وزارت فرهنگ وآموزش عالی

دانشگاه علوم و فنون مازندران

پایان نامه

مقطع کارشناسی ارشد

رشته :مهندسی عمران –سازه

موضوع :کاربرد نظریه گرافها وگرافهای جبری در تحلیل دینامیکی و پایداری سازه های متقارن

استاد راهنما : **جناب پروفسور علی کاوه**

دانشجو : **بهنوش سلیم بهرامی**

تابستان ۱۳۸۲

شایسته است که از جناب پروفسور **علی کاوه** ، که راهنمایی ها ، تشویق ها و زحمات ایشان همواره گامی بزرگ برای رسیدن به هدف، بوده است ، سپاسگذاری کنم.

گفتنی است ، هدایت ها و کوششهای بی دریغ جناب مهندس **محمد علی سیاری نژاد** در شکل گیری این پایان نامه، فراموش ناشدنی است .بدین وسیله از ایشان قدر دانی می نمایم.

بهنوش سلیم بهرامی

تابستان ۸۲

کلمات کلیدی :

ارتعاش آزاد- مقادیر ویژه - بردار های ویژه - تقارن- گراف - گراف جبری- سیستم .

Key word :

Free vibration – Eigenvalues – Eigenvectors – Symmetry – Graph – Algebraic graph – System.

چکیده:

تئوری گراف ، یکی از مباحث با ارزش ریاضیات است که کاربردهای فراوان و گاه ناشناخته ، در علوم مختلف دارد. هر گاه بتوان برای یک سیستم ، مدل گراف در نظر گرفت، می توان هر خاصیتی را که در گراف موجود است ، در سیستم اصلی جستجو کرد.

بحث تقارن در سازه های مهندسی ، امری شایع و اجتناب ناپذیر است . خوب است از این ویژگی که در بسیاری از سازه ها وجود دارد ، برای کاستن حجم محاسبات وبالا بردن دقت پاسخها ، استفاده گردد.

در تحلیل استاتیکی سازه های متقارن ، از ویژگی تقارن استفاده شده است.ولی جای این امر در تحلیل دینامیکی سازه های متقارن خالی است .

در این پایان نامه ،سعی شده است که در تحلیل دینامیکی ، هر سازه متقارن با دو زیر سازه دیگر معادل گردد. به عبارتی ، به دلیل داشتن ویژگی تقارن ، از ابعاد مساله کاسته شود ودقت محاسبات بالا رود .

در این پایان نامه ، همانند تقارنهای محوری و مرکزی در اشکال هندسی ، در سازه های مهندسی نیز دو نوع تقارن *به فرم دو* و *به فرم سه* تعریف می گردد و با توجه به شرایط خاص این فرمها ، افرازهای مربوطه به حداقل دو زیر سازه انجام می شود .

برای اثبات صحت افرازهای انجام شده ، از تئوری گراف و تئوری گراف های جبری استفاده می گردد. با بهره مندی از روابط اثبات شده در مدل گراف متناظر از جمله خواص ماتریس لاپلاسین یک گراف ، به نتیجه مطلوب خواهیم رسید .کاربرد روابط فوق را در تحلیل پایداری سازه ها نیز خواهیم دید . نشان داده می شود که افراز های دیگری در تعیین بار بحرانی سازه های متقارن مهندسی ، می توان داشت.

فهرست مطالب

عنوان **صفحه**

فهرست اشکال

عنوان **صفحه**

فصل اول

تئوری گراف

۱-۱ مقدمه

" تـئوری گـراف " یکـی ازشاخه های ریاضیات است که بوسیله اویلر [1] درسال ۱۷۳۶ آغـاز شـد. بعـد ازصـد سـال ، قانـون دوم کیرشهف [2] برای آنالیز شبکه های الکتریکی کشـف شـد. کیلـی [3] وسیلوسـتر [4] ، خـواص مختلفـی ازانواع ویژهٔ گرافها مثل درختها راکشـف کـردند . پوینکـر [5] چیـز ی راکه امروزه به ماتریس همبندی (Incidence) یک گـراف معروف است ، راتعریف کرد. بعد از صد سال اولین کتاب بوسیله کونیگ چاپ شد . بعد از جنگ جهانی دوم کتابهای بیشتری درتئوری گراف نوشته شد، مثل اور [6] ، بهزاد [7] وکارترند [8] ، توت [9]، برگ [10] و هاراری [11].

