دانشگاه بیرجند

دانشکده علوم ریاضی و آمار

گروه ریاضی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد

ریاضی محض، گرایش جبر

عنوان

حلقه شبه ارزیابی ماتریسی و توسیع قضیه ای از ارزیابی ماتریسی

استاد راهنما

دکتر محمد حسین حسینی

استاد مشاور

دکتر حسین فضائلی مقیمی

نگارنده

ریحان احمدی بوته گز

شهریور ۱۳۹۱

چکیده

وجود تناظر بین ارزیابی ها و ارزیابی ماتریسی روی یک حلقه قبلا توسط کوهن [1] ثابت شده است. در این پایان نامه ضمن معرفی شبه ارزیابی ماتریسی روی یک حلقه سعی می کنیم وجود تناظر یک به یک مشابهی بین ارزیابی های ماتریسی روی R و تعدادی زیر مجموعه های خاص از $\Sigma(MVPR)$ (مجموعه همه ماتریس های مربعی روی R) را ثابت کنیم. همچنین اثباتی برای نتیجه زیر ارائه می شود:
بین ارزیابی های ماتریسی روی R و ارزیابی R – میدان مانده یک دو سوئی طبیعی وجود دارد.

واژگان کلیدی: حلقه ارزیابی – موضعی کردن – میدان مانده – ارزیابی ماتریسی – حلقه شبه ارزیابی ماتریسی

تعداد صفحات پایان نامه: ۷۰

---

[1] Cohn

تقدیم به پدر بزرگوارم و مادر مهربانم

آن دو فرشته ای که از خواسته هایشان گذشتند

سختی ها را به جان خریدند

و خود را سپر بلای مشکلات و ناملایمات کردند

تا من به جایگاهی که اکنون در آن ایستاده ام برسم

سپاس گزاری...

سپاس بی کران پروردگار یکتا را که هستی مان بخشید و به طریق علم و دانش رهنمونمان شد و به همنشینی رهروان علم و دانش مفتخرمان نمود و خوشه چینی از علم و معرفت را روزیمان ساخت.

در ابتدا از پدر و مادر عزیز، دلسوز و مهربانم که آرامش روحی و آسایش فکری فراهم نمودند تا با حمایت های همه جانبه در محیطی مطلوب، مراتب تحصیلی و نیز پایان نامه درسی را به نحو احسنت به اتمام برسانم، سپاس گزاری می کنم.

همچنین بر خود لازم دانسته از راهنمایی ها و زحمات استاد ارجمند جناب آقای دکتر حسینی کمال تشکر را داشته باشم و از همه ی اساتید گروه ریاضی که در طی این دو سال ما را همراهی کرده اند سپاس گزارم.

در پایان از تمامی دوستان و همکلاسی هایم و همه ی کسانی که به نوعی برایم زحمت کشیده اند صمیمانه قدر دانی می کنم.

شکر و سپاس خدا را که بزرگترین امید و یاور در لحظه لحظه زندگیست...

ریحان احمدی بوته گز

شهریور ۱۳۹۱

فهرست مطالب

پیش گفتار

در این پایان نامه موضعی سازی در حالت جابجایی و غیر جابجایی، ارزیابی روی حلقه، حلقه های ارزیابی، ارزیابی ماتریسی و شبه ارزیابی ماتریسی را مورد بررسی قرار داده و به اثبات تناظر بین ارزیابی ماتریسی روی R و بعضی زیر مجموعه های خاص $\Sigma(MVPR)$ از ماتریس های مربعی روی R می پردازیم.

بحث ارزیابی بر روی حلقه های جابجایی از دیرباز تعریف شده است. ارزیابی بر روی میدان های جابجایی در سال توسط شیلینگ [۲] مطرح و مثال هایی هم ارائه گردید و سعی شد این ارزیابی بر روی دیگر ساختارهای جبری بیان گردد.

مباحث این پایان نامه در سه فصل به شکل زیر بیان می شود:

فصل اول شامل سه بخش می باشد که بخش اول به بیان تعاریف، مفاهیم و قضایای مورد نیاز برای فصل های بعد می پردازد. در بخش های بعد موضعی سازی جابجایی و موضعی سازی غیر جابجایی مطرح می شود.

فصل دوم هم شامل دو بخش است. در بخش اول به بیان ارزیابی و خواص حلقه های ارزیابی و مثال هایی از آن پرداخته شده است. در بخش دوم ابتدا تعاریف مورد نیاز در رابطه با ارزیابی ماتریسی مطرح شده، سپس تعریف ارزیابی ماتریسی و مثالی از آن آورده شده است. در بخش سوم این فصل شبه ارزیابی ماتریسی و نیمه شبه ارزیابی و نتایجی مربوط به این مقوله را ارائه کرده ایم.

