x_1) + (1-\alpha)F(x_2) \subseteq F(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in Dom(F), \forall \alpha \in [0,1]$$

تعریف ۳.۲.۱. *مجموعه همه توابع پیوسته روی Ω را با $C(\Omega)$ نشان می‌دهیم. برای $k \in \mathbb{N}$، $C^k(\Omega)$ نشان‌دهنده توابعی هستند که همه مشتقات تا مرتبه k ـ ام آنها روی Ω پیوسته است. $C^\infty(\Omega)$ کلاس همه توابعی است که برای هر عدد طبیعی k، متعلق به $C^k(\Omega)$ باشد.*

تعریف ۴.۲.۱. *غلاف محدب $A \subset X$ که با $co(A)$ نشان داده می شود عبارت است از اشتراک تمام مجموعه های محدب که شامل A می باشد.*

تعریف ۵.۲.۱. *فرض کنید $A : X \to X^*$، در اینصورت A، اجباری [1] است اگر و اگر تنها*

$$\lim_{\|u\| \to \infty} \frac{\langle Au, u \rangle}{\|u\|} = +\infty$$

۱.۲.۱ فضای برداری توپولوژیک

فرض کنیم τ یک توپولوژی بر فضای برداری X باشد به طوریکه:

(الف) اعمال فضای برداری نسبت به τ پیوسته باشد، و

(ب) هر نقطه X یک مجموعه بسته باشد.

در این شرایط گوییم τ یک توپولوژی برداری در X است و X یک فضای برداری توپولوژیک است.

۲.۲.۱ فضاهای هاسدورف

فضای توپولوژیک X را فضای هاسدورف خوانیم هرگاه به ازای هر دو نقطه متمایز x_1 و x_2 از X همسایگی های U_1 و U_2 به ترتیب از x_1 و x_2 یافت می شوند که از هم جدا باشند یعنی $U_1 \cap U_2 = \varnothing$.

تذکر ۱. *می دانیم که یک فضای نرمدار X روی میدان F یک فضای برداری توپولوژیک است و هر فضای برداری توپولوژیک یک فضای هاسدورف است.*

لم ۶.۲.۱. *فرض کنید X یک فضای نرمدار خطی باشد. در اینصورت هر گوی واحد بسته در X فشرده است اگر و تنها اگر X متناهی البعد باشد [۴۲].*

[1] Coercive

۳.۱ فضاهای باناخ و هیلبرت (حقیقی)

تعریف ۱.۳.۱. *فضای باناخ:* *فضای نرمدار X را یک فضای باناخ گوییم هرگاه X نسبت به متریک تولید شده بوسیله نرم، فضایی کامل باشد.*

قضیه ۲.۳.۱. *هان-باناخ* [۴۲]: *فرض کنید X یک فضای برداری حقیقی، و Y زیرفضایی از X باشد. اگر p یک نیم‌نرم روی X بوده و همچنین فرض کنیم f یک تابعک خطی بر Y باشد که، در شرط $|f(x)| \leq p(x)$ برای هر $x \in Y$ صدق نماید، آنگاه یک تابعک خطی مانند F روی X با شرط $|F(x)| \leq |p(x)|$ برای هر $x \in X$ و $F|_Y = f$ موجود است.*

تعریف ۳.۳.۱. *تابع لیپ شیتس موضعی* [۲۶]: *اگر X یک فضای باناخ حقیقی باشد، تابع $h : X \to R$ لیپ شیتس موضعی نامیده می‌شود وقتی‌که برای هر $x \in X$ یک همسایگی V_x از x و یک ثابت $L_x \geqslant 0$ای باشد که داشته باشیم:*

$$| h(z) - h(w) | \leq L_x \parallel z - w \parallel \qquad , \forall z, w \in V_x$$

۱.۳.۱ فضای دوگان

فرض کنید X یک فضای نرمدار باشد، در این صورت خانواده همه تابعک‌های خطی و کراندار روی X با نرم

$$\parallel f \parallel = \sup_{x \neq 0, x \in X} \frac{| f(x) |}{\parallel x \parallel}$$

را دوگان فضای X نامیده و با X^* نمایش می‌دهند، که خود یک فضای باناخ است.