تـئوری گـراف درمهندسـی وعلومـی مـثل شـیمی ، عمران ، برق ومکانیک ، معماری ، مدیریت وکنترل ، مخابرات و . . . کاربردهای زیادتی دارد.

امـروزه ، کـتابهای زیـادی درزمیه کاربرد تئوری گراف توسط دانشمندان مختلف نوشته شده است . درابتدای امر یک سری تعاریف پایه گفته می شود. از ذکر توضیحات بیشتر صرفنظر می گردد. برای توضیحات بیشتر به منابع ۲و۱ مراجعه شود.

۱-۲ تعاریف پایه

درابتدای امر باید موقعیتها وویژگیهای هرعضو ونقطه ازیک ساختار راتشخیص دهیم. به عـنوان مـثال دریـک ساختار اگر یک عضو تغییر کند، رفتار آن ساختارعوض می گردد. رفتار وهویت یک ساختار به موقعیت وهویت اعضایش بستگی دارد. به بیانی دیگر، اگر موقعـیت یـک عضـو عـوض شد، خواص آن سازه دوباره ، تغییر خواهد کرد . بنابراین اتصالات (توپولوژی) یک ساختار ،ازکارایی آن تأثیر می پذیرد. بنابراین ارائه یک سیستم کـه توپولـوژی آن راحـت فهمـیده شـود، مهم است . مدل گراف یک سیستم ، مفاهیم قدرتمندی رابرای این هدف ارائه می دهد.

1- Euler
2- kirchhoff
3- cayley
4- syslvester
10- Berge
5- poincare
6- ore
7- Behzad
9- Tutte
10- Harary

۱-۲-۱ تعریف یک گراف

یک گراف S شامل یک مجموعه N(s) ازالمانها که گره [1] (راس یانقطه) ویک مجموعه N(s) ازالمانهـا کـه اعضـاء [2] یـا لـبه ها نامیده می شود. هرعضو دارای دوگره است که هردوگره که عضو راتشکیل می دهند، انتهاهای [3] آن عضو نامیده می شود.

اعضای چندگانه [4] :

اگر دویاچند عضو به دوگره وصل باشند ، به آنها اعضای چندگانه گویند.

حلقه [5]:

اگر یک عضو یک انتها داشته باشد ، به آن حلقه می گوییم .

گراف ساده [6]:

اگر یک گراف حلقه واعضای چندگانه نداشته باشد گراف ساده نامیده می شود.

گراف متناهی [7]:

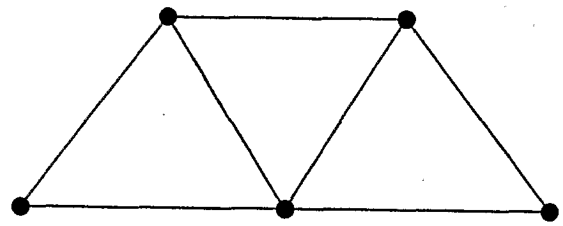
اگـر N(s) و M(s) قابـل شـمارش باشـند ،گـراف متناظـر آن یک گراف متناهی است . درواقع گرافی با N(s) و M(s) نامتناهی، دارای المانهای نامحدود است.

دراین فصلها ، تنها گرافهای متناهی موزد بررسی قرار میگیرد.

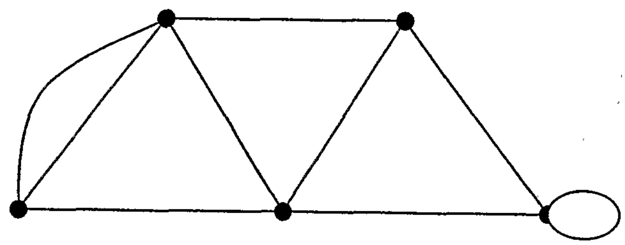
تعاریـف بالا مطابق باگراف محض می باشد ، هرچند که یک گراف شاید بایک مجموعه ازنقاط که باخطوطی درفضای اقلیدسی به هم وصل می شوند، شناخته شود. این نقاط ، گـره نامیده شده واین اعضای خطی بدون نقاط انتهایشان ، عضو نام گذاری می شود.به این مجموعه، گرافهای توپولوژیکی می گویند.