در فصل سوم حلقه شبه ارزیابی ماتریسی را معرفی کرده و به اثبات تناظر بین ارزیابی های ماتریسی و حلقه های شبه ارزیابی ماتریسی روی هر حلقه می پردازیم. همچنین اثبات قضیه ای از توسیع ارزیابی ماتریسی داریم که به صورت زیر می باشد:

یک دو سوئی طبیعی بین ارزیابی های ماتریسی روی R و ارزیابی R میدان های مانده وجود دارد.

---

[۲] Shiling

فصل ۱
پیش نیازها

.

دراین فصل که شامل سه بخش است ابتدا تعاریف و مفاهیم مقدماتی را بیان کرده و در بخش های بعدی به بیان موضعی سازی جابجایی و موضعی سازی غیر جایجایی از یک حلقه می پردازیم.

۱.۱ مفاهیم اولیه

تعریف ۱.۱.۱. فرض کنید B یک حلقه و A یک زیرحلقه از B باشد. در این صورت عنصر x از B روی A یک عنصرصحیح [۱] نامیده می شود اگر x یک ریشه از چندجمله ای تکین با ضرایب در A باشد، یعنی اگر x در یک معادله به فرم

$$x^n + a_۱ x^{n-۱} + \ldots + a_n = ۰$$

صدق کند که ضرایب x عناصری از A هستند. واضح است که عناصر A روی A صحیح هستند.

تعریف ۲.۱.۱. حوزه صحیح [۲] عبارت است از حلقه جابجایی و یکدار با حداقل دو عنصر که فاقد مقسوم علیه صفر باشد.

مثال ۳.۱.۱. هر گاه K یک میدان باشد، آن گاه حلقه چند جمله ای های $K[x_۱, x_۲, ..., x_n]$ یک حوزه صحیح است.

میدان خارج قسمتی $K[x_۱, x_۲, ..., x_n]$ با $K(x_۱, x_۲, ..., x_n)$ نشان داده می شود. این میدان از تمام کسرهای $\dfrac{f}{g}$ تشکیل شده که $f, g \in K[x_۱, x_۲, ..., x_n]$ و $g \neq ۰$، جمع وضرب آن معمولی اند، $K(x_۱, x_۲, ..., x_n)$ میدان توابع گویا از $x_۱, x_۲, ..., x_n$ روی K نام دارد.

تعریف ۴.۱.۱. فرض کنید D یک حوزه صحیح باشد. در این صورت عنصر غیر صفر و غیر یکه p را در D اول گوییم هرگاه از $p \mid ab$ بتوان نتیجه گرفت که $p \mid a$ یا $p \mid b$.

تعریف ۵.۱.۱. فرض کنید B یک حلقه، A یک زیر حلقه از B و C مجموعه عناصری از B باشد که روی A صحیح هستند. در این صورت C را بستار صحیح [۳] A در B می نامند.

[۱] integral element
[۲] integral domain
[۳] integral closure

اگر $A = C$، آن گاه A به طورصحیح بسته [۴] در B نامیده می شود و اگر $B = C$، آن گاه حلقه B یک حلقه صحیح روی A نامیده می شود.

مثال ۶.۱.۱. حوزه صحیح $\mathbb{Z}$ به طور صحیح بسته است (در میدان گویای $\mathbb{Q}$)، ولی $\mathbb{Z}$ در میدان اعداد مختلط $\mathbb{C}$ به طور صحیح بسته نیست، زیرا $i \in \mathbb{C}$ روی $\mathbb{Z}$ صحیح است.

در حالت کلی هر دامنه یکتایی تجزیه به طور صحیح بسته است، بخصوص حلقه چند جمله ای های $F[x_۱, x_۲, ..., x_n]$ (F یک میدان) در میدان خارج قسمتی $F(x_۱, x_۲, ..., x_n)$ خود به طور صحیح بسته است.

تعریف ۷.۱.۱. عنصر غیر صفر و غیر یکه p در حوزه صحیح D را تحویل ناپذیر گوییم هرگاه از تساوی $p = ab$ که $a, b \in D$ نتیجه شود که a یا b یکه است.

تعریف ۸.۱.۱. یک ایده آل دو طرفه P از یک حلقه R به طور کامل اول [۵] نامیده می شود هر گاه $R \neq P$ و حلقه ی خارج قسمتی $\frac{R}{P}$ هیچ مقسوم علیه صفر غیر صفر نداشته باشد.

تعریف ۹.۱.۱. میدان F را به طور جبری بسته [۶] گوییم هرگاه هر چند جمله ای غیر ثابت در $F[x]$ حداقل یک ریشه در F داشته باشد.

قضیه ۱۰.۱.۱. *گوییم هر میدان F که در شرایط معادل زیر صادق باشد به طور جبری بسته است:*

(یک) هر چند جمله ای غیر ثابت $f \in F[x]$ ریشه ای در F دارد؛

(دو) هر چند جمله ای غیر ثابت $f \in F[x]$ روی F تجزیه می شود؛

(سه) هر چند جمله ای تحویل ناپذیر در $F[x]$ از درجه یک است.