تعریف ۴.۳.۱. *عناصر فضای دوگان X^* از X تابعکهای خطی پیوسته بر X اند که با x^* نشان داده می شوند، و به جای $x^*(x)$، می نویسیم $\langle x, x^* \rangle$.*

$$X^* = \{x^* : X \to \mathbb{C} | x^* \text{خطی و پیوسته}\}$$

۲.۳.۱ فضای انعکاسی

فضای نرمدار X را انعکاسی نامند هرگاه نگاشت $\begin{cases} C : X \to X^{**} \\ x \to l_x \end{cases}$ *تعریف شده به وسیله $l_x x^* = x^*(x)$، که در آن y یک تابعک خطی روی X است، یک ایزومتری باشد.*

منظور از ایزومتری، یعنی یک عملگر خطی دو سوئی که نرم را حفظ می‌کند به عبارت دیگر، یعنی به ازای هر $x \in X$، داشته باشیم $\| Cx \| = \| x \|$.

اگر X یک فضای انعکاسی باشد، دوگان آن یعنی X^* نیز انعکاسی است.

۳.۳.۱ فضای تفکیک پذیر

تعریف ۵.۳.۱. *فضای باناخ X را تفکیک‌پذیر گوییم هرگاه زیرمجموعه چگال شمارش‌پذیر داشته باشد.*

تعریف ۶.۳.۱. *فضای توپولوژیکی X را یک فضای موضعاً محدب گویند هرگاه دارای یک پایه موضعی محدب باشد.*

قضیه ۷.۳.۱. **[۲۵]** *فرض کنیم X یک فضای برداری بوده و X^* یک فضای برداری جداساز از تابعهای خطی بر X باشد. در این صورت X^* ـ توپولوژی τ' فضای X را به یک فضای موضعاً محدب که فضای دوگانش X^* است، تبدیل می‌کند.*

تعریف ۸.۳.۱. ***همگرایی ضعیف:*** *فرض کنید X یک فضای نرمدار باشد، دنباله $\{x_n\}$ از X، همگرای ضعیف به عنصر $x \in X$ است هرگاه*

$$x^*(x_n) \to x^*(x); \quad \forall x^* \in X^*.$$

قضیه ۹.۳.۱. **[۱۵]** *هر دنباله کراندار در یک فضای باناخ انعکاسی دارای یک زیردنباله به‌طور ضعیف همگراست.*

تعریف ۱۰.۳.۱. ***همگرایی قوی:*** *فرض کنید X یک فضای نرمدار باشد، در این صورت دنباله $\{x_n\} \subset X$ را به عنصر $x \in X$ همگرای قوی گویند هرگاه*

$$\lim_{n\to\infty} \| x_n - x \| = 0.$$

حال به بررسی بعضی از این خاصیت ها می پردازیم:

قضیه ۱۱.۳.۱. **[۱۵]**

۱) *اگر $x_n \to x$ همگرای ضعیف باشد، آنگاه حد ضعیف x، یکتاست.*

۲) اگر $x_n \to x$ همگرای ضعیف باشد، آنگاه هر زیردنباله از $\{x_n\}$ نیز به x همگرای ضعیف است.

۳) اگر $x_n \to x$ همگرای ضعیف باشد، آنگاه $\{\| x_n \|\}$، کراندار است.

۴) اگر $x_n \to x$ همگرای قوی باشد، آنگاه $x_n \to x$ همگرای ضعیف است.

۵) اگر $x_n \to x$ همگرای ضعیف باشد و $dim\ X < \infty$، آنگاه $x_n \to x$ همگرای قوی است.

۶) اگر $x_n \to x$ همگرای ضعیف باشد، آنگاه $\|x\| \leq \lim \inf_{n\to\infty} \|x_n\|$

تعریف ۱.۳.۱۲. *نیمه پیوسته ضعیف پایینی*: *تابعک F روی فضای باناخ X نیمه پیوسته ضعیف پایینی است هرگاه*

$$F(u) \leq \liminf_{n\to\infty} F(u_n)$$

وقتی که $u_n \to u$ به‌طور ضعیف در X.

با توجه به قضیه قبل نرم روی یک فضای باناخ، نیمه پیوسته ضعیف پایینی می‌باشد.