1- node
2- member
3- Ends
4- Multiple
5- loop
6- simple graph
7- finite graph

تعاریف بالا رادرشکلهای زیر می بینیم.



شکل ۱-۱ -الف   گراف ساده بدون عضو چندگانه وحلقه



شکل ۱-۱- ب   گراف غیرساده بایک حلقه ودوعضو چندگانه

۱-۲-۲ همسایگی [1] وهمبندی [2]

اگـر دوگره ازیک گراف بوسیله عضویٰ به هم وصل شوند، آن دوگره را همسایه گویند. یـک عضـو بایـک گـره همبـند است اگر آن گره یک انتها برای آن عضو باشد. دوعضو درصورتی همبند هستند اگر آن دوعضو حداقل دریک گره انتهایی باهم مشترک باشند .

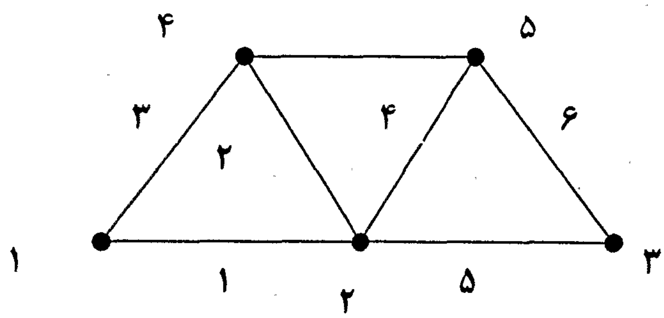
درجه یک گره :

درجـه یک گره n_i که با $\deg(n_i)$ نوشته می شود ، برابر است باتعداد اعضایی که به آن گره همبند است .

بدلیل اینکه هرعضو دریک گراف دارای دوگره انتهایی است ، به سادگی می توان درک کرد که مجموع درجه های گره های مختلف یک گراف برابر است بادوبرابر تعداد اعضای آن.

1- Adjacency
2- Incidence

درشکل زیرگره های n_2, n_4 همسایه هستند وگره n_2 باعضای m_5 وm_4وm_2وm_1 همبند است . درجه گره n_2 برابر 4 است .



شکل ۱-۲ گراف ساده S

تعداد اعضای این گراف ۷ تاست ومجموع درجه های گره های آن برابرا ست با:

۲+٤+۲+۳+۳ =١٤

که برابر با ۲ برابر اعضای آن است .

۱-۲-۳ عملکردهای گراف :

زیرگرافها:

یک زیرگراف si ازگراف s ، یک گراف است به طوریکه M(si) , M(s) , N(si) N(s) وهرعضو از آن ، انتهاهای مشابه با s دارند.

اجتماع زیرگرافها :

اجتماع زیرگرافهای s_1 ، s_2 و. . . و s_k از s ، یک زیرگراف از s است که بطوریکه

$$N\left(S^k\right)=\bigcup_{i=1}^{k} N\left(s_i\right)$$
$$M\left(S^k\right)=\bigcup_{i=1}^{k} M\left(S_i\right)$$

اجتماع زیرگرافها رابا این شکل نمایش می دهند:

$$S^k=\bigcup_{i=1}^{k} S = S_1 \quad US_2 \ U....US_R$$

اشتراک دوگراف :

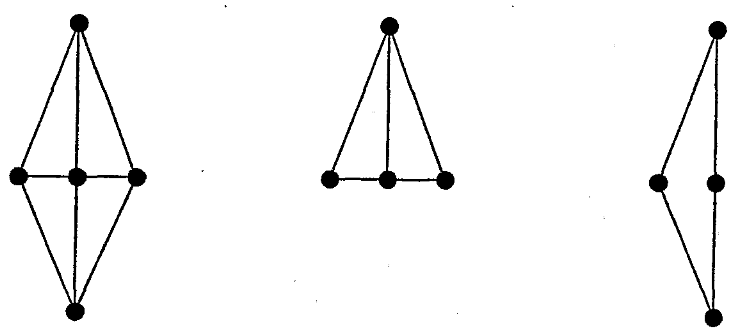
اشتراک دوگراف ، مجموعه مشترک اعضاء وگره ها از دوگراف تعریف می شود.