برهان. به [۱۴] صفحه ی ۴۰۴ مراجعه شود. □

مثال ۱۱.۱.۱. میدان اعداد مختلط $\mathbb{C}$ به طور جبری بسته است.

تعریف ۱۲.۱.۱. فرض کنیم F یک میدان باشد. در این صورت چند جمله ای $P(x) \in F[x]$ را تحویل ناپذیر گوییم هرگاه نتوان آن را به صورت

$$P(x) = f(x)g(x)$$

نوشت که در آن $f(x)$ و $g(x)$ چند جمله ای های غیر ثابت از $F[x]$ باشند.

[۴] integrally closed
[۵] completely prime
[۶] algebraically closed

مثال ۱۳.۱.۱. چندجمله ای درجه اول $۲x + ۲$ در $\mathbb{Q}[x]$ تحویل ناپذیر است زیرا هر چند جمله ای درجه اول که ضریب پیشرو آن یک یکه در D باشد در $D[x]$ تحویل ناپذیر است، بخصوص هر چند جمله ای درجه اول روی یک میدان تحویل ناپذیر است.

مثال ۱۴.۱.۱. چند جمله ای $x^۲ + ۱$ روی میدان حقیقی تحویل ناپذیر است. اما روی میدان مختلط به صورت $(x+i)(x-i)$ تجزیه می شود و چون یکه ها در $D[x]$ دقیقا چند جمله ای های ثابت اند که در D یکه می باشند، $x+i$ و $x-i$ در $\mathbb{C}[x]$ یکه نیستند. بنابراین $x^۲ + ۱$ در $\mathbb{C}[x]$ تحویل ناپذیر نیست.

تعریف ۱۵.۱.۱. فرض کنیم E یک توسیع میدان از F باشد. در این صورت عنصر $\alpha \in E$ را روی F جبری گوییم هرگاه یک چند جمله ای از $F[x]$ مانند $g(x) \neq ۰$ موجود باشد به طوری که α ریشه ی $g(x)$ باشد.

مجموعه عناصری از E که روی F جبری هستند بستار جبری F نسبت به E نامیده می شود.

مثال ۱۶.۱.۱. فرض کنیم $\mathbb{Q}$، $\mathbb{R}$، $\mathbb{C}$ به ترتیب میدان های اعداد گویا، حقیقی، مختلط باشند. در این صورت $i \in \mathbb{C}$ روی $\mathbb{Q}$ و در نتیجه روی $\mathbb{R}$ جبری است، در واقع $\mathbb{C} = \mathbb{R}(i)$ بستار جبری $\mathbb{R}$ است.

تعریف ۱۷.۱.۱. فرض کنیم $(G, *)$ یک گروه با رابطه ترتیب $\leq$ تعریف شده بر روی آن باشد. در این صورت $\leq$ را نسبت به $*$ سازگار گوییم هرگاه $g_۱, g_۲ \in G$ با $g_۱ \leq g_۲$، ایجاب کند که برای هر $g \in G$ با $e \leq g$ داشته باشیم

$$g_۱ * g \leq g_۲ * g.$$

تعریف ۱۸.۱.۱. زوج $(G, \leq)$ را یک گروه کاملا مرتب نامیم هرگاه G یک گروه و $\leq$ یک ترتیب کلی روی آن باشد که با عمل گروه G سازگار باشد.

۲.۱ موضعی سازی جابجایی

تعریف ۱.۲.۱. فرض کنید R یک حلقه تعویض پذیر باشد. در این صورت $S \subset R$، بسته ضربی نامیده می شود هرگاه داشته باشیم:

(۱) $۱ \in S$

(۲) اگر $a, b \in S$، آن گاه $ab \in S$.

مثال ۲.۲.۱. مجموعه S مرکب از تمام عناصری که در یک حلقه ناصفر یکدار مقسوم علیه صفر نباشند، ضربی است. به خصوص، مجموعه تمام عناصر ناصفر از یک حوزه صحیح ضربی است.

مثال ۳.۲.۱. اگر $A = \mathbb{Z}_۶$ و $S = \{\overline{۱}, \overline{۳}\}$ را در نظر بگیریم، آن گاه مجموعه S بسته ضربی است. زیرا $\overline{۱} \in S$ و همچنین

$$\overline{۱} \times \overline{۳} = \overline{۳} \in S$$
$$\overline{۳} \times \overline{۳} = \overline{۳} \in S$$
$$\overline{۱} \times \overline{۱} \in S.$$

مثال ۴.۲.۱. هر گاه P یک ایده آل اول در حلقه تعویض پذیر A باشد، آن گاه $S = A - P$ بسته ی ضربی است، زیرا $A \neq P$ بنابراین $۱ \in A - P$. حال فرض کنید $x, y \in S$. در این صورت طبق تعریف S داریم $x, y \notin P$ و چون P ایده آل اولی از A می باشد، طبق تعریف ایده آل اول $xy \notin P$. بنابراین $xy \in A - P$ و این یعنی $xy \in S$. پس S یک مجموعه بسته ضربی است.