تعریف ۱.۳.۱۳. *نیمه پیوسته ضعیف بالایی*: *تابعک F روی فضای باناخ X نیمه پیوسته ضعیف بالایی است هرگاه*

$$\limsup_{n\to\infty} F(u_n) \leq F(u)$$

وقتی که $u_n \to u$ به‌طور ضعیف در X.

قضیه ۱.۳.۱۴. [۴۲] *گوی واحد بسته در یک فضای باناخ X، بطور ضعیف فشرده است اگر فقط اگر X انعکاسی باشد.*

تعریف ۱.۳.۱۵. *برای هر $x \in X$ یک تابعی خطی مانند f_x بر X^* (دوگان X) با ضابطه $\Lambda \mapsto \Lambda x$ هست که نقاط بر X^* را جدا می کند. ضعیفترین توپولوژی بر X^* که تابع f_x را پیوسته می سازد، توپولوژی ضعیف ستاره نام دارد.*

قضیه ۱.۳.۱۶. *باناخ-آلاغلو* [۵]: *فرض کنید X یک فضای باناخ است، در اینصورت گوی یکه بسته از فضای دوگان تحت توپولوژی ضعیف ستاره بسته است. خصوصا اگر X یک فضای باناخ انعکاسی باشد آنگاه گوی یکه بسته تحت توپولوژی ضعیف فشرده است.*

تعریف ۱۷.۳.۱. $x^* \in X^*$ *زیرگرادیان* $f : X \to (-\infty, +\infty]$ *در* $x \in domf$ *است، به شرط آنکه برای هر* $y \in X$، $f(y) - f(x) \geq \langle x^*, y - x\rangle$ *باشد.*

مجموعه زیرگرادیان های f *در* x *زیر دیفرانسیل* f *در* x *نامیده می شود و با نماد* $\partial f(x)$ *نشان داده می شود. یعنی داریم:*

$$\partial f(x) = \{x^* \in X^*; f(y) - f(x) \geq \langle x^*, y - x\rangle, \forall y \in X\}$$

$$= \{x^* \in X^*; f(x + y) - f(x) \geq \langle x^*, y\rangle, \forall y \in X\}$$

و اگر $x \in X\backslash domf$، *آنگاه* $\partial f(x) = \varnothing$.

۴.۳.۱ مجموعه و توابع اندازه پذیر

اندازه μ *تابعی است (یا به‌عبارتی نگاشتی است) که بر روی* Ω *بر مجموعه* X *تعریف می‌شود و مقادیر بین* $[0, \infty)$ *را می‌پذیرد و دارای خصوصیات ذیل است:*

$$\mu(\varnothing) = 0$$

$$\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i)$$

$E_1, E_2, \ldots$ *تعداد شمارایی از مجموعه هایی در* Ω *هستند، که اشتراک هر کدام از آن‌ها با دیگری تهی است (مجموعه‌ها دوبه‌دو مجزا هستند). در این حالت به* (X, μ, Ω) *فضای اندازه و به اعضای* Ω، *مجموعه های اندازه پذیر گفته می‌شود.*

فرض کنیم f *تابعی باشد که بر فضای اندازه پذیر* X *تعریف شده است و مقادیرش در دستگاه وسعت یافته اعداد حقیقی‌اند. تابع را اندازه پذیر گوییم هرگاه مجموعه*

$$\{x \in \mathbb{R}^n | f(x) > a\}$$

به‌ازای هر a *حقیقی اندازه پذیر باشد.*

تعریف ۱۸.۳.۱. ***نمادگذاری:*** *الف-* $L^1(\Omega)$ *را گردایه تمام توابع تعریف شده مانند* f *روی قلمرو* Ω *(*Ω *یک زیرمجموعه اندازه‌پذیر لبگ* $\mathbb{R}^N$*) در نظر می‌گیریم که*

$$\int_{\Omega} | f | \ dx < \infty.$$

اغلب اوقات با توابعی که به‌طور موضعی انتگرالپذیر هستند، روبرو می‌شویم یعنی توابعی که روی هر زیرمجموعه فشرده از Ω انتگرالپذیر هستند و لزومی‌ندارد که روی خود Ω انتگرالپذیر باشند. مجموعه چنین توابعی را با $L^{1}_{loc}(\Omega)$ نشان می‌دهیم.