جمع حلقوی گرافها :

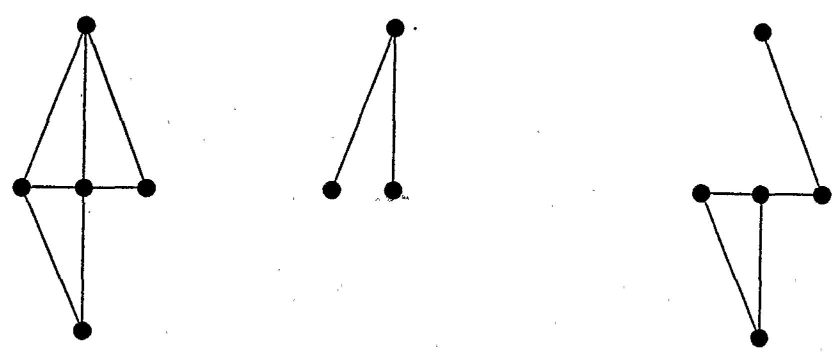
جمـع حلوقـی دوزیرگراف s_i ، s_j ، یک زیرگراف است که گره ها واعضای s_i و s_j راشـامل می شود ، به جز آن المانهایی که بین s_j,s_i مشترک هستند. این جمع راباشکل زیرنمایش می دهند:

$$S_i \oplus S_j$$

مثالی برای تعاریف بالا:



الف) s　　ب) s_i　　ج) s_j



د) $S_i \cup S_j$　　هـ) $S_i \cap S_j$　　و) $S_i \oplus S_j$

شکل ۱-۳ یک گراف ، دوزیرگراف ، اجتماع ، اشتراک وجمع حلقوی

s_i, s_j هردو، زیرگرافی از s هستند.

۱-۲-٤ پیمایش [1] (گام) ، دنباله [2] (گذر)، مسیر [3]

یک پیمایش p_R ازگراف s یک دنباله محدود به این شکل $P_R=\{n_o,m_1,n_1,...m_p,n_p\}$ است که متناوباً ترکیبی از گره n_u , m_i می باشد و $1\le i\le P$. همچنـــــــــین n_i , n_{i-1} دوانتهای عضو m_i هستند.

یـک دنـباله درگـراف s ، یـک پـیمایش است که هیچ عضوی از s بیشترازیک باردرآن تکرار نشود.

یـک مسـیردرگراف s ، یـک دنـباله درگـراف s اسـت که هیچ گرهی درآن بیش ازیک باراسـتفاده نشـود.درواقـع یـک مسـیردرگراف s ، یـک پیمایش است که درآن هرعضو یاگرهی فقط یک بارتکرار شود.

طول هرمسیر p_i که با $L(p_i)$ نشان داده می شود، برابر است باتعداد اعضای آن .

p_i ، کوتاهترین مسیر بین دونقطه گفته می شود اگر یک مسیر p_j دیگری وجود نداشته باشدکه دونقطه راباطول کمتری طی کند.

یعنی به ازای هر p_j : $L(p_i)\le L(p_j)$

فاصله دوگره دریک گراف ، تعداد اعضای کوتاهترین مسیربین دوگره می باشد.

گراف شکل قبل رادرنظر می گیریم:

$W=(n_2,m_6,n_5,m_5,n_1,m_1,n_2,m_2,n_3,m_8,n_5,m_6,n_2)$

عضو m6 ونقاط n5,n2 بیش ازیک بارتکرار شده اند.

$T=(n_2,m_6,n_5,m_5,n_1,m_1,n_1,m_2,n_3)$

گره n2 دوبارتکرار شده ولی هیچ عضوی بیش از دوبارنیامده است

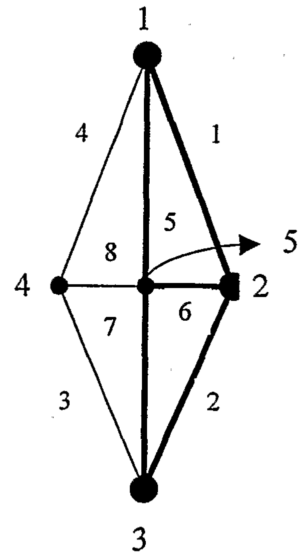
$P=(n_5,m_5,n_1,m_1,n_2,m_2,n_3)$

دراینجا هیچ عضو وگرهی دوبار تکرار نشده است پس یک مسیراست .