قضیه ۵.۲.۱. *فرض کنید S زیرمجموعه ای از حلقه تعویض پذیر A باشد. رابطه $\sim$ را روی $A \times S$ بصورت زیر تعریف می کنیم:*

$$(a, s) \sim (b, t) \Longleftrightarrow \exists u \in S, u(at - bs) = ۰$$

در این صورت $\sim$ رابطه ای هم ارزی روی $A \times S$ می باشد.

برهان. واضح است که $\sim$ بازتابی و تقارنی است، کافی است نشان دهیم این رابطه تعدی است. فرض کنید $(a, s), (b, t), (c, u) \in A \times S$ که $(a, s) \sim (b, t)$ و $(b, t) \sim (c, u)$. دراین صورت عناصر $k, l \in S$ وجود دارند به طوری که $ulb = ltc$ و $kta = ksb$. حال ازتساوی اول نتیجه می شود که $ksulb = ksltc$ و از تساوی دوم $lukta = luksb$. بنابراین $ksltc = lukta$ و لذا $ltk \in S$ وجود دارد به طوری که $ltk(au - cs) = ۰$. در نتیجه $(a, s) \sim (c, u)$. بنابراین $\sim$ یک رابطه تعدی است و لذا رابطه $\sim$، یک رابطه هم ارزی می باشد. □

تعریف ۶.۲.۱. فرض کنید $\frac{a}{s}$ کلاس هم ارزی $(a, s) \in A \times S$ باشد. در این صورت مجموعه کلاس های هم ارزی $\sim$ را با $S^{-۱}A$ نمایش می دهیم لذا

$$S^{-۱}A = \{\frac{a}{s} \mid a \in A, s \in S\}$$

لم ۷.۲.۱. *الف) فرض کنیم S یک زیر مجموعه ضربی حلقه تعویض پذیر A بوده و $S^{-1}A$ مجموعه کلاس های هم ارزی $A \times S$ باشد. در این صورت مجموعه $S^{-1}A$ همراه با دو عمل زیر یک حلقه یکدار و جابجایی است.*

$$S^{-1}A \times S^{-1}A \longrightarrow S^{-1}A$$
$$(\frac{a}{s}, \frac{b}{t}) \longmapsto \frac{at+bs}{st}$$
$$S^{-1}A \times S^{-1}A \longrightarrow S^{-1}A$$
$$(\frac{a}{s}, \frac{b}{t}) \longmapsto \frac{ab}{st}$$

ب) هر گاه A حلقه ای ناصفر بدون مقسوم علیه صفر باشد و $0 \notin S$، آن گاه $S^{-1}A$ یک حوزه صحیح است.

ج) هر گاه A حلقه ای ناصفر بدون مقسوم علیه صفر و S مجموعه تمام عناصر ناصفر A باشد، آن گاه $S^{-1}A$ یک میدان است.

برهان. الف) نشان می دهیم این دو عمل خوش تعریف هستند. فرض کنید داشته باشیم $(\frac{a}{s}, \frac{b}{t}), (\frac{a'}{s'}, \frac{b'}{t'}) \in S^{-1}A \times S^{-1}A$ به طوری که

$$(\frac{a}{s}, \frac{b}{t}) = (\frac{a'}{s'}, \frac{b'}{t'}).$$

در این صورت

$$\frac{b}{t} = \frac{b'}{t'} \text{ و } \frac{a}{s} = \frac{a'}{s'}.$$

حال بنا به قضیه ۱ ۰ ۲ ۰ ۵ وجود دارد $u, v \in S$ به گونه ای که

$$u(as' - a's) = 0(*)$$

و همچنین

$$v(bt' - b't) = 0(**)$$

اکنون ثابت می کنیم که

$$\frac{ab}{st} = \frac{a'b'}{s't'} \text{ و } \frac{at+bs}{st} = \frac{a't'+b's'}{s't'}.$$

تساوی زیر به وضوح برقرار است:

$$ua'svtt' + uvb'tss' = ua'svtt' + uvb'tss'$$

با توجه به تساوی $(*)$ و $(**)$ نتیجه می شود که $uas' = ua's$ و $vbt' = vb't$. پس داریم

$$uas'vtt' + uvbt'ss' = ua'svtt' + uvb'tss'$$
$$uv((at+bs).s't') = uv((a't'+b's').st)$$
$$uv[((at+bs).s't') - ((a't'+b's').st)] = \circ$$

در نتیجه عمل جمع خوش تعریف است.