ب- برای $1 < p \leq \infty$ ، $L^{p}_{loc}(\Omega)$ عبارتست از توابع حقیقی مقدار و اندازه پذیر u روی Ω به‌طوری‌که برای هر زیرمجموعه فشرده K از Ω داشته باشیم:

$$\int_{K} |u(x)|^{p} dx < \infty.$$

تعریف ۱۹.۳.۱. *شرط کاراتئودوری* [۵]: *فرض کنید $\Omega \subset \mathbb{R}^{N}$ یک دامنه باشد، گوییم تابع* $\begin{cases} f : \Omega \times \mathbb{R}^{N} \to \mathbb{R}^{N} \\ (x, u) \to f(x, u) \end{cases}$ *در شرط کاراتئودوری صدق می‌کند، هرگاه*

(۱) *نگاشت $u \to f(x, u)$ برای تقریباً همه x های در Ω نسبت به اندازه لبگ $\mathbb{R}^{N}$ پیوسته باشد،*

(۲) *نگاشت $x \to f(x, u)$ برای هر u اندازه‌پذیر باشد.*

فضای هیلبرت

هرگاه فضای ضرب داخلی تام (کامل) باشد آنرا یک فضای هیلبرت می گویند.

قضیه ۲۰.۳.۱. [۲۶] *هر مجموعه بسته، ناتهی و محدب E از فضای هیلبرت H دارای عنصر یکتایی با کوچکترین نرم است .*

گزاره ۲۱.۳.۱. [۴۲] *(الف) هر فضای هیلبرت یک فضای باناخ انعکاسی است.*

(ب) هر زیر فضای خطی و بسته از یک فضای باناخ انعکاسی X، باناخ انعکاسی است.

(ج) اگر X تفکیک پذیر و یک فضای باناخ انعکاسی باشد آنگاه X^{*} تفکیک پذیر است.

۵.۳.۱ فضای L^{p}

فرض کنید Ω یک دامنه کراندار در $\mathbb{R}^{N}$ و $1 \leq p < \infty$ ، همچنین u یک تابع اندازه‌پذیر و تعریف شده روی Ω باشد یعنی $u : \Omega \to \mathbb{R}$. تعریف می‌کنیم:

$$\| u \|_{p} = \left(\int_{\Omega} | u(x) |^{p} \ dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

در این صورت $L^p(\Omega)$ را متشکل از همه uهایی می‌گیریم که برای آنها داشته باشیم:

$$\| u \|_p < \infty.$$

$\| u \|_p$ را نرم L^p تابع u می‌نامیم.

۶.۳.۱ سوپریمم اساسی

فرض کنید u یک تابع اندازه‌پذیر روی Ω باشد. گوییم u به‌طور اساسی کراندار است، هرگاه یک ثابت $K \in R$ وجود داشته باشد به‌طوری که رابطه $| u(x) | \leq K$ به‌طور تقریباً همه جا در Ω برقرار باشد. به بزرگترین کران پایین (اینفیمم) چنین Kهایی سوپریمم اساسی می‌گوییم و آن را با نماد زیر نمایش می‌دهیم:

$$ess \sup_{x\in\Omega} | u(x) | = inf\{K : \mu(\{x : | u(x) | > K) = 0\}.$$

۷.۳.۱ فضای $L^\infty(\Omega)$

$L^\infty(\Omega)$ فضای برداری متشکل از همه توابع اندازه‌پذیر است که سوپریمم اساسی آنها کراندار باشد. نرم در این فضا به صورت ذیل تعریف می‌شود:

$$\| u \|_\infty = ess \sup_{x\in\Omega} | u(x) | .$$

۸.۳.۱ فضای $L^p_{loc}(\Omega)$

برای $1 \leq p \leq \infty$، $L^p_{loc}(\Omega)$ عبارت است از توابع حقیقی مقدار و اندازه پذیر u روی Ω به‌طوری که برای هر زیرمجموعه فشرده K از Ω داشته باشیم:

$$\int_K | u(x) |^p \; dx < \infty.$$

قضیه ۲۲.۳.۱. ***کامل بودن*** **L^p** [۱۵]: $L^p(\Omega)$ به ازای $1 \leq p \leq \infty$ و هر دامنه Ω در $\mathbb{R}^N$ یک فضای باناخ است، به علاوه اگر $p = 2$ آنگاه $L^2(\Omega)$ یک فضای هیلبرت با ضرب داخلی ذیل می‌باشد:

$$\langle u, v \rangle = \int_\Omega uv \, dx.$$

۹.۳.۱ نشاندن

[۵] فرض کنیم Ω دامنه ای در $\mathbb{R}^k$ و c یک ثابت باشد، اگر X و Y فضاهای باناخ باشند به طوری که $X \subset Y$ و داشته باشیم:

$$\|u\|_Y \leq c\|x\|_X \quad ; \quad \text{برای هر } u \in X$$

آنگاه گوییم X به طور پیوسته در Y نشانده می شود و یا بطور معادل می توان گفت عملگر شمول $I : X \to Y$ کراندار باشد. همچنین می گوییم X به طور فشرده در Y نشانده می شود هرگاه عملگر نشاندن I فشرده باشد.

۴.۱ اتحادهای گرین و قضیه دیورژانس

۱.۴.۱ بردار گرادیان

اگر u در $\mathbb{R}^N$ تعریف شده باشد، گرادیان u در $x = (x_1, ..., x_N)$، برداری است در $\mathbb{R}^N$ که به صورت $\nabla u = grad\ u = (\frac{\partial u}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_N})$ تعریف می‌شود.

۲.۴.۱ دیورژانس

اگر $u = (u_1, ..., u_N)$ یک میدان برداری باشد، دیورژانس u در $x = (x_1, ..., x_N)$ به صورت ذیل تعریف می‌شود:

$$div\ u = \nabla . u = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + ... + \frac{\partial u_N}{\partial x_N} = \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial u_j}{\partial x_j}.$$

قضیه ۱.۴.۱. *دیورژانس:* *فرض کنید $\overrightarrow{v}$ یک میدان برداری روی $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ باشد به طوری که $v_j \in C^1(\Omega), \overrightarrow{v} \in C^1(\Omega; \mathbb{R}^N)$ آنگاه:*

$$\int_{\partial\Omega} \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{n}\, ds = \int_{\Omega} div\, \overrightarrow{v}\, dx$$

که در آن $\overrightarrow{n}$ یک بردار نرمال برونسوی عمود بر سطح $\partial\Omega$ و ds نمایش دهنده عنصر $(n-1)$ بعدی در $\partial\Omega$ می باشد. به ویژه اگر u یک تابع در $C^2(\overline{\Omega})$ باشد با جایگذاری در رابطه فوق داریم:

$$\int_{\Omega} \Delta u dx = \int_{\partial\Omega} \nabla u . n ds = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} ds$$

۳.۴.۱ اتحاد های گرین

فرض کنید $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ یک دامنه کراندار با مرز هموار و $u,v \in C^{۲}(\overline{\Omega})$ آنگاه چنانچه در قضیه دیورژانس قرار دهیم $\overrightarrow{v} = v.\nabla u$ اتحاد اول گرین حاصل می شود:

$$\int_{\partial\Omega} v\frac{\partial u}{\partial n}ds = \int_{\Omega}(v\Delta u + \nabla u.\nabla v)dx$$

اگر در اتحاد اول گرین $u = v$، آنگاه:

$$\int_{\partial\Omega} u\frac{\partial u}{\partial n}ds = \int_{\Omega}(u\Delta u + |\nabla u|^{۲})dx$$

حال اگر $u \in C^{۲}(\Omega) \cap C^{۱}(\overline{\Omega})$ و روی Ω، $\Delta u = ۰$ و همچنین داشته باشیم $u = ۰$ یا $\frac{\partial u}{\partial n} = ۰$ روی $\partial\Omega$، آنگاه $|\nabla u| = ۰$، یعنی u در Ω ثابت است. اگر در اتحاد اول گرین $v = ۰$:

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n}ds = \int_{\Omega} \Delta u dx$$

با تعویض u و v در اتحاد اول گرین و کم کردن این دو رابطه، اتحاد دوم گرین به دست می آید:

$$\int_{\partial\Omega}(v\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial u}{\partial n})ds = \int_{\Omega}(v\Delta u - u\Delta v)dx$$

۵.۱ فضای سوبولف [۵]