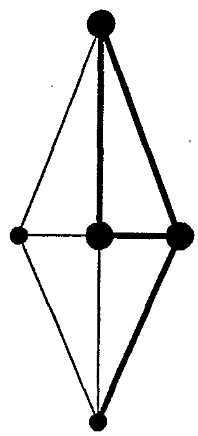
1- walk

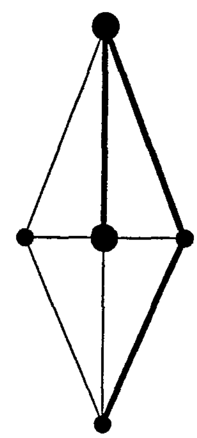
2- trail

3- path



الف) یک پیمایش w





ب) یک دنباله t

ج) یک مسیر p

شکل ۱-٤ یک پیمایش ، یک دنباله ، یک مسیر

۱-۲-۵ اتصال

دوگره nj, ni رادرگراف s متصل گویند، اگر بین آن دو یک مسیرموجود باشد.

گراف s متصل نام دارد، هرگاه هردوگره آن ، دوگره متصل باشند

۱-۲-٦ چرخه ها [1] ودسته های برش [2]

چرخه ها :

یک مسیربسته راچرخه گویند، به طوریکه گره ابتدا وانتهای آن یکی باشد.

$(no,m1,n1,\ldots\ldots, mp,np) = no\text{-}\ np$

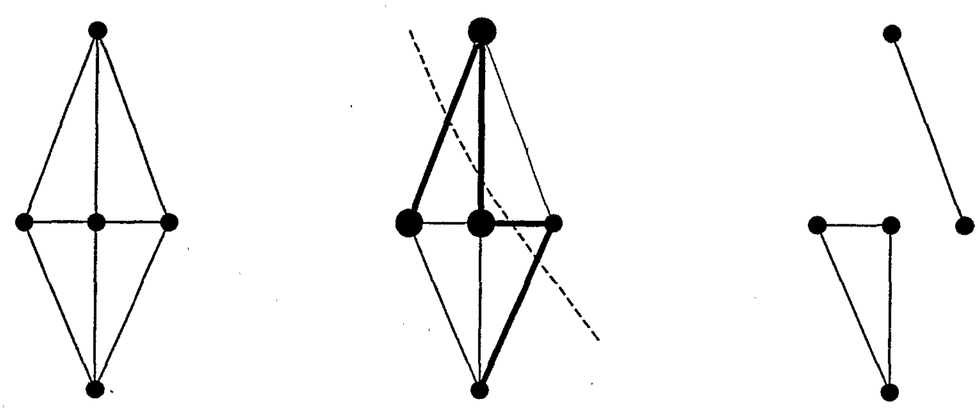
مسیریک چرخه است $\Rightarrow \quad P \geq 1$

دسته های برش:

اعضـایی ازگـراف هستند که بابرداشتن آنها ازگراف ، آن گراف به دوزیرگراف افراز می شـود، کـه ازهم جدا هستند. به هریک از اعضایی که حذف کرده ایم ودوزیرگراف رابه هم وصل می کند یا واصل s میگوییم.

دسـته هـای بـرش را » اولیه « گوییم ، اگر هردوگراف ۱ s و ۲ s جزء گرافهای متصل باشند.

اگر ۱ s یا s۲ یک نقطه باشند، به دسته برش cocycle می گوییم .



شکل ۱-٦ یک گراف s ویک دسته برش

1- cycles
2- cutsets
3- link

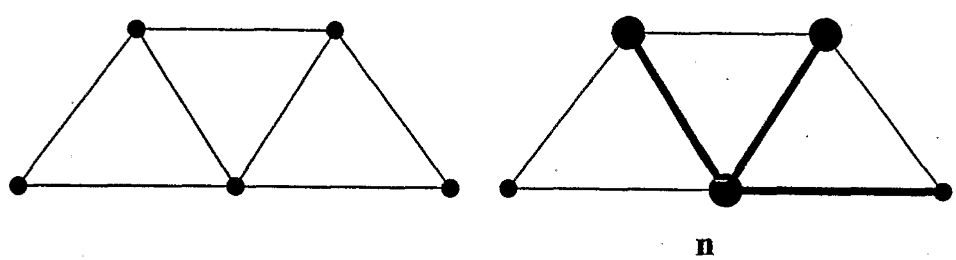
۱-۲-۷   درخت [1] ، درخت پوشا [2] ، درخت باکوتاهترین مسیر [3]

یـک درخـتT، یـک زیرگـراف ازگـراف S اسـت، که هیچ چرخه ای درآن نباشد. به مجموعه ای ازدرختها ، جنگل [4] میگویند.