همچنین با توجه به $uas' = ua's$ و $vbt' = vb't$ داریم

$$uas'vbt' = ua'svb't$$

از اینرو داریم

$$uv(abs't' - a'b'st) = \circ$$

در نتیجه عمل ضرب خوش تعریف است.

با توجه به آنچه بیان شد و اینکه $\frac{\circ}{s}$ عضو همانی نسبت به عمل جمع است و $-\frac{a}{s}$ عضو قرینه جمعی است واضح است که $S^{-۱}A$ با اعمال فوق تشکیل حلقه می دهد.

ب) هرگاه A مقسوم علیه صفر نداشته باشد و $\circ \notin S$، آن گاه $\frac{a}{s} = \frac{\circ}{s}$ اگر و فقط اگر در A، $a = \circ$. در نتیجه در $S^{-۱}A$، $(\frac{a}{s})(\frac{a'}{s'}) = \circ$ اگر و فقط اگر در A، $aa' = \circ$.

چون $aa' = \circ$ اگر و فقط اگر $a = \circ$ یا $a' = \circ$ و از اینرو نتیجه می شود که $S^{-۱}A$ یک حوزه صحیح است.

ج) هر گاه $a \neq \circ$، آن گاه معکوس ضربی $\frac{a}{s} \in S^{-۱}A$ مساوی $\frac{s}{a} \in S^{-۱}A$ است و چون هر عنصر از $S^{-۱}A$ دارای معکوس می باشد لذا $S^{-۱}A$ یک میدان است. $\square$

تعریف ۸.۲.۱. حلقه $S^{-۱}A$ را در لم بالا حلقه خارج قسمت ها یا حلقه کسرهای A نسبت به S می نامند.

تعریف ۹.۲.۱. فرض کنیم A یک حلقه تعویض پذیر ناصفر بوده و S مجموعه تمام عناصر ناصفر A باشد که مقسوم علیه صفر نیستند. در این صورت اگر S ناتهی باشد، آن گاه $S^{-۱}A$ حلقه خارج قسمت ها یا کسرهای تام (یا کامل) حلقه A نامیده می شود.

تبصره. فرض کنید P ایده آل اولی از حلقه A باشد. در این صورت اگر $S = A - P$، آن گاه $S^{-۱}A$ را با A_P نشان می دهیم.

مثال ۱۰.۲.۱. فرض کنید $A=\mathbb{Z}$ و $P=(p)$ ایده آل اولی از $\mathbb{Z}$ باشد که در آن p یک عدد اول است. در این صورت A_p مجموعه همه عددهای گویای $\frac{m}{n}$ است که n نسبت به p اول هستند یعنی

$$\mathbb{Z}_p=\{\frac{m}{n}\mid m\in\mathbb{Z},n\in\mathbb{Z}-P\}=\{\frac{m}{n}\mid m\in\mathbb{Z},(n,p)=۱\}$$

مثال ۱۱.۲.۱. اگر $A=\mathbb{Z}$ و $f\in\mathbb{Z}$ که $f\neq ۰$، آن گاه A_f مجموعه همه عددهای گویایی است که مخرج آن ها توانی از f می باشد یعنی داریم

$$A_f=S^{-۱}\mathbb{Z}=\{\frac{m}{n}\mid n=f^i\}.$$

تعریف ۱۲.۲.۱. حلقه A را یک حلقه موضعی گوییم هر گاه فقط یک ایده آل ماکسیمال داشته باشد.

تبصره. چون هر ایده آل در یک حلقه یکدار مشمول ایده آل ماکسیمالی است، ایده آل ماکسیمال منحصر بفرد حلقه موضعی A باید هر ایده آل A (البته غیر از خود A) را شامل باشد.

مثال ۱۳.۲.۱. میدان ها حلقه موضعی هستند، زیرا ایده آل صفر تنها ایده آل ماکسیمال آن ها می باشد.

مثال ۱۴.۲.۱. فرض کنیم $R=\mathbb{Z}$ مجموعه اعداد صحیح باشد. در این صورت هر ایده آل در $\mathbb{Z}$ به شکل (P) می باشد که $P>۰$. ایده آل (P) اول است اگر وتنها اگر $P=۰$ یا P عددی اول باشد. همه ایده آل های (P)، که P عددی اول است، ماکسیمال هستند و $\mathbb{Z}_P$ حلقه ای موضعی می باشد.

مثال ۱۵.۲.۱. هر گاه p عدد اولی باشد و $n\geq ۱$، آن گاه $\mathbb{Z}_{p^n}$ یک حلقه موضعی با ایده آل ماکسیمال منحصر بفرد (p) است.

مثال ۱۶.۲.۱. حلقه $\mathbb{Z}_۴$ را در نظر می گیریم. در این صورت $\{\overline{۰},\overline{۲}\}$ تنها ایده آل ماکسیمال $\mathbb{Z}_۴$ است و لذا یک حلقه موضعی می باشد.