تعریف ۱.۵.۱. *اندیس چندگانه:* *اندیس چندگانه، یک Nتایی $\alpha = (\alpha_{۱}, ..., \alpha_N)$ است که هر کدام از α_jها، اعداد صحیح نامنفی هستند. تک‌جمله‌ای $x_{۱}^{\alpha_{۱}}...x_N^{\alpha_N}$ را با x^{α} نشان می‌دهیم که دارای درجه $|\alpha| = \Sigma_{j=۱}^{N}\alpha_j$ است، به‌طور مشابه اگر $D_j = \dfrac{\partial}{\partial x_j}$ برای $۱ \leq j \leq N$ و $u : \Omega \subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ و $x = (x_{۱}, ..., x_N)$ در Ω باشند:*

$$D^{\alpha}u = (D_{۱}^{\alpha_{۱}}...D_N^{\alpha_N})(u) = \frac{\partial^{|\alpha|}u}{\partial x_{۱}^{\alpha_{۱}}...\partial x_N^{\alpha_N}}$$

نشان‌دهنده عملگر دیفرانسیل‌پذیر از مرتبه $|\alpha|$ است و $D^{(۰,...,۰)}u = u$.

تعریف ۲.۵.۱. *مشتق ضعیف:* *فرض کنید $u \in L^{۱}_{loc}(\Omega)$ و α یک اندیس چندگانه باشد، تابع $v \in L^{۱}_{loc}(\Omega)$ یک مشتق ضعیف از مرتبه α برای u نامیده می شود هرگاه تساوی زیر برای هر $\Phi \in C^{\infty}_{۰}(\Omega)$ برقرار باشد:*

$$\int_{\Omega} uD^{\alpha}\phi dx = (-۱)^{|\alpha|}\int_{\Omega} v\phi dx$$

می نویسیم $u = D^{\alpha} v$.

می گوییم یک تابع به طور ضعیف مشتق پذیر است هرگاه همه مشتقات ضعیف از مرتبه اول آن موجود باشد و گوییم k مرتبه به طور ضعیف مشتق پذیر است هرگاه همه مشتقات ضعیف از مرتبه نابیشتر از k برای آن موجود باشند. فضای خطی توابع k مرتبه مشتق پذیر ضعیف را با $W^k(\Omega)$ نشان می دهیم. واضح است که $C^k(\Omega) \subset W^k(\Omega)$.

تعریف ۳.۵.۱. مشتق یک نگاشت: *نگاشت $F : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ را در نظر بگیرید، مشتق F در نقطه x در جهت y را بدین صورت تعریف می‌کنیم:*

$$F'(x)y = \lim_{\varepsilon \to \circ} \frac{F(x+\varepsilon y) - F(x)}{\varepsilon}.$$

۱.۵.۱ فضای سوبولف

فرض کنید k یک عدد صحیح نامنفی و $1 \leq p \leq \infty$ باشد. فضای سوبولف $W^{k,p}(\Omega)$ فضای خطی توابع $u \in L^P(\Omega)$ می‌باشد که برای هر $\circ \leq |\alpha| \leq k$ مشتق ضعیف $D^{\alpha} u$ وجود داشته باشد و به $L^p(\Omega)$ متعلق باشد:

$$W^{k,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) \quad : \quad D^{\alpha} u \in L^p(\Omega), \quad \circ \leq |\alpha| \leq k\}$$

واضح است که $W^{\circ,p}(\Omega) = L^P(\Omega)$ یعنی $L^P(\Omega)$ حالت خاصی از فضاهای سوبولف است.

۲.۵.۱ نرم در فضای سوبولف

فرض کنید k یک عدد صحیح نامنفی و $1 \leq p \leq \infty$ باشد، آنگاه:

$$\| u \|_{k,p} = \left(\sum_{\circ \leq |\alpha| \leq k} \|D^{\alpha}{}_u\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}} \qquad 1 \leq p < \infty,$$

$$\| u \|_{k,\infty} = \max_{\circ \leq |\alpha| \leq k} \|D^{\alpha}{}_u\|_{\infty} \qquad p = \infty.$$

نرم‌هایی در فضای $W^{k,p}(\Omega)$ خواهند بود.

$W^{k,p}(\Omega)$ تحت نرم فوق یک فضای باناخ انعکاسی است.

تعریف ۴.۵.۱. *بستار $C_{\circ}^k(\Omega)$ در فضای $W^{k,p}(\Omega)$، $W_{\circ}^{k,p}(\Omega)$ نامیده می‌شود.*