به درختی که همهٔ گره های یک گراف درآن باشد ، درخت پوشا گفته می شود که برای سادگی به آن درخت گوییم.

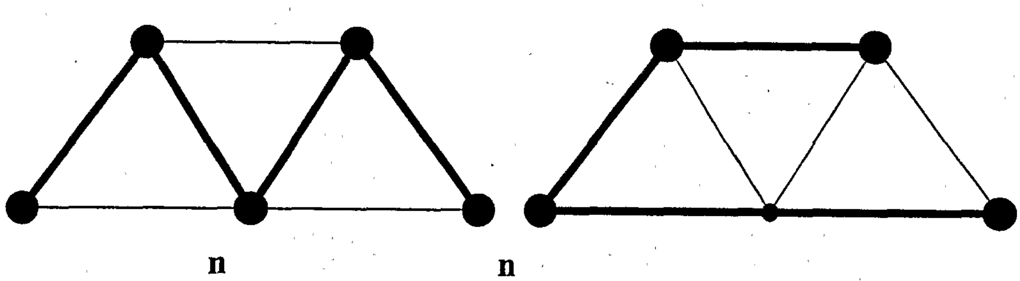
درختـی که ازیک گره مشخص دریک گراف شروع شده وفاصلهٔ هرگره ازاین درخت تا نقطه شروع ، کمترین مقداراباشد ، درخت کوتاهترین مسیر نام دارد.

نقطه شروع هردرخت راریشه گویند. در SRT (Shortest Route tree) فاصله هرنقطه از SRT تا ریشه حداقل است.



الف) یک گراف

ب) یک درخت



ج) یک درخت کوتا هترین مسیر ا ز n_0

د) درخت پوشا

شکل ۱-۷- تعریف درخت

می توان نشان داد که تعداد اعضای هردرخت ازتعداد گره های آن یکی کمتراست.

یعنی : $M(T) = N(T) - 1$

1- Tree
2- Spaning Tree
3- Shortest Route Tree
4- Forest

۱ ـ ۳ ماتریسهای ناشی ازیک گراف

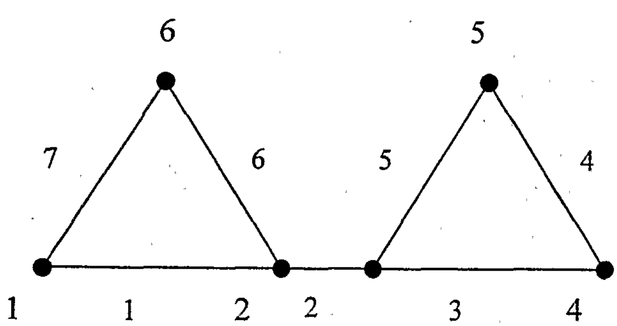
درتئوری گراف ، باید هرگراف رابتوانیم ازنظر ریاضیات تعریف کنیم. درتئوری گراف ، ماتریسها نقش بااهمیتی رامخصوصاً درکاربردهای آن درتحلیل سازه ای – باری می کند. بعضی از ماتریسها ، خواص اتصال یا Connetivity یک گراف وبعضی اطلاعات مفیدی درباره الگوهای ماتریس های سازه ای وبعضی درمورد معادلات تعادل وسازگاری بیان می دارند.

دراین بخش برخی ازاین ماتریسها رابیان می کنیم. درکل دراین فصول گرافهای همبند مورد بررسی قرارمیگیرد.

۱-۳-۱ ماتریس همسایگی [1]

گراف S رادرنظر می گیریم اگرگراف S ، n گره داشته باشد ماتریس همسایگی یک ماتریس $n \times n$ است که اگر n_i با n_j همسایه باشند ، درایه سطر i وستون j آن برابر ۱ است . ودرغیراین صورت برابر صفر می باشد. فرض براین است که هرنقطه باخودش همسایه نیست یعنی درایه های قطری صفر هستند بدیهی است که جمع درایه های هرردیف یاهرستون برابر درجه آن گره است.

مثال زیررا درنظر می گیریم:



شکل ۱-۸ گراف S

1- Adjacency