گزاره ۱۷.۲.۱. *فرض کنید A یک حلقه و m یک ایده آل از A باشد به طوری که هر عنصر x از $A-m$ یک یکه در A است. در این صورت A یک حلقه ی موضعی و m ایده آل ماکسیمال آن است.*

برهان. به [۲] صفحه ی ۴ مراجعه شود. □

گزاره ۱.۲.۱۸. *فرض کنید A یک حلقه و m ایده آل ماکسیمالی از A باشد به طوری که هر عنصر از $m+۱$ در A یکه باشد. در این صورت A یک حلقه موضعی می باشد.*

برهان. فرض کنید $x \in A - m$. در این صورت چون m ایده آل ماکسیمال است، ایده آل تولید شده بوسیله x و m برابر (۱) است بنابراین داریم

$$m \subsetneq m + Ax \subseteq A = (۱)$$

از اینرو

$$m + Ax = ۱$$

پس وجود دارد $y \in A$ و $t \in m$ به طوری که $xy + t = ۱$. از اینرو $xy = ۱ - t$. حال چون $۱ - t \in ۱ + m$، پس $xy \in ۱ + m$ و چون هر عنصر $m + ۱$ یکه است پس xy هم یکه است. بنابراین طبق گزاره قبل A یک حلقه ی موضعی می باشد. □

قضیه ۱.۲.۱۹. *هر گاه A یک حلقه تعویض پذیر یکدار باشد، آن گاه شرایط زیر معادلند:*

(۱) *A یک حلقه ی موضعی است.*

(۲) *تمام غیر یکه های A مشمول ایده آلی مانند $A \neq M$ هستند.*

(۳) *غیر یکه های A یک ایده آل تشکیل می دهند.*

برهان. هر گاه I ایده آلی از A باشد و $a \in I$، آن گاه $(a) \subset I$. در نتیجه $I \neq A$ اگر و فقط اگر I فقط از غیر یکه ها تشکیل شده باشد.

$(۳) \Longleftarrow (۲)$ چون بنا به (۲) تمام غیر یکه های A مشمول ایده آل M هستند و $A \neq M$، بنابراین خود M همان عناصر غیر یکه A می باشد که یک ایده آل است.

$(۱) \Longleftarrow (۳)$ واضح است چون در این حالت مجموعه عناصر غیر یکه تمام ایده آل ماکسیمال حلقه A خواهد شد و بنابراین A حلقه موضعی است.

$(۲) \Longleftarrow (۱)$ هر گاه $a \in A$ یک غیر یکه باشد، آن گاه $A \neq (a)$. بنابراین (a) مشمول ایده آل ماکسیمال منحصر بفرد M از A است و در نتیجه $a \in M$.

□

تبصره. حلقه کسرهای A_P هم یک حلقه موضعی است، زیرا

$$m=\{\frac{a}{s}\mid a\in P, s\in S\}$$

تنها ایده آل ماکسیمال A_P می باشد که P یک ایده آل اول از حلقه A می باشد.

- روند طی شده از حلقه A به A_P موضعی سازی A در P نامیده می شود.

تبصره. اگر A یک حوزه صحیح باشد و $S=A-\{\circ\}$، آن گاه $S^{-1}A$ میدان کسرهای A نامیده می شود.

فرض کنید A یک حلقه باشد. در این صورت ساختمان $S^{-1}A$ را با A- مدول M در حلقه A بنا می کنیم.

تعریف ۲۰.۲.۱. فرض کنید S یک زیر مجموعه بسته ضربی از حلقه تعویض پذیر A و M یک A- مدول باشد. در این صورت رابطه $\equiv$ را روی $M\times S$ به صورت زیر تعریف می کنیم:
$(m,s)\equiv(n,t)$ اگر و فقط اگر $u\in S$ ای وجود داشته باشد به طوری که $u(mt-ns)=\circ$.

قضیه ۲۱.۲.۱. *رابطه ی $\equiv$ معرفی شده در تعریف قبل، رابطه ای هم ارزی روی $M\times S$ می باشد.*

برهان. مشابه قضیه ۱ . ۲ . ۵ است. □

برای هر $(m,s)\in M\times S$، کلاس هم ارزی (m,s) را با $\frac{m}{s}$ و مجموعه کلاس های هم ارزی $\equiv$ را با $S^{-1}M$ نمایش می دهیم. لذا داریم

$$S^{-1}M=\{\frac{m}{s}\mid m\in M, s\in S\}.$$

لم ۲۲.۲.۱. *مجموعه $S^{-1}M$، متشکل از کلاسهای هم ارزی رابطه $\equiv$ تحت اعمال زیر یک مدول روی حلقه $S^{-1}A$ می باشد:*

$$\begin{gathered}
S^{-1}M\times S^{-1}M\longrightarrow S^{-1}M\\
(\frac{m}{s},\frac{a}{t})\longmapsto\frac{mt+as}{st}\\
S^{-1}A\times S^{-1}M\longrightarrow S^{-1}M\\
(\frac{m}{s},\frac{a}{t})\longmapsto\frac{ma}{st}
\end{gathered}$$

و $S^{-1}A$ - مدول $S^{-1}M$، مدول کسرهای M نسبت به S نامیده می شود (که عمل اول جمع روی $S^{-1}M$ و عمل دوم عمل ضرب مدول می باشد).

برهان. در لم ۱۰۲۰۷ نشان داده شد که عمل جمع خوش تعریف است. روشن است که $S^{-1}M$ یک گروه آبلی می باشد. اکنون ثابت می کنیم عمل ضربی که در بالا تعریف شده خوش تعریف است.

فرض کنید $(\frac{m}{s}, \frac{a}{t}) \in S^{-1}A \times S^{-1}M$ و $(\frac{m'}{s'}, \frac{a'}{t'})$ و

$$(\frac{m}{s}, \frac{a}{t}) = (\frac{m'}{s'}, \frac{a'}{t'}).$$

بنابراین نتیجه می گیریم که

$$\frac{a}{t} = \frac{a'}{t'} \text{ و } \frac{m}{s} = \frac{m'}{s'}.$$

پس $u, v \in S$ وجود دارند به طوری که

$$u(ms' - m's) = 0$$

و

$$v(at' - a't) = 0$$

بنابراین $ums' = um's$ و $vat' = va't$. حال طرفین تساوی اول را در vat' و تساوی دوم را در ums' ضرب می کنیم، لذا

$$vat'ums' = vat'um's \text{ و } vat'ums' = va'ums't.$$

بنابراین

$$vat'um's = va'ums't \Longrightarrow vu(at'm's - a'ms't) = 0$$

و در نتیجه

$$\frac{ma}{st} = \frac{m'a'}{s't'}.$$

از اینرو عمل ضرب مدولی فوق خوش تعریف است. براحتی می توان نشان داد که گروه آبلی $S^{-1}M$ با این عمل تعریف شده ضرب مدولی، یک $S^{-1}A$ - مدول است. □

تبصره. فرض کنید P ایده آل اولی از حلقه A و M یک A مدول باشد. در این صورت اگر $S = A - P$، آن گاه $S^{-1}M$ را با M_P نشان می دهیم.

تعریف ۲۳.۲.۱. خاصیت P از حلقه A (یا از یک A - مدول M) خاصیت موضعی نامیده می شود اگر گزاره زیر درست باشد:

A (یا A - مدول M) خاصیت P دارد اگر و فقط اگر برای هر ایده آل اول p از A، A_p (یا A_p - مدول M_p) خاصیت P را داشته باشد.

قضیه های زیر مثال هایی از خاصیت موضعی ارائه می دهد.

قضیه ۲۴.۲.۱. *فرض کنید M یک A - مدول باشد. در این صورت عبارت های زیر معادلند:*

(۱) $M = \circ$؛

(۲) *برای هر ایده آل اول P از A*، $M_P = \circ$؛

(۳) *برای هر ایده آل ماکسیمال m از A*، $M_m = \circ$.

(به عبارت دیگر خاصیت صفر بودن یک خاصیت موضعی است).

برهان. (۳) $\Leftarrow$ (۲) $\Leftarrow$ (۱) واضح است.

حال (۱) $\Leftarrow$ (۳) را ثابت می کنیم. به برهان خلف فرض می کنیم $M \neq \circ$ و x عنصر غیر صفری از M باشد. در نظر می گیریم $a = Ann(x)$ که a یک ایده آل از M می باشد. در این صورت a مشمول در یک ایده آل ماکسیمال m می باشد.

اکنون در نظر بگیریم عنصر $\frac{x}{۱} \in M_m$. چون طبق فرض (۳) داریم $M_m = \circ$، از اینرو $\frac{x}{۱} = \circ$.
پس وجود دارد $s \in S$ به طوری که $s(x۱ - ۱.\circ) = \circ$ و از اینجا $sx = \circ$، در نتیجه $s \in Ann(x)$.
از طرفی داریم $Ann(x) \subseteq m$ بنابراین $s \in m$، که تناقض است. از اینرو فرض خلف باطل و $M = \circ$. □

قضیه ۲۵.۲.۱. *فرض کنید $\phi : M \longrightarrow N$ یک همریختی A - مدولی باشد. در این صورت عبارت های زیر معادلند:*

(۱) ϕ *یک به یک است؛*

(۲) *برای هر ایده آل اول P از A*، $\phi_P : M_P \longrightarrow N_P$ *یک به یک است؛*

(۳) *برای هر ایده آل ماکسیمال m از A*، $\phi_m : M_m \longrightarrow N_m$ *یک به یک است.*

(به عبارت دیگر خاصیت یک به یک بودن یک خاصیت موضعی می باشد).

برهان. (۲) $\Longleftarrow$ (۱) چون ϕ یک به یک است لذا دنباله زیر دقیق می باشد.

$$\circ \longrightarrow M \longrightarrow N$$

از اینرو دنباله های زیر هم دقیق است.

$$\circ \longrightarrow S^{-۱}M \longrightarrow S^{-۱}N$$
$$\circ \longrightarrow M_P \longrightarrow N_P$$

یعنی ϕ_P یک به یک است.

(۳) $\Longleftarrow$ (۲) واضح است که هر ماکسیمال، اول است.

(۱) $\Longleftarrow$ (۳) فرض کنید $M' = ker(\phi)$. در این صورت دنباله زیر دقیق است

$$\circ \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow N$$

بنابراین این دنباله هم دقیق است

$$\circ \longrightarrow M'_m \longrightarrow M_m \longrightarrow N_m$$

پس $\circ = M'_m \cong ker(\phi_m) = \circ$ (چون ϕ_m یک به یک است). از اینرو $M' = \circ$ و ϕ یک به یک است. □

۳.۱ موضعی سازی غیر جابجایی

در این قسمت S را برای مجموعه ضربی در یک حلقه R در نظر می گیریم، یعنی داریم

$$s \cdot s \in S \text{، } ۱ \in S \text{ و } \circ \notin S.$$

در این حالت چون عناصر R_S شکل پیچیده ای دارند، کار کردن با همریختی $\varepsilon : R \longrightarrow R_S$ در مقایسه با حالت جابجایی خیلی مشکل تر است.

لذا آنچه در اینجا انجام می دهیم، معرفی شرایط اضافی روی S می باشد که فرم های ساده تری از حلقه های کسری کلاسیک را ارائه می دهد.

تعریف ۱.۳.۱. همریختی $\alpha : R \longrightarrow R'$ را S - معکوسی می نامیم اگر $\alpha(S) \subseteq U(R')$.

گزاره ۲.۳.۱. *فرض کنید $S \subseteq R$. در این صورت یک همریختی S - معکوسی $\varepsilon : R \longrightarrow R_S$ با خاصیت جهانی وجود دارد، یعنی برای هر همریختی S - معکوسی $\alpha : R \longrightarrow R'$ همریختی حلقه ای منحصر به فرد $f : R_S \longrightarrow R'$ وجود دارد به طوری که $\alpha = fo\varepsilon$.*

برهان. به [۷] صفحه ۲۸۹ مراجعه شود. $\square$

تعریف ۳.۳.۱. حلقه R' را یک حلقه کسرهای راست می نامیم (نسبت به $S \subseteq R$) هر گاه همریختی حلقه ای $\phi : R \longrightarrow R'$ وجود داشته باشد، به طوری که داشته باشیم

(a) ϕ، S - معکوسی باشد (یعنی برای هر $s \in S$، $\phi(s)$ یک یکه در R' باشد)؛

(b) هر عنصر R' شکلی به صورت $\phi(a)\phi(s)^{-1}$ (که $a \in R$ و $s \in S$) دارد؛

(c) $ker\phi = \{r \in R : \exists s \in S; rs = 0\}$.

تبصره. البته نباید انتظار داشته باشیم حلقه کسرهای راست وجود داشته باشد. در واقع اگر R' وجود داشته باشد، آن گاه دو حکم زیر روی S استنباط می شود:

حکم اول : برای هر $a \in R$ و $s \in S$، $aS \cap sR \neq \emptyset$. (به این خاصیت گوییم که S جایگشتی راست است).

برای اثبات این ویژگی $\phi(s)^{-1}\phi(a)$ را به شکل $\phi(r)\phi(s')^{-1}$، که $r \in R$ و $s' \in S$ می نویسیم. بنابراین

$$\phi(as') = \phi(sr)$$

سپس طبق قسمت (c) تعریف قبل برای $s'' \in S$ای، داریم

$$(as' - sr)s'' = 0$$

لذا

$$as's'' = srs'' \in aS \cap sR.$$

حکم دوم: فرض کنید $a \in R$. در این صورت اگر برای $s' \in S$، $s'a = 0$، آن گاه برای $s \in S$، $as = 0$. (به این خاصیت گوییم که S برگشتی راست است).

برای اثبات این ویژگی فرض کنیم $s'a = 0$. در این صورت

$$\phi(s')\phi(a) = 0$$

از اینرو $\phi(a) = 0$ و این طبق قسمت (c)تعریف ۳.۳.۱ ایجاب می کند برای $s \in S$، $as = 0$.

تعریف ۴.۳.۱. فرض کنیم مجموعه ضربی $S \subseteq R$ هم جایگشتی راست و هم برگشتی راست باشد. در این صورت S را یک مجموعه مقسوم علیه ای راست می نامیم.